المـــادة :	الرياضيات
الشعــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (ب)

فرض محروس رقم 4

مدة الإنجاز: 4ساعات

فرض شــــامل

التمرين الأول: الفضاء المتجهي الحقيقي+ المعادلات التفاضلية

التمرين الثاني: الأعداد العقدية.

التمرين الثالث: الحسابيات + البنيات الجبرية.

التمرين الرابع:التحليل

المـــادة :	الرياضيات
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (ب)

التمرين الأول: (3.50ن)

لتكن E_I مجموعة الدوال المعرفة على مجال I ضمن $\mathbb{R}$.

نعلم أن $\left(E_I,+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي.

نضع : $F=\left\{f\in E_{]0,+\infty[},\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ \ xf''(x)-(x+1)f'(x)+f(x)=0\right\}$

1) بين أن $\left(F,+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي. 1.00

2) نضع $u(x)=e^x$ و $v(x)=x+1$ بحيث $x\in\left]0,+\infty\right[$.

أ) تحقق من أن u و v ينتميان إلى F. 0.50

ب) بين أن $\left(u,v\right)$ أسرة حرة. 0.50

3)

أ) بين أن لكل f من F الدالة f'' قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ و أن: $f'''=f''$. 0.50

ب) حل المعادلة التفاضلية $y'-y=0$. 0.25

ج) استنتج أن $\left(u,v\right)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $\left(F,+,\bullet\right)$. 0.75

التمرين الثاني:(3.50ن)

ليكن a عدد عقدي غير منعدم.

نعتبر المعادلة : $\left(E\right):\ z^2-2z+1+a^2=0$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(E\right)$. 0.75

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقطتين A و B التي ألحاقها على التوالي $1+ia$ و $1-ia$، و نضع $a=a_1+ia_2$ بحيث a_1 و a_2 عددين حقيقيين.

أ) بين أن النقط O، A و B مستقيمية إذا وفقط إذا كان $a_1=0$. 0.50

ب) بين أن $\left(OA\right)$ و $\left(OB\right)$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $|a|=1$. 0.50

3) نضع $a=e^{i\alpha}$ بحيث $\alpha\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

أ) بين

أن: $\forall x\in\mathbb{R},\quad 1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ و $\forall x\in\mathbb{R},\quad 1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$. 0.50

ب) استنتج الشكل المثلثي للعددين: $1+ia$ و $1-ia$. 0.50

ج) حدد a لكي يكون المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O. 0.75

المـــادة :	الرياضيات
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (ب)

التمرين الثالث: (2.50ن)

نعلم أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times\right)$ عبارة عن حلقة تبادلية واحدية وحدتها $\bar{1}$.

نقول أن $\bar{a}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ قابل للقلب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إذا وجد $\bar{b}$ من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بحيث $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{1}$.

1) بين أن $\bar{a}$ قابل للقلب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كان $a\wedge n=1$. 1.00

2) ليكن p عددا أوليا موجبا . 1.00

بين أن : $\left(\forall\bar{a}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\bar{0}\}\right)\left(\exists\bar{b}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-\{\bar{0}\}\right)\ ,\ \ \bar{a}\times\bar{b}=\bar{1}$.

3) استنتج أن : $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times\right)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع: (10.50ن)

I ليكن λ عددا حقيقيا ، نعتبر الدالة f_λ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي:

$$f_\lambda : x\mapsto\frac{\ln(x)+\lambda}{1+x^2}$$

و $\left(C_\lambda\right)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) نعتبر النقطة $M\left(\alpha,\beta\right)$ من المستوى بحيث $\alpha>0$.بين أنه من النقطة $M\left(\alpha,\beta\right)$ يمر منحنى وحيد $\left(C_\lambda\right)$ من منحنيات الدوال f_λ. 0.50

2)

أ) بين أن لكل λ من $\mathbb{R}$ الدالة f_λ قبلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. 0.25

ب) ين أن لكل $x>0$ ،إشارة f_λ' هي إشارة $g_\lambda(x)=1+x^2-2x^2\left(\ln(x)+\lambda\right)$. 0.50

ج) أدرس تغيرات الدالة g_λ. 0.50

3) بين أن المعادلة $g_\lambda\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا m_λ في $\mathbb{R}_+^*$ و بين أن $\ln\left(m_\lambda\right)>-\lambda$. 1.00

4) بين أن m_λ حل للمعادلة $f_\lambda\left(x\right)=\dfrac{1}{2x^2}$. 0.25

5) نعتبر المتتالية العددية $\left(m_n\right)_{n\geq1}$ حيث لكل $n\geq1$ ، m_n حل للمعادلة $g_n\left(x\right)=0$.

المـــادة :	الرياضيات
الشعــب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (ب)

أ) احسب: $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ و $g_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 0.25

ب) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$ و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)<0$. 0.25

ج) استنتج أن المتتالية $(m_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها. 0.50

6) أعط تقريبا ل m_{-1} ب 0.125.(أحسب $g_{-1}(4)$ و $g_{-1}(5)$) 0.25

7) أنشئ (C_{-1}) 0.75

II في هذا الجزء نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي : $F(x)=\int_1^x f_0(t)dt=\int_1^x \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

1) بين أن $D_F=\mathbb{R}_+^*$. 0.50

2) ادرس إشارة F على $\mathbb{R}_+^*$. 0.25

3) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. 0.50

4) بين أن F متصلة على $\mathbb{R}_+^*$. 0.25

5) بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=F(x)$. 0.50

6) لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $\varphi(x)=\dfrac{Arc\tan(x)}{x}$.

بين أن φ تقبل تمديدا بالاتصال في 0. نرمز له ب $\widetilde{\varphi}$. 0.25

7) نعتبر الدالة G المعرفة بما يلي : $G(x)=\int_1^x \widetilde{\varphi}(t)dt$.

أ) حدد D_G. 0.50

ب) بين أن لكل $x>0$ ، $F(x)=Arc\tan(x)\ln(x)-G(x)$. 1.00

ج) بين أن F تقبل نهاية L على يمين 0 . 0.50

8) نعتبر الدالة $\widetilde{F}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases}\widetilde{F}(x)=F(x)\ ;\ x>0\\ \widetilde{F}(0)=L\end{cases}$.

أ) بين انه لكل $x>0$ يوجد c_x من المجال $]0,x[$ بحيث : $F(x)+G(0)=f_0(c_x)x$. 0.75

ب) استنتج أن:الدالة F غير قابلة للاشتقاق على يمين 0. 0.50