إمتحانات موحدة وطنية وتصحيحها
2010 – 2008 – 2009

في مادة :

الرياضيات

السنة الثانية من السلك الباكلوريا

- **شعبة العلوم التجريبية**
  - مسلك علوم الحياة و الأرض
  - مسلك العلوم الفيزيائية
  - مسلك العلوم الزراعية
- **شعبة العلوم و التكنولوجيات الصناعية**
  - مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية
  - مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا

الفهرس

الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا
الإطار المرجعي لاختبار مادة الرياضيات -2010-
شعبة العلوم التجريبية و شعبة العلوم و التكنولوجيات

المجال الرئيسي الأول : التحليل

المجال الفرعي الأول : المتتاليات العددية

1.1.1. استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل:
$u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$؛

2.1.1. استعمال نهايات المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهايات متتاليات عددية؛

3.1.1. تحديد نهاية مركب متتالية و دالة متصلة (متتاليات من النوع $v_n = f(u_n)$)؛

4.1.1. تحديد نهاية متتالية (u_n) متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$ ؛

5.1.1. استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة.

المجال الفرعي الثاني: الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال

1.2.1. دراسة اتصال دالة عددية في نقطة باستعمال حساب النهايات؛

2.2.1. تحديد صورة قطعة أو مجال (محدود أو غير محدود) بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتيبة قطعا؛

3.2.1. تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير ...؛

4.2.1. تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية ومبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال، لإثبات وحدانية حل المعادلة $f(x) = \lambda$ ؛

5.2.1. دراسة قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة و على مجال ؛

6.2.1. تحديد الدالة المشتقة لدالة عددية؛

7.2.1. تحديد رتابة دالة ؛

8.2.1. تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها؛

9.2.1. تحديد إشارة دالة انطلاقا من تمثيلها المبياني؛

10.2.1. الحل المبياني لمعادلات من الشكل $f(x) = g(x)$ ومتراجحات من الشكل $f(x) \leq g(x)$ ؛

11.2.1. تحديد مشتقة ورتابة الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال، وتمثيلها مبيانيا؛

12.2.1. حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية؛
13.2.1. توظيف الدالة المشتقة الأولى و الدالة المشتقة الثانية في دراسة دالة عددية و في إثبات بعض المتفاوتات ....؛

14.2.1. دراسة دوال أو دوال مركبة من بين الدوال الواردة بالمقرر وتمثيلها مبيانيا (مجموعة التعريف، عناصر التماثل، الدورية، الرتابة، الفروع اللانهائية، المماسات، التقعر، نقط الانعطاف...)؛

المجال الفرعي الثالث : الدوال الأصلية

1.3.1. تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية؛

2.3.1. استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال.

المجال الفرعي الرابع : الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.4.1. التمكن من الحساب الجبري على اللوغاريتمات؛

2.4.1. التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات لوغاريتمية ؛

3.4.1. معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري (خاصة في حل المعادلات من نوع $10^x = a$)؛

4.4.1. التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتطبيقها؛

5.4.1. التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي على الدالة اللوغاريتمية النبيرية؛

6.4.1. التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية؛

7.4.1. التمكن من نهايات الدالة الأسية النبيرية الأساسية وتطبيقها؛

8.4.1. التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية ودالة اللوغاريتم النبيري.

المجال الفرعي الخامس : المعادلات التفاضلية

1.5.1. حل المعادلة $y' = ay + b$ ؛

2.5.1. حل المعادلة $y'' + ay' + by = 0$.

المجال الفرعي السادس : الحساب التكاملي

1.6.1. توظيف الدالة الأصلية و تقنية المكاملة بالأجزاء في حساب تكامل دالة؛
2.6.1. توظيف خاصيات التكامل؛
3.6.1. حساب مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيين؛

4.6.1. حساب حجم المجسم المولد بدوران منحنى دالة حول محور الأفاصيل.

المجال الرئيسي الثاني : الجبر والهندسة

المجال الفرعي الأول : . الجداء السلمي في V_3

1.1.2. التعبير والبرهنة على تعامد متجهتين باستعمال الجداء السلمي؛

2.1.2. التعبير متجهيا عن التعامد وخاصياته؛

3.2.1. التعبير تحليليا عن التعامد وخاصياته.

المجال الفرعي الثاني : تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

1.2.2. تحديد معادلة مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية؛
2.2.2. تحديد تمثيل برامتري لمستقيم مار من نقطة وعمودي على مستوى؛
3.2.2. **دراسة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$**
4.2.2. تحديد معادلة ديكارتية لفلكة محددة بمركزها وشعاعها؛
5.2.2. التعرف على مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ؛
6.2.2. **توظيف مسافة نقطة عن مستوى في حل مسائل هندسية (الأوضاع النسبية لمستوى و فلكة و لمستقيم و فلكة...).**

المجال الفرعي الثالث : الجداء المتجهي

1.3.2. حساب مساحة مثلث باستعمال الجداء المتجهي؛
2.3.2. تحديد معادلة مستوى محدد بثلاث نقط غير مستقيمية؛
3.3.2. توظيف مسافة نقطة عن مستقيم في حل مسائل هندسية ؛
4.3.2. تطبيق الجداء المتجهي في حل مسائل هندسية .

المجال الفرعي الرابع : الأعداد العقدية

1.4.2. التمكن من الحساب الجبري على الأعداد العقدية **(في كل من كتاباتها الجبرية و المثلثية و الأسية)؛**
2.4.2. الانتقال من الكتابة الجبرية إلى الكتابة المثلثية لعدد عقدي والعكس؛
3.4.2. إخطاط حدانيات مثلثية باستعمال الترميز الأسي لعدد عقدي؛
4.4.2. ترجمة المفاهيم الهندسية التالية: المسافة بين نقطتين، قياس الزوايا، ، استقامية النقط، استقامية وتعامد المتجهات، باستعمال الأداة العقدية؛
5.4.2. التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران ؛
6.4.2. **التعرف على الإزاحة و التحاكي و الدوران من خلال صيغها العقدية؛**
7.4.2. توظيف الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية (الاستقامية، التعامد، ....)؛
8.4.2. حل المعادلة $az^2+bz+c=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ؛
9.4.2. حل معادلات تؤول في حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد معاملاتها حقيقية.

المجال الفرعي الخامس : حساب الاحتمالات

1.5.2. استعمال النموذج التعدادي المناسب حسب الوضعية المدروسة؛
2.5.2. حساب احتمال اتحاد حدثين و احتمال الحدث المضاد لحدث واحتمال تقاطع حدثين ؛
3.5.2. حساب الاحتمال الشرطي و توظيفه لحساب احتمال تقاطع حدثين؛
4.5.2. التعرف على استقلالية حدثين؛

5.5.2. تحديد قانون احتمال متغير عشوائي و حساب مختلف وسيطاته ؛
6.5.2. التعرف على القانون الحداني وتطبيقه في وضعيات متنوعة.

جداول التخصيص

أ . حسب المجالات الرئيسية

المجالات	المجالات الفرعية	نسبة الأهمية
التحليل	المتتاليات العددية	**55%**
	الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال	
	الدوال الأصلية	
	الدوال اللوغاريتمية والأسية	
	المعادلات التفاضلية	
	الحساب التكاملي	
الجبر والهندسة	الجداء السلمي في V_3	**15%**
	تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء	
	الجداء المتجهي	
	الأعداد العقدية	**30%**
	حساب الاحتمالات	
المجموع		**100%**

ب . حسب المستويات المهارية

المستوى المهاري	نسبة الأهمية
تطبيق مباشر للمعارف (تعريف؛ خاصية؛ مبرهنة؛ خوارزمية؛ صيغة؛ تقنية؛ قاعدة؛ ....).	**50 %**
استحضار وتطبيق معارف غير معلنة في السؤال (تعريف؛ خاصية؛ مبرهنة؛ خوارزمية؛ صيغة؛ تقنية؛ قاعدة؛ ....) في وضعية مألوفة.	**35%**
معالجة وضعيات غير مألوفة بتوليف معارف ونتائج.	**15%**

C: NS22

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة العادية 2008-
الموضوع

المـــادة:	الرياضيات	المعامل:	7
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	مدة الإنجاز:	3س

(يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة)

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقطتين $A\left(0,-1,1\right)$ و $B\left(1,-1,0\right)$
و الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$.

1,25 | 1) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,2)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$ و تحقق من أن A تنتمي إلى (S) .

1,25 | 2) حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ وبين أن $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB).

0,5 | 3) بين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A .

التمرين الثاني (3 ن)

1 | 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$.

2) نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$. ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$.

0,75 | أ- بين أن : $z'=z+4-2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T .

0,5 | ب- بين أن : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$.

0,75 | ج- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC=2AC$.

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1 | أ- احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء .

1 | ب- بين أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو $\dfrac{16}{21}$.

1 | 2) نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية : نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق .
احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء .

مسألة (11 ن)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - 2\ln x$.

0,5 — 1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

0,5 — ب- بين أن g تناقصية على $]0,2]$ وتزايدية على $[2,+\infty[$.

0,5 — 2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(2) > 0$).

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - (\ln x)^2$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,75 — 1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا .

0,5 — 2) أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$. نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$).

0,75 — ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (لاحظ أن : $f(x) = x\left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$) .

0,5 — ج – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

0,25 — د- بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ).

0,75 — 3) أ- بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و بين أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

0,25 — ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

0, 5 — ج- بين أن $y = x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 .

0, 5 — 4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$ وأن $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ (نقبل أن $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

1 — 5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نقبل أن $I(e, e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) و نأخذ $e \approx 2{,}7$) .

0,5 — 6) أ- بين أن $H : x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $\ln : x \mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

ثم بين أن: $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

0,75 — ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

0,5 — ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

III- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

0,75 — 1) بين أن $1 \le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II-3) أ-) .

0,5 — 2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

0,75 — 3) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الصفحة 1/2

C: RS22

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة الاستدراكية 2008-
الموضوع

المـــادة:	الرياضيات	المعامل:	7
الشعـــب(ة):	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	مدة الإنجاز:	3س

(يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة)

التمرين الأول (3 ن)

1 | 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$

2) نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a=4+i$ و $b=8+3i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Ω التي لحقها هو $\omega=1+2i$ وزاويته هي $\frac{3\pi}{2}$.

0,75 | أ- بين أن : $z'=-iz-1+3i$

0,5 | ب- تحقق من أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$.

0,75 | ج- بين أن : $b-c=2(a-c)$ ثم استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية .

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستوى (P) الذي معادلته هي $x+2y+z-1=0$ والفلكة (S) التي معادلتها هي : $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$

0,75 | 1) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $I(2,3,-1)$ وأن شعاعها هو 3 .

0,5 | 2) أ- بين أن مسافة النقطة I عن المستوى (P) هي $\sqrt{6}$.

0,75 | ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها هو $\sqrt{3}$.

0,5 | 3) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من I و العمودي على (P) .

0,5 | ب - بين أن مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(1,1,-2)$.

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق .

1 | 1) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء ؟

1 | 2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$.

1 | 3) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟

التمرين الرابع (3 ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+3}$ لكل n من IN .

1 — 1) بين أن : $u_n > 1$ لكل n من IN .

2) نضع : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ لكل n من IN .

1 — أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

1 — ب- بين أن : $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$ لكل n من IN ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

مسألة (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي : $g(x) = e^{2x} - 2x$.

1 — 1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR ثم بين أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$.

0,75 — 2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من IR (لاحظ أن $g(0)=1$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0,5 — 1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

0,25 — ب– تحقق من أن $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من IR^* .

0, 5 — ج– بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$) .

0,25 — د– استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $-\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .

0,75 — 2) أ– لكل x من $]0,+\infty[$ ، تحقق من أن $1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ وأن $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$.

0,5 — ب– استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$) .

0,5 — ج– بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0,75 — د– بين أن : $f(x) - 2x \le 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ واستنتج أن (C) يوجد تحت (D) على المجال $]0,+\infty[$.

0,75 — 3) أ– بين أن : $f'(x) = \dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من IR .

0,5 — ب– ادرس إشارة $f'(x)$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

1 — 4) أنشئ (D) و (C) في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف) .

المـــادة:	الرياضيات	المعامل:	7
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	مدة الإنجاز:	3

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة .

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(-2,2,8)$ و $B(6,6,0)$ و $C(2,-1,0)$ و $D(0,1,-1)$ و (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

0.75 (1 حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ واستنتج أن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OCD).

0.5 (2 تحقق من أن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2,4,4)$ وشعاعها 6 .

0.5 (3 أ- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (OCD) .

0.5 ب- استنتج أن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

0.75 ج- تحقق من أن : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ ثم استنتج أن النقطة O هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (OCD) .

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1 (1 اكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين العقديين a و b .

(2 نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

0.75 أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R .
بين أن : $z'=bz$

0.5 ب- تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

0.75 (3 بين أن : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\ [2\pi]$ ثم حدد عمدة للعدد العقدي c .

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و4 كرات سوداء و5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وتآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

1.5 (1 نعتبر الحدثين التاليين :
A :" الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " و B :" الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى ".
بين أن : $P(A)=\frac{3}{44}$ و $P(B)=\frac{3}{11}$.

(2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها .

0.25 أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

1.25 ب- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (2 ن)

نضع : $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}dx$ و $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)dx$.

1) أ- تحقق من أن : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ لكل عدد حقيقي x يخالف -3 . — 0.25

ب- بين أن : $I = 1 - 3\ln 2$. — 0.75

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $J = -I$. — 1

مسألة (9 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I) 1) تحقق من أن : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ لكل x من $I\!R$ ثم استنتج أن مجموعة تعريف الدالة f هي $I\!R$ وأن : $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$ $(\forall x \in I\!R)$. — 0.75

2) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم بين أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ و أول هذه النتيجة هندسيا . — 0.75

3) أ- بين أن : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ لكل x من $I\!R$ وتحقق من أن $f'(0) = 0$. — 1

ب- ادرس إشارة $\sqrt{e^x} - 1$ على $I\!R$ واستنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0, +\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty, 0]$. — 1

4) أ- تحقق من أن : $f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$ $(\forall x \in I\!R)$. — 0.25

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. — 0.5

5) أ- تحقق من أن : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ لكل x من $I\!R$. — 0.25

ب- ادرس إشارة كل من $\sqrt{e^x} - 2$ و $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ على $I\!R$. — 0.5

ج-استنتج أن : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$ لكل x من المجال $[0, \ln 4]$. — 0.25

د- بين أن : $f(x) \le x$ لكل x من المجال $[0, \ln 4]$. — 0.5

6) أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما أصغر من -1 و أفصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب ونأخذ $\ln 4 \simeq 1,4$) . — 0.75

II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $I\!N$.

يمكنك في ما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f .

1) بين أن : $0 \le u_n \le \ln 4$ لكل n من $I\!N$. — 0.75

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . — 0.75

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها . — 1

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2009
الموضوع

C:RS22

المــادة:	الرياضيات	المعامل:	7
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	مدة الإنجاز:	3

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطة $A(2,2,-1)$ و المستوى (P) الذي معادلته هي $2x+y+2z-13=0$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,0,1)$ وشعاعها 3 .

0.75 1) أ- بين أن $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S) وتحقق من أن A تنتمي إلى (S).

0.75 ب- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن المستوى (P) مماس للفلكة (S).

2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P) .

0.75 أ- بين أن $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) و أن $(6,-6,-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$.

0.75 ب- احسب $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ ثم استنتج أن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في A .

التمرين الثاني (3 ن)

1 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$.

0.5 أ- احسب $\dfrac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية .

0.5 ب- بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة P صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته $\dfrac{3}{2}$.

1 ج- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\dfrac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\dfrac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)$ وأن $PA=\sqrt{2}\,PD$.

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على سبع كرات سوداء و كرتين بيضاوين. (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)
نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين.

0.5 1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

1.5 2) بين أن : $P(X=0)=\dfrac{1}{36}$ و $P(X=1)=\dfrac{7}{18}$.

1 3) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع (3 ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1+4u_n}{7-2u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1 — 1) تحقق من أن $1-u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم بين بالترجع أن $1-u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) نضع : $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1 — أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

1 — ب- بين أن : $u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ لكل n من $\mathbb{N}$ واستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الخامس (2 ن)

1 — 1) حدد الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$ على $\mathbb{R}$ وتحقق من أن : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009} dx = \frac{1}{2010}$.

1 — 2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3 - 2$.

التمرين السادس (6 ن)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 — 1) أ- تحقق من أن : $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

1 — ب- بين أن الدالة f زوجية وأن $f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

1 — ج- بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ ثم استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0.5 — 2) بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0,+\infty[$.

1 — 3) أ- بين أن : $f'(x) = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ وتحقق من أن : $f'(0) = 0$.

0.5 — ب- بين أن : $e^{4x} - 1 \geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم استنتج أن $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

0.5 — ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$

1 — 4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب) .

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(-1,0,3)$ و $B(3,0,0)$ و $C(7,1,-3)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$.

1 | **1)** بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ واستنتج أن $3x+4z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0.5 | **2)** بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها 5 .

3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC) .

0.5 | أ – بين أن : $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases} \quad (t\in I\!R)$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

1 | ب – بين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في النقطتين $E(6,1,4)$ و $F(0,1,-4)$.

التمرين الثاني (3 ن)

1 | **1)** حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2-6z+10=0$.

2) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3-i$ و $b=3+i$ و $c=7-3i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

0.5 | أ – بين أن : $z'=iz+2-4i$.

0.25 | ب – تحقق من أن لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هو $c'=5+3i$.

1.25 | ج – بين أن : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ ثم استنتج أن المثلث BCC' قائم الزاوية في B و أن $BC=2BC'$.

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على عشر كرات خمس كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين
(لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق .

1 | **1)** نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " و B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل " .

بين أن $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{41}{42}$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

0.25 | أ – تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3 .

1 | ب – بين أن $P(X=2)=\frac{3}{10}$ و $P(X=0)=\frac{1}{6}$.

0.75 | ج – حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n}$ لكل n من $I\!N$.

0.75 **1)** بين بالترجع أن : $u_n > 1$ لكل n من $I\!N$.

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ لكل n من $I\!N$.

1 أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ واستنتج أن $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $I\!N$.

0.75 ب – بين أن $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

0.5 **3)** احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ حيث (w_n) هي المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $w_n = \ln(u_n)$ لكل n من $I\!N$.

التمرين الخامس (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

0.5 **1)** بين أن : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من $I\!R$.

0.5 **2)** بين أن الدالة g تزايدية على المجال $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ وتناقصية على المجال $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

0.5 **3)** أ– بين أن $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{2}{e}$ ثم تحقق من أن $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0$.

0.25 ب – استنتج أن : $g(x) > 0$ لكل x من $I\!R$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$.

1 **1)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$) .

0.75 **2)** بين أن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $I\!R$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $I\!R$.

0.75 **3)** أ – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ واستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

0.5 ب – احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ واستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

0.5 ج – حدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (C) ثم بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ و فوق المستقيم (Δ) على المجال $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

0.25 **4)** أ – بين أن $y = x$ هي معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O .

0.25 ب – بين أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف أفصولها $-\dfrac{1}{2}$ (تحديد أرتوب نقطة الانعطاف غير مطلوب) .

0.75 **5)** أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 **6)** أ – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$.

0.5 ب – احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (T) المماس للمنحنى (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقط $A(0,-2,0)$ و $B(1,1,-4)$ و $C(0,1,-4)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0.5 — 1) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,2,3)$ و أن شعاعها هو 5 .

1 — 2) أ – بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ واستنتج أن $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0.5 — ب – احسب $d\left(\Omega,(ABC)\right)$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .

3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC).

0.5 — أ – بين أن : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \quad (t\in I\!R) \\ z=3+3t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

0.25 — ب – بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(1,-2,0)$.

0.25 — ج – تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S) .

التمرين الثاني (3 ن)

1 — 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.

0.5 — أ – بين أن $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

0.25 — ب – تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R .

0.75 — ج – بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي .

0.5 — د – استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد : 1 و 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3
(لا يمكن التمييز بينها باللمس) .
نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

1.25 — 1) ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 " .
و B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 " .
بين أن $P(A)=\frac{3}{28}$ وأن $P(B)=\frac{13}{28}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

0.25 — أ – حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

0.75 — ب – بين أن : $P(X=1)=\frac{15}{28}$.

0.75 — ج – أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من $I\!N$.

0.5 1) بين أن : $u_n>0$ لكل n من $I\!N$.

0.75 2) بين أن : $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $I\!N$.

0.5 3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأنها متقاربة .

0.75 4) أ- بين بالترجع أن : $u_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من $I\!N^*$.

0.5 ب- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الخامس (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.

0.25 1) أ- تحقق من أن $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.5 ب – بين أن : $g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.25 2) أ – تحقق من أن $\frac{3x^2+3x+2}{x}>0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.5 ب – استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$.

0.5 3) أ – بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ وأنها تزايدية على $[1,+\infty[$.

0.5 ب - استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)>0$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$) .

1 1) بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$.

0.5 2) أ - بين أن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

0.75 ب - بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ ثم أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (نذكر أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$) .

0.5 ج - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0.5 3) بين أن $y=3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$.

0.75 4) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) .

1 5) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن: $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$ (ضع : $u'(x)=\frac{1}{x^2}$ و $v(x)=\ln x$) .

0.5 ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$.

الثانية بكالوريا علوم تجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	تصحيح الامتحان الوطني الموحد الدورة العادية للبكالوريا 2008	الأستاذ : محمد الحيان الثانوية التأهيلية محمد السادس بورزازات

التمريـــــن الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين $A\left(0,-1,1\right)$ و $B\left(1,-1,0\right)$

والفلكة $\left(S\right)$ التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$.

1. لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+y^2+\left(z-2\right)^2=\sqrt{3}^2$.

إذن $\left(S\right)$ فلكة مركزها $\Omega\left(1,0,2\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$. ولدينا : $0^2+\left(-1\right)^2+1^2-2\times0-4\times1+2=0$ ، إذن $A\in\left(S\right)$.

2. لدينا : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، ومنه فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

وبالتالي فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\left(1,1,1\right)$.

3. لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\left(1,1,1\right)$ متجهة منظمية على المستوى $\left(OAB\right)$. إذن معادلة المستوى $\left(OAB\right)$ تكتب على شكل $x+y+z+d=0$ ، وبما أن $O\in\left(OAB\right)$ ، فإن $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(OAB\right)$.

لنحسب مسافة النقطة A عن المستوى $\left(OAB\right)$: $d\left(\Omega,\left(OAB\right)\right)=\dfrac{\left|1+0+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$.

وعليه فإن المستوى $\left(OAB\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$ في النقطة A على اعتبار أن $A\in\left(S\right)$ و $A\in\left(OAB\right)$.

التمريـــن الثانـــــي:

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$. مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=\left(-3\right)^2-1\times34=9-34=-25=\left(5i\right)^2$.

وبالتالي فإن للمعادلة السابقة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{-\left(-3\right)+5i}{1}=\boxed{3+5i} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{-\left(-3\right)-5i}{1}=\boxed{3-5i}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\left\{3-5i \quad , \quad 3+5i\right\}$.

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$. لتكن النقطة $M'\left(z'\right)$ صورة النقطة $M\left(z\right)$ بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$.

أ- لدينا : $M'=T\left(M\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow z'=z+aff\left(\vec{u}\right)\Leftrightarrow\boxed{z'=z+4-2i}$

وبما أن : $a+4-2i=3+5i+4-2i=7+3i=c$ ، فإن: $C=T\left(A\right)$ أي C هي صورة A بالإزاحة T .

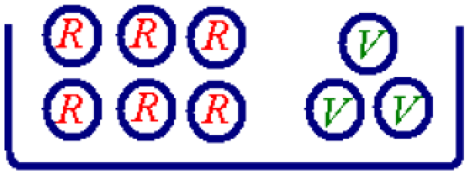
ب- لدينا : $\dfrac{b-c}{a-c}=\dfrac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i}=\dfrac{-4-8i}{-4+2i}=\dfrac{2i\left(-4+2i\right)}{-4+2i}=\boxed{2i}$.

جـ- لدينا : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i=\left[2,\dfrac{\pi}{2}\right]$. إذن :

$$\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \quad \left[2\pi\right]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad \left[2\pi\right]$$

ومنه فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C ولدينا : $\dfrac{CB}{CA}=\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=2$. إذن : $\boxed{BC=2AC}$.



التمرين الثالـــــــث :

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحـــــــد (الترتيب غير مهم) ثلاث كرات من الصندوق. تثبيت الصنف : التآليفـــــــات : C_n^p .

أ- احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء RRV هو : $\frac{C_6^2\times C_3^1}{C_9^3}=\frac{15\times 3}{84}=\boxed{\frac{15}{28}}$.

ب- طريقة 1 : احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل RRV أو RVV أو VVV هو :

$$\frac{C_6^2C_3^1+C_6^1C_3^2+C_3^3}{C_9^3}=\frac{15\times 3+6\times 3+1}{84}=\boxed{\frac{16}{21}}.$$

طريقة 2 : نضع الحدث A: « الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل » .

الحدث المضاد للحدث A هو : $\overline{A}$: « الحصول على ثلاث كرات حمراء - RRR - ».

لدينا : $p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{C_6^3}{C_9^3}=1-\frac{20}{84}=\frac{64}{84}=\boxed{\frac{16}{21}}$.

2. نسحب عشوائيا بالتتابـــــــع وبدون إحـــــلال (الترتيب مهم والتكرار غير وارد) ثلاث كرات من الصندوق.

تثبيت الصنف : الترتيبـــــــات بـــــــدون تكــــــرار : A_n^p .

احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو : $\frac{A_6^3}{A_9^3}=\frac{120}{504}=\boxed{\frac{5}{21}}$.

التمرين الرابـــــع :

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$.

1. أ- ليكن $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا : $g'(x)=(x-2\ln x)'=1-\frac{2}{x}=\boxed{\frac{x-2}{x}}$.

ب- نعلم أن : $g'(x)=\frac{x-2}{x}$: $\forall x\in]0,+\infty[$. إذن إشارة $g'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة $x-2$.

ولدينا : $x\in]0,2]\Rightarrow x\le 2\Rightarrow x-2\le 0$ و $x\in[2,+\infty[\Rightarrow x\ge 2\Rightarrow x-2\ge 0$. إذن :

g تناقصية على المجال $]0,2]$ وتزايدية على المجال $[2,+\infty[$. خلاصة :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(2)=2(1-\ln 2)$	$\nearrow$	

2. بما أن : $e>2 \Rightarrow 1>\ln 2 \Rightarrow 1-\ln 2>0$ ، فإن : $g(2)=2(1-\ln 2)>0$.

ولدينا : $g(2)=2(1-\ln 2)$ قيمة دنوية مطلقة للدالة g على المجال $]0,+\infty[$ عند العدد 2 . ومنه فإن:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad g(x) \geq g(2)>0$$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$.

1. لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$.

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=0}$.

2. أ- نضع : $t=\sqrt{x}$. إذن : $x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. وحيث أن $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t}=0$ ، فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t^2)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{1}$.

جـ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ln x)^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$ ، وحسب السؤال السابق ، فإن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

د- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad f(x)-x=-(\ln x)^2\leq 0$. إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ).

3. أ- ليكن $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا : $f'(x)=\left(x-(\ln x)^2\right)'=1-2\ln'(x)\ln x=1-\frac{2\ln x}{x}=\frac{x-2\ln x}{x}=\boxed{\frac{g(x)}{x}}$.

وحسب إشارة $g(x)$ في الجزء الأول ، لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad f'(x)>0$. إذن f تزايدية على $]0,+\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

جـ- معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow \boxed{y=x}$.

4. لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. إذن: f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال J حيث :

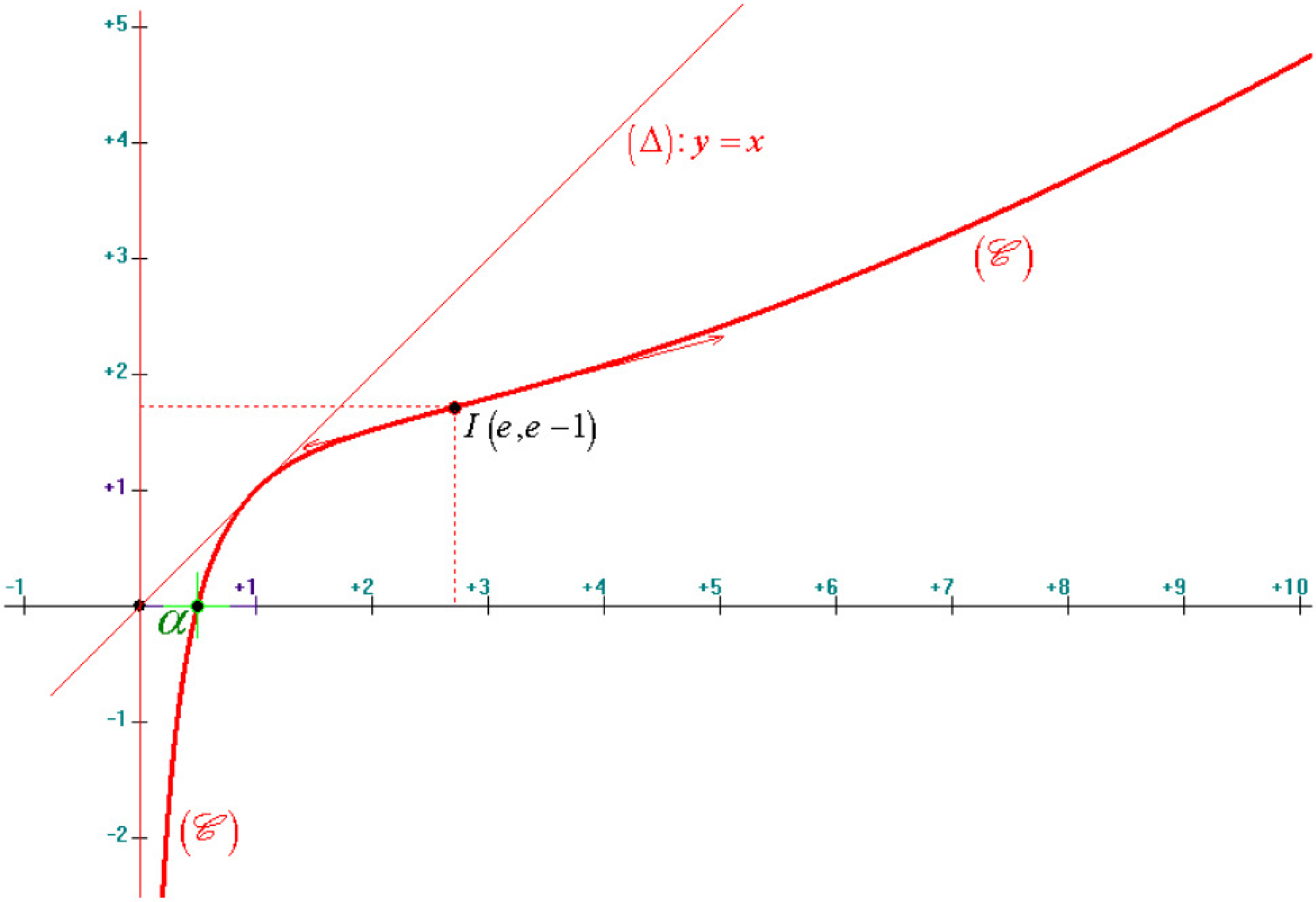
$J=f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$ نحو المجال $I=\left]0,+\infty\right[$ ، وبما أن $0\in J$ ، فإن

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I=\left]0,+\infty\right[$.

وبما أن : $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-(\ln 2)^2>0$) لأنه حسب المعطيات $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$).

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، لدينا : $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$: $\alpha\approx 0,4948664145$. $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$. $e\approx 2,7$.



6. أ- لدينا : $H'(x)=(x\ln x-x)'=x'\ln x+x\ln' x-1=\ln x$: $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$. إذن : $H:x\mapsto x\ln x-x$

هي دالة أصلية للدالة $\ln:x\mapsto \ln x$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، ولدينا :

$$\int_1^e \ln(x)dx=\left[H(x)\right]_1^e=H(e)-H(1)=0-(-1)=\boxed{1}$$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء، لدينا :

$$\int_1^e \ln(x)^2dx=\int_1^e H'(x)\ln(x)dx=\left[H(x)\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e H(x)\ln'(x)dx$$

$$=H(e)\ln(e)-H(1)\ln(1)-\int_1^e\frac{x\ln x-x}{x}dx$$

$$=-\int_1^e(\ln(x)-1)dx=-\int_1^e\ln(x)dx+(e-1)=\boxed{e-2}$$

- حسب السؤال أعلاه -

جـ- مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_1^e |f(x)-x|dx=\int_1^e (x-f(x))dx=\int_1^e (\ln x)^2 dx=\boxed{e-2}\approx 0,7(u.a.)$$

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. لنبين بالترجع أن : $1\le u_n\le 2 \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=2$ ، إذن : $1\le u_0\le 2$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$.

نفترض أن : $1\le u_n\le 2$.

لنبين أن : $1\le u_{n+1}\le 2$:

نعلم أن f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$. إذن : $1\le u_n\le 2\Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(2)\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 2$

لأن : $f(2)-2=-(\ln 2)^2\le 0\Rightarrow f(2)\le 2$.

✓ وبالتالي فإن : $1\le u_n\le 2 \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

2. ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=-(\ln(u_n))^2\le 0$. إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.

3. بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة. ولدينا :

✓ f دالة متصلة على المجال $[1,2]$.

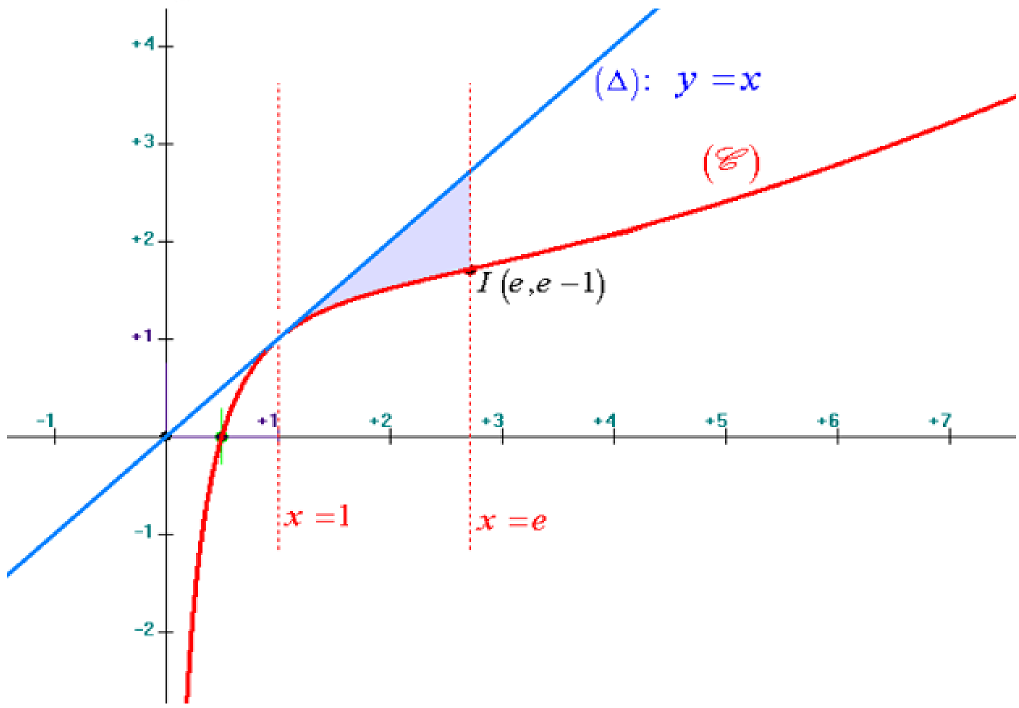
✓ f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,2]$. إذن : $f([1,2])=[f(1),f(2)]\subset[1,2]$ ، لأن : $f(2)\le 2$.

✓ $u_0=2\in[1,2]$.

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l .

حسب مصاديق التقارب ، لدينا : $f(l)=l$ و $l\in[1,2]$.

ولدينا : $f(l)=l\Leftrightarrow l-(\ln(l))^2=l\Leftrightarrow \ln(l)=0\Leftrightarrow l=1$. وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=1}$.



تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2008

المادة : الرياضيات
الشعب : شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم و التكنولوجيات بمسلكيها
المعامل : 7
مدة الإنجاز : 3 س

تمرين 1:

1. حل المعادلة $z^2-8z+17=0$ في $\mathbb{C}$:
مميز المعادلة Δ هو :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2-4\times17\\ &=64-68\\ &=-4=(2i)^2\end{aligned}$$

إذن حلا المعادلة $z^2-8z+17=0$ هما :

$$z_1=\frac{-(-8)+2i}{2}=4+i \quad \text{و} \quad z_2=\overline{z_1}=4-i$$

2.أ- نبين أن $z'=-iz-1+3i$:

نضع الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه w وزاويته $\frac{3\pi}{2}$:

$$z'-w=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-w)$$

نعلم أن : $e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$

إذن المتساوية السابقة تصبح :

$$z'-(1+2i)=-i(z-(1+2i))$$

أي : $z'=-iz+i(1+2i)+(1+2i)$

$$=-iz+i-2+1+2i$$

ومنه $=-iz-1+3i$

أي أن : $z'=-iz-1+3i$

ب- التحقق من أن : c = -i
لدينا صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة C
إذن : $z'_A=z_C$

ومنه فإن : $z_C=-iz_A-1+3i$
يعني أن : $=-ia-1+3i$
يعني أن : $=-i(4+i)-1+3i$
يعني أن : $=-4i+1-1+3i=-i$
أي أن : $z_C=-i$

ج- نبين أن $b-c=2(a-c)$ ، واستنتاج أن النقط A و B و C مستقيمية :

وبما أن : $b-c=8+3i+i=8+4i \qquad (1)$

و : $2(a-c)=2(4+i+i)=8+4i \qquad (2)$

من (1) و (2) نجد $b-c=2(a-c)$

أي أن : $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CA}$ وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

التمرين 2:

1. مركز (S) وشعاعها :

تكافئ معادلة الفلكة (S) :

$$x^2-4x+y^2-6y+z^2+2z+5=0$$

يعني أن : $(x-2)^2-4+(y-3)^2-9+(z+1)^2-1+5=0$

يعني أن : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$

وبالتالي فإن مركز (S) هو النقطة $I(2,3,-1)$ وشعاعها هو : $R=\sqrt{9}=3$

2. أ- نبين أن مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$:

$$d(I,(p))=\frac{|x_1+2y_1+z_1-1|}{\sqrt{1^2+2^2-1^2}}$$

$$=\frac{|2+2\times3-1-1|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

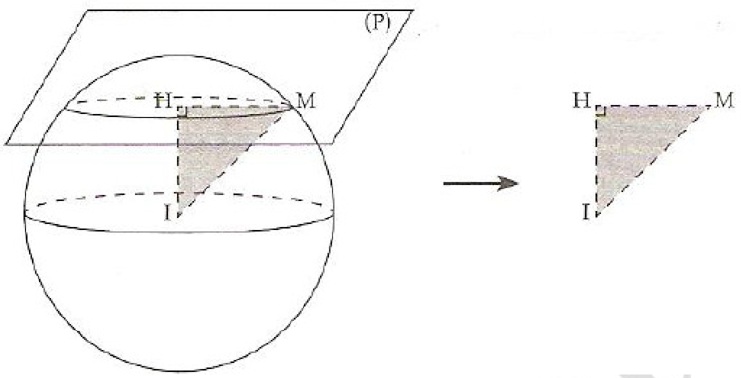
ومنه فإن : مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$

ب- الإستنتاج :

بما أن : $3\succ\sqrt{6}$ أي أن $d(I,(p))\prec R$ فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة Γ وشعاعها r بحيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

$$=\sqrt{9-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$$



r شعاع الدائرة وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة لدينا : $d^2+r^2=R^2$ إذن : $r=\sqrt{R^2-d^2}$

3.أ- التمثيل البارامتري ل (D) :

بما أن المتجهة $\vec{n}=(1,2,1)$ منظمية على المستوى (P) فإنها (أي $\vec{n}$) متجهة موجهة للمستقيم (D)

وبالتالي فإن تمثيل بارامتري ل (D) يكتب كالتالي :

$$\begin{cases} x=x_1+t \\ y=y_1+2t \\ z=z_1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \qquad \text{أي} \qquad \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ب- نبين أن مركز الدائرة Γ هي النقطة $H(1,1,-2)$:

تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) هي مركز الدائرة Γ .

لتحديد إحداثياتها نعوض x و y و z في معادلة (p) فنجد : $(2+t)+2(3+2t)+(-1+t)-1=0$

يعني أن : $t+4t+t+2+6-1-1=0$

وبالتالي فإن : $6t=-6$

ومنه فإن : $t=-1$

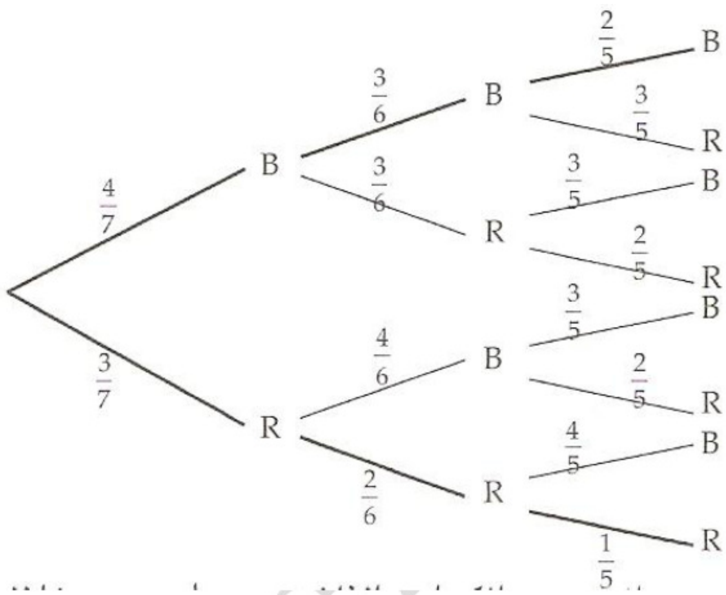
إذن إحداثيات H هي :

$$\begin{cases} x=2-1 \\ y=3-2 \\ z=-1-1 \end{cases}$$

ومنه فإن : $H(1,1,-2)$

تمرين 3:

يمكن استعمال شجرة الاختيارات كالتالي :



1. احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء :

يتحقق الحدث " الكرات الثلاث بيضاء " من خلال B-B-B– واحتماله هو جداء احتمالات فروعه

وبالتالي فإن : $P(BBB)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$

يعني أن : $P(BBB)=\frac{24}{210}$

أي أن : $P(BBB)=\frac{8}{70}$

1. نبين أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$:

الكرات الثلاث من نفس اللون يعني انها كلها بيضاء أو حمراء .

وبالتالي فإن احتمال هذا الحدث هو :

$$P(BBB)+P(RRR)=\frac{4\times3\times2}{7\times6\times5}+\frac{3\times2\times1}{7\times6\times5}=\frac{24+6}{7\times6\times5}=\frac{30}{7\times30}=\frac{1}{7}$$

أي أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$

3. احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل :

طريقة أولى :

الحدث المضاد للحدث كرة واحدة على الأقل بيضاء هو جميع الكرات حمراء. احتمال هذا الحدث هو :

$$1-P(RRR)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$

طريقة ثانية : كون الإمكانيات Ω حيث : $Card\,\Omega = 7\times 6\times 5$
عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة أولا بيضاء هو 4.
عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة ثانيا بيضاء هو 3.

عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة في المرة الثالثة بيضاء هو 2.
وبالتالي فإن احتمال الحدث BBB هو : $P(BBB) = \dfrac{4\times 3\times 2}{7\times 6\times 5}$
وبنفس الطريقة ننجز بقية الأسئلة .

تمرين 4:

1. نبين أن $u_{n+1} \succ 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$:
نستعمل البرهان بالترجع .
بما أن $u_0 = 2$
فإن $u_0 \succ 1$
نفترض أن $u_n \succ 1$ ولنبين أن $u_{n+1} \succ 1$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 = \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n + 3} = \frac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3}$$

حسب افتراض الترجع لدينا $u_n \succ 1$
إذن : $3(u_n - 1) \succ 0$
وبما أن $2u_n + 3 \succ 0$
فإن : $\dfrac{3(u_n - 1)}{2u_n + 3} \succ 0$
وبالتالي فإن : $u_{n+1} \succ 1$
إذن : $u_n \succ 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.أ- نبين أن v_n متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ، وكتابة v_n بدلالة n .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2u_n + 3}{5u_n}$$
$$= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{5u_n}$$
$$= \frac{3u_n - 3}{5u_n} = \frac{3}{5}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{3}{5}v_n$$

وبالتالي فإن $v_{n+1} = \dfrac{3}{5}v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ومنه :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

نعلم أن $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$

إذن : $v_n = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- نبين أن $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$:

$\Leftrightarrow v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$

يعني أن : $\dfrac{1}{u_n} = 1 - v_n$

أي أن : $u_n = \dfrac{1}{1-v_n}$

ومنه فإن : $u_n = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n} = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 \prec \dfrac{3}{5} \prec 1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{2} = 1$

مسألة

1.1 نحسب $g'(x)$ ، ثم نبين أن g تزايدية على $0,+\infty$ و تناقصية على $-\infty,0$:

لدينا : $g'(x) = \left(e^{2x}\right)' - \left(2x\right)' = 2e^{2x} - 2$

$= 2\left(e^{2x} - 1\right)$

وبما أن الدالة الأسية تزايدية على $\mathbb{R}$:

فإن : $x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow e^{2x} \geq e^0$

$\Rightarrow e^{2x} \geq 1$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

وبالتالي فإن g تزايدية على $0,+\infty$

وبنفس الطريقة : $x \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^0$

$\Rightarrow g'(x) \leq 0$

وبالتالي فإن g تناقصية على $-\infty,0$

2. استنتاج :

نستنتج من س.1. جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

كما أن g(0) قيمة دنوية ل g على $\mathbb{R}$.

إذن :

x	$+\infty$	0	$-\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘	1	↗

وبالتالي فإن : $g(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ومنه : $g(x) \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II – 1. أ- نبين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-2x)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-\lim_{x\to-\infty} 2x=0+\infty=+\infty$

وبالتالي : $\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}-2x)=+\infty$

(لأن $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ بوضع $X=e^{2x}-2x$) لكل x من $\mathbb{R}^*$:

ب- التحقق من أن $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{x}=\frac{e^{2x}-2x}{x}\times\frac{\ln\left(e^{2x}-x\right)}{e^{2x}-2x}$$

$$=\left(\frac{e^{2x}}{x}-\frac{2x}{x}\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$

$$=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$

ج- نبين أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$

(نضع : $t=e^{2x}-2x$)

$t\to+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\times0=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2\times0=0$$

د- نبين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا :

النتيجة $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ تعني أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل.

2. أ-

حسب I .2 . لدينا: $g(x)\succ0$ $\quad\forall x\in\left]0,+\infty\right[$

ومنه فإن : $e^{2x}-2x\succ0$

أي أن : $\frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}}\succ0$

لأن $e^{2x}\succ0$ ومنه : $1-\frac{2x}{e^{2x}}\succ0$

ولدينا : $f(x)=\ln\left[e^{2x}\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\right]$

باستعمال النتائج التالية:

$\ln\left(a\times b\right)=\ln a+\ln(b)$

لكل a و b من $\left]0,+\infty\right[$

و $\ln\left(e^{t}\right)=t$ $\quad\forall t\in\mathbb{R}$

نجد :

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}\right)+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

$$f(x)=2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

ب- استنتاج :

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty \Rightarrow \lim\frac{2x}{e^{2x}}=0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=0$

وبالتالي فإن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

ج- نبين أن المستقيم الذي معادلته y = 2x مقارب مائل للمنحنى(C) بجوار $+\infty$:

بما أن : $\forall x\in\ 0,+\infty \quad f(x)-2x=\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\ f(x)-2x\ =0$

وبالتالي فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (D) معادلته : y = 2x

د- نبين أن $f(x)-2x\le 0$ لكل x من $0,+\infty$:

بما أن: $\forall x\in\ 0,+\infty\ \frac{2x}{e^{2x}}\ge 0$

فإن : $\frac{-2x}{e^{2x}}\le 0$ أي أن : $\forall x\ge 0 \quad 1-\frac{2x}{e^{2x}}\le 1$

وبالتالي فإن : $\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\le 0$ (لأن $0\prec X\le 1\Rightarrow \ln X\le 0$)

إذن : $f(x)-2x\le 0 \quad \forall x\in\ 0,+\infty$ وهذا يعني أن (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $0,+\infty$

.2 أ- نبين أن $f\,'(x)=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\ln\ g(x)$

إذن : $f\,'(x)=\frac{g\,'(x)}{g(x)}=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

ب- دراسة إشارة f'(x) و جدول تغيرات f :

درسنا سابقا إشارة $2(e^{2x}-1)$ في I .1

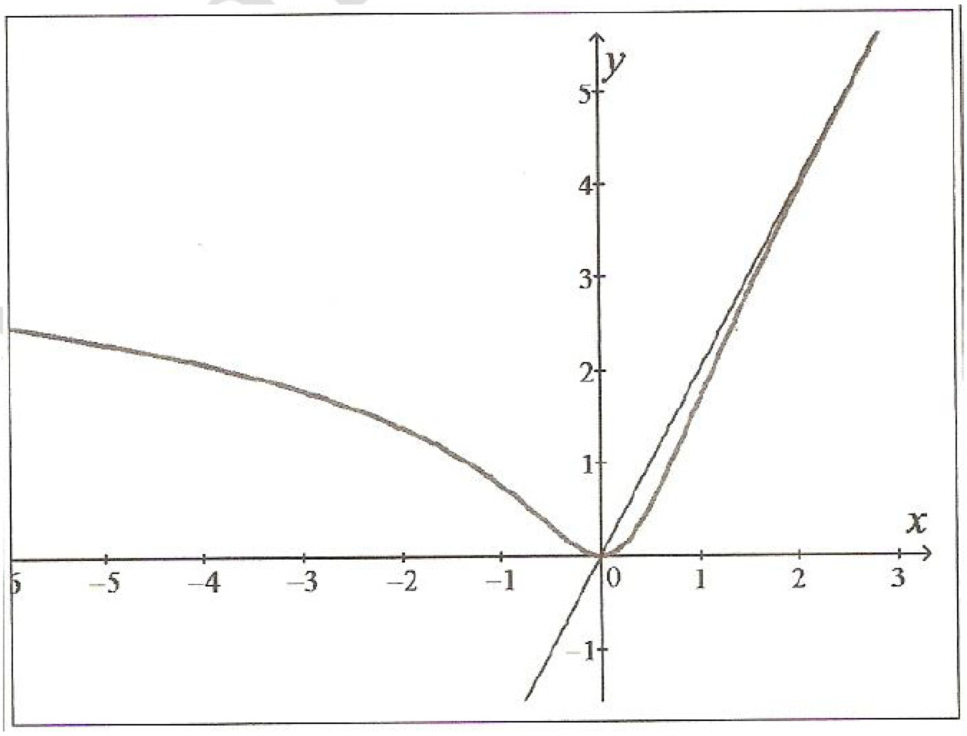
ونعلم أن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

إذن إشارة f'(x) هي نفسها إشارة g'(x)

جدول تغيرات f :

x	$+\infty$	0	$-\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4. إنشاء (D) و (C) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$:



الثانية بكالوريا علوم فيزيائيـــة الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض	تصحيــــــح الامتحان الوطنـــــي الموحـــــــد للبكالوريـــــــــــا الدورة العاديـــــة 2009	الأستاذ : محمد الحيان

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A\left(-2,2,8\right)$ و $B\left(6,6,0\right)$ و $C\left(2,-1,0\right)$ و $D\left(0,1,-1\right)$ و $\left(S\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}\ .\ \overrightarrow{MB} = 0$.

1. لدينا : $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. إذن مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ هو $\left(1,2,2\right)$.

لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى $\left(OCD\right)$. إذن :

$$M\in\left(OCD\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\left(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y+2z=0$$

وبالتالي فإن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(OCD\right)$.

2. لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$M\in\left(S\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}.\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(-2-x\right)\left(6-x\right)+\left(2-y\right)\left(6-y\right)+\left(8-z\right)\left(-z\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-8y-8z=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2+\left(z-4\right)^2=36$$

وبالتالي فإن $\left(S\right)$ فلكة مركزها $\Omega\left(2,4,4\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{36}=6$.

3. أ- مسافة النقطة $\Omega\left(2,4,4\right)$ عن المستوى $\left(OCD\right)$ هي : $d\left(\Omega,\left(OCD\right)\right)=\dfrac{\left|2+\left(2\times4\right)+\left(2\times4\right)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6=R$.

ب- بما أن $d\left(\Omega,\left(OCD\right)\right)=R$، فإن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$.

جـ- لدينا : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}.\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=\left(-2\times6\right)+\left(2\times6\right)+\left(8\times0\right)=-12+12=0$.

بما أن : $\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB}=-12+12=0$، فإن : $O\in\left(S\right)$. ولدينا : $O\in\left(OCD\right)$.

وبما أن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$، فإن O هي نقطة تماس الفلكة $\left(S\right)$ والمستوى $\left(OCD\right)$.

التمرين الثاني :

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ النقط A و B و C التي ألحاقها

على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

1. لدينا : $a=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]=\boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

و لدينا : $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1,\pi-\frac{\pi}{6}\right]=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]=\boxed{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

2. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R. لدينا :

$z'=R(z)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}z\Leftrightarrow \boxed{z'=bz}$.

ب- لتكن C'، صورة النقطة A بالدوران R، لحقها c'. لدينا :

$$c'=ba=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i+1=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i=c.$$

إذن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R.

3. حسب السؤال (2.ب-) ، لدينا : $c=ba$. إذن :

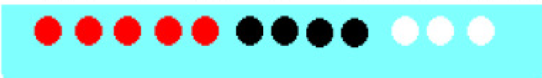
$$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \arg(ab) && [2\pi]\\ &\equiv \arg(a)+\arg(b) && [2\pi]\end{aligned}$$

وحسب السؤال 1. ، نستنتج أن :

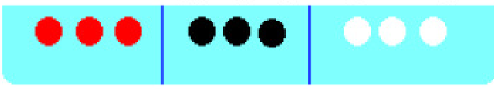
$$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \arg(a)+\arg(b) && [2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6} && [2\pi]\\ &\equiv \frac{7\pi}{12} && [2\pi]\end{aligned}$$

التمرين الثالث :

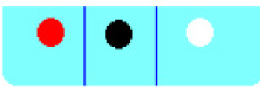
يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وتآنيا ثلاث كرات من الصندوق . وهذا يدل على السحب الآني (التأليفات) في حالة فرضية تساوي الاحتمال.



1. نعتبر الحدثين التاليين : A :« الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون »



و B :« الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى »



احتمال الحدث A هو : $p(A)=\dfrac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\dfrac{10+4+1}{220}=\dfrac{15}{220}=\boxed{\dfrac{3}{44}}$.

احتمال الحدث B هو : $p(B)=\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_{12}^3}=\dfrac{60}{220}=\boxed{\dfrac{3}{11}}$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 . ولدينا : $X(\Omega)=\{1,2,3\}$.

ب- لدينا : $p(X=1)=p(A)=\dfrac{3}{44}$ و $p(X=3)=p(B)=\dfrac{3}{11}$

و : $p(X=2)=1-\left(p(X=1)+p(X=3)\right)=1-\left(\dfrac{3}{44}+\dfrac{3}{11}\right)=1-\dfrac{15}{44}=\dfrac{29}{44}$

أو : $p(X=2)=\dfrac{C_3^2C_9^1+C_4^2C_8^1+C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=\dfrac{(3\times9)+(6\times8)+(10\times7)}{220}=\dfrac{145}{220}=\dfrac{29}{44}$

$\left(BB\overline{B} \text{ أو } NN\overline{N} \text{ أو } RR\overline{R} \right)$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_k	1	2	3
$p_k=p(X=x_k)$	$\dfrac{3}{44}$	$\dfrac{29}{44}$	$\dfrac{3}{11}$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_kp_k=\left(1\times\frac{3}{44}\right)+\left(2\times\frac{29}{44}\right)+\left(3\times\frac{3}{11}\right)=\frac{97}{44}\approx 2,2$$

التمرين الرابع :

نضع : $I=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}\,dx$ و $J=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx$.

1. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$. لدينا : $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+3-3}{x+3}=1-\dfrac{3}{x+3}$.

ب- حساب التكامل I :

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=\int_{-2}^{-1}1-\frac{3}{x+3}dx=\left[x-3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}=(-1-3\ln2)-(-2-3\ln1)=\boxed{1-3\ln2}$$

2. حساب التكامل J :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx=\int_{-2}^{-1}x'\ln(2x+6)\,dx\\
&= \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}x\left(\ln(2x+6)\right)'dx\\
&= -\ln4+2\ln2-\int_{-2}^{-1}\frac{2}{2x+6}\,dx\\
&= -\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x+3}\,dx\\
J &= -I = -1+3\ln2
\end{aligned}$$

التمرين الخامـــــــس :

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ ، و ليكن $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1. ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

✓ $e^{2x}-2\sqrt{e^x}+2=e^{2x}-2\sqrt{e^x}+1+1=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$.

✓ **حيز تعريف الدالة f** : بما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2x}-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\ >\ 0$ ، فإن :

$$\mathscr{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^x-2\sqrt{e^x}+2>0\right\}=\mathbb{R}.$$

✓ لكل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $e^x-2\sqrt{e^x}+2>0\Rightarrow\dfrac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}>0\Rightarrow 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}>0$. إذن :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0.$$

2. لدينا :

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=+\infty$ ، لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1=+\infty \text{ و } \lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty.$$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=2\ln 2=\boxed{\ln 4}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x=0$ ، ومنه نستنتج أن المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلته : $y=\ln 4$.

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f'(x)=2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)'=2\frac{\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)'}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}=2\frac{2\left(\sqrt{e^x}-1\right)'\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}=2\frac{\cancel{2}\frac{e^x}{\cancel{2}\sqrt{e^x}}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

$$f'(x)=\boxed{\frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}}$$

ولدينا : $f'(0)=\dfrac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0}-1\right)}{\left(\sqrt{e^0}-1\right)^2+1}=\boxed{0}$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^x}-1=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{e^x}+1}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة e^x-1. ولدينا :

$x\geq 0\Rightarrow e^x\geq 1\Rightarrow e^x-1\geq 0$ و $x\leq 0\Rightarrow e^x\leq 1\Rightarrow e^x-1\leq 0$. ومنه نستنتج أن :

$$\forall x\in\left[0,+\infty\right[\ :\ \sqrt{e^x}-1\geq 0 \text{ و } \forall x\in\left]-\infty,0\right]\ :\ \sqrt{e^x}-1\leq 0.$$

بما أن $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}\ :\ \forall x\in\mathbb{R}$ ، فإن إشارة $f'(x)$ على هي إشارة $\sqrt{e^x}-1$.

وعليه فإن : $\forall x\in[0,+\infty[\ :\ f'(x)\geq 0$ و $\forall x\in]-\infty,0]\ :\ f'(x)\leq 0$.

إذن : f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=2\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right)=2\ln\left(e^x\right)+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

$$f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

ب- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=\boxed{0}$ ، فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$.

5. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)=e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2=e^x-3\sqrt{e^x}+2$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^x}-2=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x}+2}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x}-2$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة e^x-4 .

ولدينا : $x=\ln 4\ \Leftrightarrow\ e^x=4\ \Leftrightarrow\ e^x-4=0$. ومنه فإن :

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$	0	$+$	

ونعلم إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ حسب السؤال (3. ب-) . إذن :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$		$+$		$-$		$+$	

جـ- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ ، لدينا :

$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$$

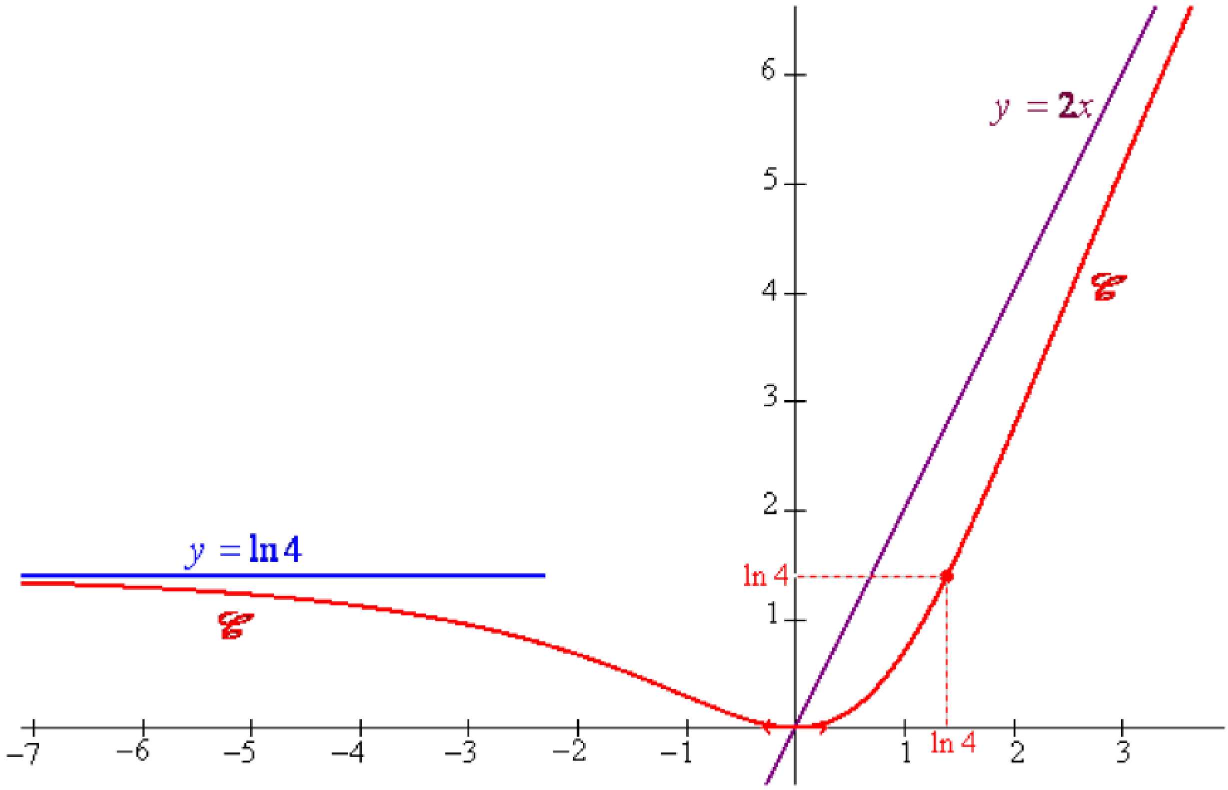
د- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ ، لدينا :

$$e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\ln\left(\sqrt{e^x}\right)\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq x \ \Rightarrow f\left(x\right)\leq x$$

إذن : $f\left(x\right)\leq x$: $\forall x\in\left[0,\ln 4\right]$.

6. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$:



II. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. لدينا :

✓ من أجل $n=0$ ، $u_0=1$. إذن : $0\leq u_0\leq\ln 4$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعترض أن : $0\leq u_n\leq\ln 4$ ، ونبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq\ln 4$.

نعلم أن f تزايدية على المجال $\left[0,\ln 4\right]$. إذن :

$$0\leq u_n\leq\ln 4 \Rightarrow f\left(0\right)\leq f\left(u_n\right)\leq f\left(\ln 4\right) \Rightarrow 0\leq u_{n+1}\leq\ln 4.$$

✓ وبالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 0 \leq u_n \leq \ln 4$.

2. نعلم أن : $\forall x \in [0,\ln 4] \ : \ f(x) \leq x$ ، وأن : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leq u_n \leq \ln 4$.

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \leq u_n$. أي : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_{n+1} \leq u_n$.

وبالتالي فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 . إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

وبما أن :

- f متصلة على المجال $[0,\ln 4]$.
- f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,\ln 4]$.

إذن : $f([0,\ln 4]) = [f(0), f(\ln 4)] = [0,\ln 4]$.

- $u_0 = 1 \in [0,\ln 4]$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l \in \mathbb{R}$.

فإن النهاية l تحقق الشرطان التاليان : $f(l) = l$ و $l \in [0,\ln 4]$.

ولدينا :

$$\begin{aligned}
f(l) = l \ &\Leftrightarrow \ 2\ln\left(e^{l} - 2\sqrt{e^{l}} + 2\right) = l \\
&\Leftrightarrow \ \ln\left(e^{l} - 2\sqrt{e^{l}} + 2\right) = \frac{l}{2} \\
&\Leftrightarrow \ e^{l} - 2\sqrt{e^{l}} + 2 = \sqrt{e^{l}} \\
&\Leftrightarrow \ e^{l} - 3\sqrt{e^{l}} + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \ \left(\sqrt{e^{l}} - 1\right)\left(\sqrt{e^{l}} - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ \sqrt{e^{l}} = 1 \ \text{أو} \ \sqrt{e^{l}} = 2 \\
&\Leftrightarrow \ e^{l} = 1 \ \text{أو} \ e^{l} = 4 \\
&\Leftrightarrow \ l = 0 \ \text{أو} \ l = \ln 4
\end{aligned}$$

وبما أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ، فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_n \leq u_0 = 1$. إذن : $l \leq 1$. ومنه فإن : $l = 0$

خلاصة :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2009 -

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم و التكنولوجيات بمسلكيها

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطة $A(2,2,-1)$ و المستوى (P) الذي معادلته هي $2x+y+2z-13=0$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,0,1)$ وشعاعها 3 .

1) أ- بين أن $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S) وتحقق من أن A تنتمي إلى (S).

الفلكة مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها 3 اذن معادلتها تكتب على شكل

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=9$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0}$$

و بما ان $2^2+2^2+(-1)^2-2\times 2-2\times(-1)-7=7-7=0$ فان $A\in(S)$

ب- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن المستوى (P) مماس للفلكة (S).

$$\boxed{d(\Omega,(P))=\frac{|2\times1+0+2\times1-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3}$$

2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P) .

أ- بين أن $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) و أن $(6,-6,-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$.

من معادلة المستوى واضح ان المتجهة $\vec{u}(2,1,2)$ منظمية عليه. و المستقيم (D) عمودي ايضا على المستوى.

نستنتج اذن ان المتجهة $\vec{u}(2,1,2)$ موجهة للمستقيم (D)

$$\begin{cases}\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)\\ \vec{u}(2,1,2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=6\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$$

$\boxed{\text{اذن } (6,-6,-3) \text{ هو مثلوث احداثيات } \overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}}$

ب- احسب $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ ثم استنتج أن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في A .

$$\boxed{\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3}$$

و نعلم ان $d(\Omega,(D))=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

مركز الفلكة يبعد عن المستقيم بقيمة الشعاع. اذن (D) مماس للفلكة (S)

التمرين الثاني (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$

المميز المختصر للمعادلة هو $\Delta'=(-3)^2-25=-16\neq0$

المعادلة تقبل اذن حلين مترافقين $\boxed{z_2=3-4i \text{ و } z_1=3+4i}$

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و D
التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$.

أ- احسب $\frac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية .

$$\boxed{\frac{d-c}{a-c}=\frac{5+6i-(2+3i)}{3+4i-(2+3i)}=\frac{3+3i}{1+i}=3}$$

نستنتج ان $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right)=Arg\frac{d-c}{a-c}=0\left[2\pi\right]$ اي ان النقط A و C و D مستقيمية

ب- بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة P صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته $\frac{3}{2}$

لدينا $h(A)=P\Leftrightarrow\overrightarrow{BP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow p=b+\frac{3}{2}(a-b)$

اذن $\Leftrightarrow p=3-4i+\frac{3}{2}(3+4i-3+4i)=3-4i+12i$

و منه $\Leftrightarrow\boxed{p=3+8i}$

ج- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)$

لدينا $\frac{d-p}{a-p}=\frac{5+6i-(3+8i)}{3+4i-(3+8i)}=\frac{2-2i}{-4i}=\frac{2i+2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

اذن $\boxed{\frac{d-p}{a-p}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

نستنتج $\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)=Arg\quad\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]}$

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على سبع كرات سوداء و كرتين بيضاوين. (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)
نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين.

1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

القيم التي ياخذها المتغير العشوائي هي
- 0 باعتبار سحب كرتين بيضاوين
- 1 باعتبار سحب كرة بيضاء و كرة سوداء
- 2 باعتبار سحب كرتين سوداوين

2) بين أن : $P(X=0)=\frac{1}{36}$ و $P(X=1)=\frac{7}{18}$.

$$\boxed{p(X=0)=\frac{A_2^2}{A_9^2}=\frac{2\times1}{9\times8}=\frac{1}{36}}$$

$$\boxed{p(X=1)=2\left(\frac{A_2^1\times A_7^1}{A_9^2}\right)=\frac{2\times2\times7}{9\times8}=\frac{7}{18}}$$

3) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

$$\boxed{p(X=2)=\frac{A_7^2}{A_9^2}=\frac{7\times6}{72}=\frac{7}{12}}$$

نلخص في الجدول التالي

X	0	1	2
$p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{12}$

$$\boxed{E(X)=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{7}{12}=\frac{14}{9}}$$

التمرين الرابع (3 ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}$ لكل n من IN .

1) تحقق من أن $1-u_{n+1}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل n من IN ثم بين بالترجع أن $1-u_n>0$ لكل n من IN .

لدينا $$\forall n\in\mathbb{N}: 1-u_{n+1}=1-\frac{1+4u_n}{7-2u_n}=\frac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n}=\frac{6-6u_n}{7-2u_n}$$

اذن $$\Leftrightarrow \boxed{\forall n\in\mathbb{N}: 1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{7-2u_n}}$$

و لدينا من اجل القيمة 0 $1-u_0=1\succ 0$ اي ان العبارة محققة

نفترض بالترجع صحتها حتى الدرجة n اي $1-u_n\succ 0$

ونبين انه ايضا لدينا $1-u_{n+1}\succ 0$

لدينا $$1-u_{n+1}=\frac{6(1-u_n)}{7-2u_n}$$

بما ان $1-u_n\succ 0$ فان $6(1-u_n)\succ 0$ و $7-2u_n\succ 0$

اي ان $1-u_{n+1}\succ 0$

خلاصة $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}: 1-u_n\succ 0}$$

2) نضع : $v_n=\dfrac{2u_n-1}{u_n-1}$ لكل n من IN .

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{6}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

لدينا $$\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1}=\frac{2\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}-1}{\dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}-1}=\frac{10u_n-5}{6u_n-6}=\frac{5}{6}\times\frac{2u_n-1}{u_n-1}$$

اذن $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\frac{5}{6}v_n}$$ اي ان هذه المتتالية هندسية اساسها $\dfrac{5}{6}$

و نكتب $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}: v_n=v_0\left(\frac{5}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$ $$\boxed{v_0=\frac{0-1}{0-1}=1}$$

$\Rightarrow$

ب- بين أن : $u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$ لكل n من IN واستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا $$\forall n\in\mathbb{N}: v_n=\frac{2u_n-1}{u_n-1}\Leftrightarrow v_n-2=\frac{2u_n-1}{u_n-1}-2=\frac{1}{u_n-1}$$

اذن $$\Leftrightarrow\boxed{\forall n\in\mathbb{N}: u_n-1=\frac{1}{v_n-2}\Leftrightarrow u_n=\frac{1}{v_n-2}+1=\frac{v_n-1}{v_n-2}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}}$$

و بما ان $0\prec\dfrac{5}{6}\prec 1$ فان $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=0$ و بالتالي $$\boxed{\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{0-1}{0-2}=\frac{1}{2}}$$

التمرين الخامس (2 ن)

1) حدد الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$ **على** $I\!R$ **وتحقق من أن :** $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}dx = \frac{1}{2010}$.

نعتبر الدالة $x \mapsto \quad \frac{1}{2010}\ (x^2-1)^{2010}+k; k \in \mathbb{R}$

لدينا $\left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}+k\right]' = 2010 \times \frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010-1} \times 2x = 2x(x^2-1)^{2009}$

اذن الدوال الاصلية للدالة $2x(x^2-1)^{2009}$ هي الدوال المعرفة بما يلي

$$\boxed{x \mapsto \quad \frac{1}{2010}\ (x^2-1)^{2010}+k; k \in \mathbb{R}}$$

من جهة اخرى لدينا

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}dx = \left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}+k\right]_1^{\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{2010}(2-1)^{2010}+k-\frac{1}{2010}(1-1)^{2010}-k = \frac{1}{2010}\end{aligned}}$$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3 - 2$.

لدينا $2x+1 = (x^2+x)'$

اذن $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = \left[(x^2+x)\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 (x^2+x)\frac{1}{x+1}dx$

اي ان $= 6\ln 3 - \int_0^2 xdx = 6\ln 3 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

و منه $= 6\ln 3 - 2$

التمرين السادس (6 ن)

لتكن f **الدالة العددية للمتغير الحقيقي** x **المعرفة على** $I\!R$ **بما يلي :** $f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

وليكن (C) **المنحنى الممثل للدالة** f **في معلم متعامد ممنظم** $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- تحقق من أن : $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ **لكل** x **من** $I\!R$.

لدينا $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = x\frac{e^{-2x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-2x}\left(e^{2x}+1\right)} = x\left(\frac{e^0-e^{-2x}}{e^0+e^{-2x}}\right)$

اذن $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)}$

ب- بين أن الدالة f **زوجية وأن** $f(x)-x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ **لكل** x **من** $I\!R$.

بما ان $Df = \mathbb{R}$ فان $\Rightarrow (x \in Df \Leftrightarrow -x \in Df)$

و لدينا $f(-x) = -x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right) = f(x)$

اذن الدالة f زوجية

ج – بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ ثم استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

بما ان $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ فان $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = +\infty\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = +\infty}$

من جهة اخرى $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \lim_{\substack{X\to-\infty \\ X=-2x}} \frac{Xe^{X}}{1+e^{X}} = \frac{0}{1+0} = 0}$

و لدينا $$f(x) - x = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

اذن $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$$

و منه المستقيم $y = x$ مقارب لمنحنى الدالة بجوار زائد ما لا نهاية

2) بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $]0,+\infty[$.

بما ان $\forall x \geq 0 : f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} \leq 0$ فان المنحنى تحت المقارب على هذا المجال

3) أ– بين أن : $f'(x) = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ وتحقق من أن : $f'(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \left[x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right]' = \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) + x\frac{\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right) - \left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right) - 2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}} \qquad \boxed{f'(0) = \frac{1-1+0}{4} = 0}$$

ب– بين أن : $e^{4x}-1 \geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

نعلم ان الدالة الأسية تزايدية قطعا اذن

$$\forall x \geq 0 : 4x \geq 0 \Rightarrow e^{4x} \geq e^{0} \Rightarrow e^{4x} \geq 1 \Rightarrow e^{4x} - 1 \geq 0$$

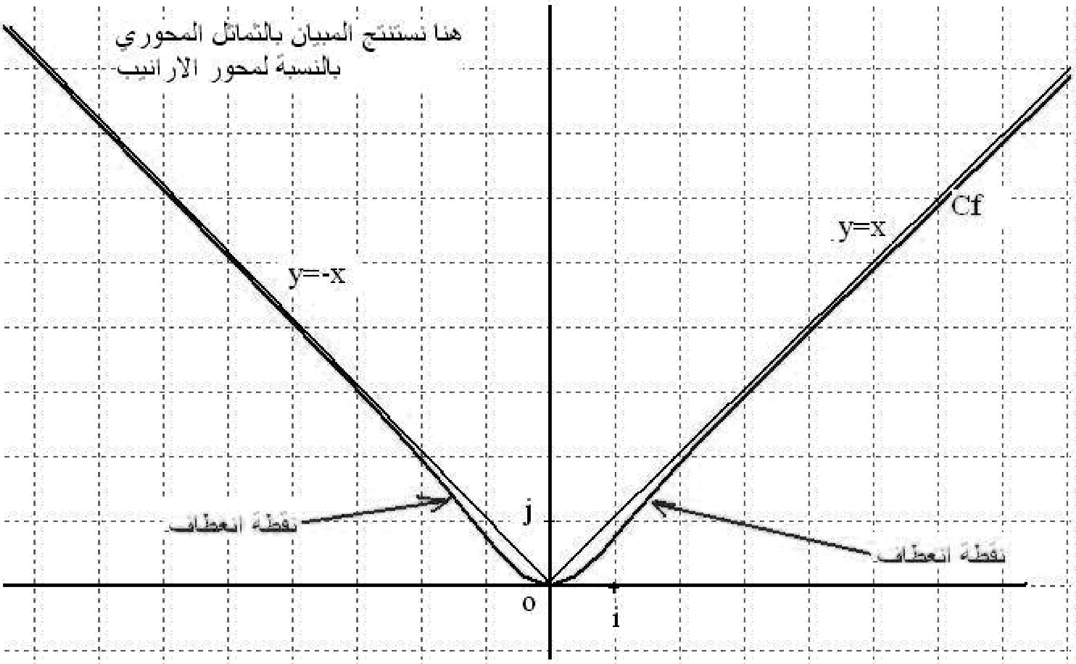
و لدينا $\forall x \geq 0 :\ 4xe^{2x} \geq 0$

اذن $\boxed{\forall x \geq 0 :\ e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0}$

ج– ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب) .



تصحيح الإمتحان الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2010

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

مادة :الرياضيات

التمرين الأول:

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(4,0,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(8,1,-6)$ إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 8\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 8\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+4\vec{k}$$

تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)+4(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4z-9=0$$

ومنه $(ABC):\ 3x+4z-9=0$

2) لدينا معادلة الفلكة S هي: $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

إذن

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+z^2-15=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25$$

وبالتالي :الفلكة (S) مركزها $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها $r=5$.

3) أ-المستقيم (Δ) موجه بالمتجهة المنظمية على المستوى (ABC)أي بـ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ويمر من$\Omega(3,1,0)$

إذن النظمة : $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

ب-لنحسب مسافة $\Omega(3,1,0)$ عن المستقيم (Δ) .بما أن $\Omega\in(\Delta)$ فإن $d\left(\Omega;(\Delta)\right)=0<r$ ومنه (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين متماثلتين بالنسبة للنقطة Ω .

$$M(x,y,z)(S)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\\ x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25 & (1)\\ x-3=3t\\ y-1=0\\ z=4t\end{cases}$$

لدينا

$$(1) \Leftrightarrow 9t^2+16t^2=25$$

$$\Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=1 \text{ أو } t=-1$$

وبالتالي $(S)\cap(\Delta)=\{E(6,1,4);F(0,1,-4)\}$.

التمرين الثاني :

1) لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $z^2-6z+10=0$.

لدينا :

$$z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow (z-3)^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow (z-3)^2=i^2$$

$$\Leftrightarrow z-3=i \text{ أو } z-3=-i$$

$$\Leftrightarrow z=3+i \text{ أو } z=3-i$$

وبالتالي $S=\{3+i\ ;\ 3-i\}$

2) أ- التمثيل العقدي للدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه $\mathcal{A}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هو :

لتكن $\mathcal{M}'(z')$ صورة $\mathcal{M}(z)$ بالدوران $\mathcal{R}$ إذن:

$$z'-a=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(z-a) \Leftrightarrow z'-(3-i)=i(z-(3-i))$$

$$\Leftrightarrow z'=iz-3i-1+3-i$$

$$\Leftrightarrow z'=iz+2-4i$$

ب-لتكن c' لحق النقطة C' صورة C بالدوران $\mathcal{R}$ إذن:

$$c'=ic+2-4i$$

$$=i(7-3i)+2-4i$$

$$=5+3i$$

ج-

$$\frac{c'-b}{c-b}=\frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i}=\frac{2+2i}{4-4i}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2i}{2}\right)=\frac{1}{2}i$$

ومنه:

$$\begin{cases} Arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ |c-b| = 2|c'-b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ BC = 2.BC' \end{cases}$$

وبالتالي : المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC = 2BC'$.

التمرين الثالث:

الصندوق يحتوي على 10 كرات ، نسحب تآنيا 4 كرات من الصندوق .

كل عنصر من كون الإمكانيات Ω هو تأليفة لِـ 4 كرات من بين 10 كرات التي يحتوي عليها الصندوق .

وبالتالي : $card\Omega = C_{10}^{4} = 210$.

$1)$ الحدث A : "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط"

الحدث A محقق إذا تم اختيار كرة واحدة حمراء من بين 3 كرات حمراء و

3 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق

إذن : $card\ A = C_{3}^{1} \times C_{7}^{3} = 3 \times 35 = 105$ وبالتالي $p(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$.

الحدث B :"الحصول على كرة بيضاء على الأقل"

لدينا الحدث $\overline{B}$:"عدم الحصول على كرة بيضاء"

الحدث $\overline{B}$ محقق إذا تم اختيار 4 كرات من بين 5 كرات غير البيضاء الموجودة في الصندوق .

إذن $card\ \overline{B} = C_{5}^{4} = 5$ وبالتالي $p(\overline{B}) = \frac{card\ \overline{B}}{card\ \Omega} = \frac{C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$

وبالتالي : $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$.

$2)$ أ-الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء ومنه كل سحبة لِـ 4 كرات من الصندوق تحتوي على :

ثلاث كرات حمراء أو كرتين حمراوتين أو كرة واحدة حمراء أو لاتحتوي على أية كرة حمراء.

ومنه مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي: 3 أو 2 أو 1 أو 0 .وبالتالي : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

ب-حساب $p(X=2)$

الحدث $(X=2)$ محقق ، إذا تم اختيار كرتين حمراوتين من بين الكرات الثلاث الحمراء

وكرتين من بين 7 كرات غير الحمراءالموجودة في الصندوق. ومنه $card\ (X=2) = C_{3}^{2} \times C_{7}^{2} = 3 \times 21 = 63$

وبالتالي : $p(X=2) = \frac{card\ (X=2)}{card\Omega} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$

حساب $p(X=0)$

الحدث $(X=0)$ محقق ، إذا تم احتيار 4 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق.

إذن $card\,(X=0)=C_7^4=35$ وبالتالي: $p(X=0)=\dfrac{card\,(X=0)}{card\,\Omega}=\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$.

ج-لدينا $p(X=1)=p(A)=\dfrac{1}{2}$.

الحدث $(X=3)$ محقق ، إذا تم احتيار الكرات الحمراء الثلاث وكرة من بين 7 كرات غيرالحمراء الموجودة في الصندوق.

إذن $card\,(X=3)=C_3^3\times C_7^1=7$

وبالتالي : $p(X=3)=\dfrac{card\,(X=3)}{card\,\Omega}=\dfrac{7}{210}=\dfrac{1}{30}$.

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}\quad ;\quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

1) لنبين بالترجع أن : $u_n-1>0 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

لدينا $u_0=2$ إذن $u_0-1>0$ وبالتالي المتفاوتة $u_n-1>0$ صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n-1>0$ ونبين أن $u_{n+1}-1>0$.

$u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n}$ بما أن $u_n-1>0$ (إفتراض الترجع) فإن $u_{n+1}-1>0$.

ومنه $u_n-1>0 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

أ-لنبين أن (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{\dfrac{u_n-1}{2u_n}}{\dfrac{4u_n-2}{2u_n}}=\frac{u_n-1}{4u_n-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{2u_n-1}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-1}{2u_0-1}=\dfrac{1}{3}$.

نعلم أنه : $v_n=v_0\times q^n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ إذن $v_n=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

ب- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(2u_n - 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow 2u_n v_n - v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(2v_n - 1) = v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

لدينا $0 < \frac{1}{2} < 1$ إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} = 1$.

3) بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ و الدالة $x \mapsto \ell n x$ متصلة في $x_0 = 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell n(u_n) = \ell n(1) = 0$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

التمرين الخامس:

I)

1) لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x) = \left(1 + 4x e^{2x}\right)' = 4\left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right) = 4(2x + 1)e^{2x}$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$.

2) لدينا إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $2x + 1$ ومنه :

على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

على المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ لدينا $g'(x) \leq 0$ ومنه g تناقصية على $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

3) أ- لدينا $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\left(2 \times -\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$.

بما أن $e > 2$ فإن $\frac{2}{e} < 1$ ومنه $1 - \frac{2}{e} > 0$ وبالتالي $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$.

ب-من تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة دنيا عند $-\frac{1}{2}$ ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) \; g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$

وبالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$.

II) $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

1) بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x.e^{2x} + x + 1 - e^{2x} = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x.e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$.

2) لدينا f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x)=2e^{2x}+2e^{2x}(2x-1)+1$$
$$=1+4xe^{2x}=g(x)$$

وبما أن $g(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ فإن $f'(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}.e^{2x}+\dfrac{x+1}{x}=+\infty$.

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

نتيجة: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب . (الجزء الموجب)

ب-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}2x-1=-\infty$.

$$=\lim_{x\to-\infty}e.(2x-1)e^{2x-1}=0$$

نتيجة:المستقيم $y=x+1\ :(\Delta)$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ج-لدينا $f(x)-(x+1)=(2x-1).e^{2x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$.

وبالتالي وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) مرتبطة بإشارة $2x-1$.

-إذا كان $x=\dfrac{1}{2}$ فإن (Δ) يقطع $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

-إذا كان $x>\dfrac{1}{2}$ فإن $2x-1>0$ ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (Δ) .

- إذا كان $x<\dfrac{1}{2}$ فإن $2x-1<0$ ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم (Δ) .

4)

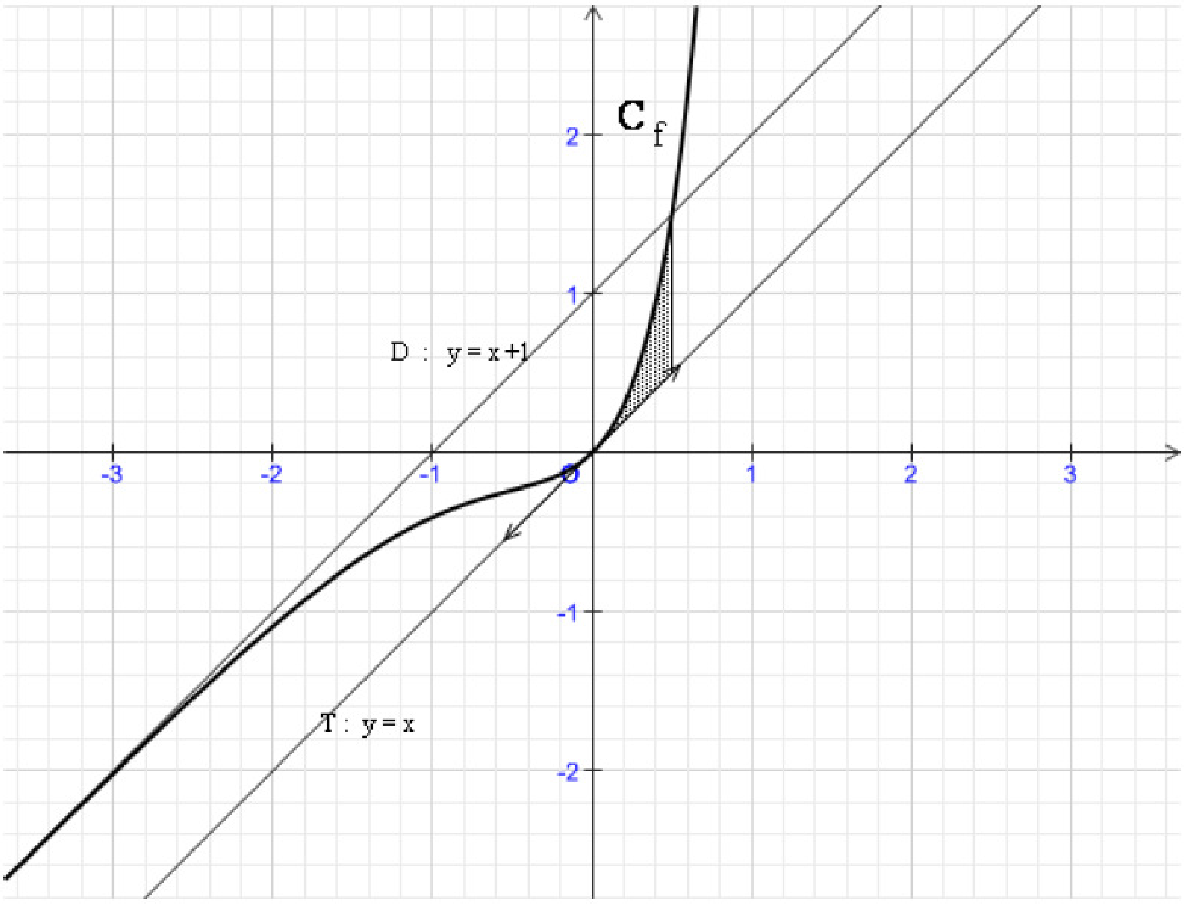
أ- لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة O هي:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $(T):\ y=x$.

ب- لدينا f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f''(x)=4\left[e^{2x}+2xe^{2x}\right]=4(2x+1)e^{2x}$

بما أن f'' تنعدم في $x_0=-\dfrac{1}{2}$ مع تغيير إشارتها فإن النقطة من $(\mathscr{C}_f)$ التي أفصولها $-\dfrac{1}{2}$ نقطة انعطاف.

5) إنشاء المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$



6) أ-لنبين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1-\frac{e}{2}$

نضع : $u(x)=2x-1$ و $v'(x)=e^{2x}$ إذن $u'(x)=2$ و $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ وبالتالي:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}-\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{e}{2}$$

ب-ليكن $x \geq 0$ نضع $h(x)=f(x)-x$ لدينا $h'(x)=f'(x)-1=g(x)-1=4xe^{2x}\geq 0$

وبما أن $h(0)=0$ فإن $h(x)\geq 0$ $(\forall x\geq 0)$ وبالتالي $|f(x)-x|=f(x)-x$ $\left(\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$.

إذن مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (T) المماس للمنحى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي:

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1+(2x-1)e^{2x}dx\right)\times 4cm^2 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1-\frac{e}{2}\right)\times 4cm^2$$

$$=(6-2e)cm^2$$

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2010
الدورة الاستدراكية
ع-ت

التمرين الأول :(3ن) لدينا $A(0,-2,0)$ $B(1.1;-4)$ $C(0.1;-4)$

و معادلة (S) هي $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

1) مركز الفلكة هو $\Omega(a=1;b=2;c=3)$ إذن $\boxed{\Omega(1,2,3)}$

شعاعها هو $r=\sqrt{1+4+9+11}=\sqrt{25}=5$ إذن $\boxed{r=5}$

2) أ- لدينا $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$

لدينا
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 0\\ \vec{j} & 3 & 3\\ \vec{k} & -4 & -4\end{vmatrix}=0\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}=4\vec{j}+3\vec{k}$$

إذن $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}=4\vec{j}+3\vec{k}}$

نستنتج أن معادلة (ABC) هي $4y+3z+d=0$

(لأن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC))

و بما أن $A\in(ABC)$ فإن $-8+d=0$ أي $d=8$

و منه $\boxed{(ABC): 4y+3z+8=0}$

ب - لدينا $\Omega(1,2,3)$ إذن $d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|4.2+3.3+8|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\dfrac{25}{5}=5$

إذن $\boxed{d(\Omega;(ABC))=5}$

نلاحظ أن $d(\Omega;(ABC))=r$

إذن $\boxed{(ABC) \text{ مماس للفلكة } (S)}$

3) أ- (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC)

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ موجهة ل (Δ) و $\Omega\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارا متري ل (Δ) هـو :

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=1\\ y=2+4t\\ z=3+3t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})}$$

ب- لنحدد H تقاطع (Δ) مع (ABC)

$$H\in(\Delta)\cap(ABC)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2+4t\\ z=3+3t\\ 4y+3z+8=0\end{cases}\Leftrightarrow 4(2+4t)+3(3+3t)+8=0$$

$$\Leftrightarrow 8+16t+9+9t+8=0\Leftrightarrow 25t+25=0$$

$$\Leftrightarrow t=-1$$

و منه $\boxed{H(+1;-2;0)}$

ج- $H\in(S)$ (لأن إحداثياتها تحقق معادلة الفلكة (S))

إذن $H\in(ABC)\cap(S)$ و بالتالي $\boxed{H \text{ هي نقطة التماس}}$

التمرين الثاني : (3ن)

(1 لدينا $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

المميز المختصر هو $\Delta'=48-64=-16=(4i)^2$

إذن $z_2=4\sqrt{3}+4i$ و $z_1=4\sqrt{3}-4i$

إذن $\boxed{S=\{4\sqrt{3}-4i\,;4\sqrt{3}+4i\}}$

(2 لدينا $A(8i)$ $B(4\sqrt{3}-4i)$ $C(2(4\sqrt{3}+4i))$

$M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $M'=R(M)$ و R هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{4\pi}{3}$.

ا- لدينا

$$M'=R(M)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{4\pi}{3}}z\Leftrightarrow z'=(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})z\Leftrightarrow z'=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z$$

إذن $\boxed{z'=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z}$

ب- $(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})8i=-4i-4\sqrt{3}i^2=4\sqrt{3}-4i$ أي $b=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})a$

إذن $\boxed{B=R(A)}$

ج- $$\frac{a-b}{c-d}=\frac{8i-4\sqrt{3}+4i}{8\sqrt{3}+8i-4\sqrt{3}+4i}=\frac{12i-4\sqrt{3}}{12i+4\sqrt{3}}=\frac{3i-\sqrt{3}}{3i+\sqrt{3}}=\frac{(3i-\sqrt{3})^2}{-12}=\frac{-6-6\sqrt{3}i}{-12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إذن $\boxed{\frac{a-b}{c-d}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

و منه $\frac{a-b}{c-d}=\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

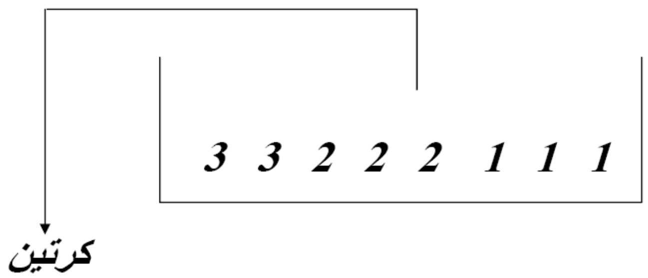
إذن $\boxed{\frac{a-b}{c-d}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]}$

د- لدينا $\left|\frac{a-b}{c-d}\right|=1\Rightarrow|a-b|=|c-d|\Rightarrow AB=BC$

و بما أن $(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})\equiv\frac{\pi}{3}$ فان المثلث **ABC متساوي الأضلاع.**

التمرين الثالث : (3ن)

س.ت.د.ا



(1 نعتبر الحدثين

A"الحصول على كرتين تحملان الرقم 2"

B " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل الرقم 3"

$\boxed{p(A)=\frac{A_3^2}{A_8^2}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}}$ و $\boxed{p(B)=\frac{2A_2^1A_6^1+A_2^2}{A_8^2}=\frac{24+2}{56}=\frac{13}{28}}$

2) X 'عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا'

أ- لدينا $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

ب- $p(X=1)=\frac{2A_5^1A_3^1}{A_8^2}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$

ج- $p(X=0)=p(A)=\frac{3}{28}$

$p(X=2)=\frac{A_5^2}{A_8^2}=\frac{20}{56}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

قانون احتمال X هو:

xi	0	1	2
p(xi)	3/28	15/28	10/28

التمرين الرابع: (3ن)

نعتبر المتتالية $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n} ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) لنبين بالترجع أن $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$

بالنسبة ل $n=0$ $u_0=1>0$

نفترض أن $u_p\succ 0$ إذن $u_{p+1}=\frac{3u_p>0}{21+u_p>0}\succ 0$

و منه $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) لنبين أن $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

$u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n=\frac{-u_n^2}{7(21+u_n)}<0$ إذن $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

3) لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-18u_n}{(21+u_n)}<0$

إذن $u_{n+1}<u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية.

و بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة (مصغورة ب 0) فإنها متقاربة.

4) أ- لدينا $u_n > 0$ و $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن
$$\begin{cases} 0 < u_1 < \frac{1}{7}u_0 \\ 0 < u_2 < \frac{1}{7}u_1 \\ 0 < u_3 < \frac{1}{7}u_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0 < u_n < \frac{1}{7}u_{n-1} \end{cases}$$
بضرب طرف بطرف نحصل على

$0 < u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n u_0$ أي $0 < u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لأن $u_0 = 1$.

ب- بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ فإن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

التمرين الخامس: (8ن)

I- $\forall x \in]0.+\infty[; \ g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 3$

1) أ- لدينا $\forall x \in]0.+\infty[$

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3 - x - 2$$

ب- $\forall x > 0 g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$

$$= \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) أ- $\forall x > 0; \frac{3x^2+3x+2}{x} = 3x + 3 + \frac{2}{x} > 0$

ب- $g'(x) = (x-1)(\frac{3x^2+3x+2}{x}) > 0$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

3) أ- بما أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

فإن g تناقصية على $]0.1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

ب- بما أن $g(1) = 3 > 0$ فإن $\forall x > 0 \ \ g(x) > 0$.

II- 1) $\forall x > 0, \ f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$

$\forall x > 0,$

$$f'(x) = 1 + \frac{(1+\frac{1}{x})x^2 - 2x(x - 1 + \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

وبما أن $g(x) > 0$ فإن f'(x)>0 إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

2) أ- لدينا $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2} = -\infty$

إذن ζ_f يقبل محور الأراتيب كمقارب .

ب- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2} = 0$

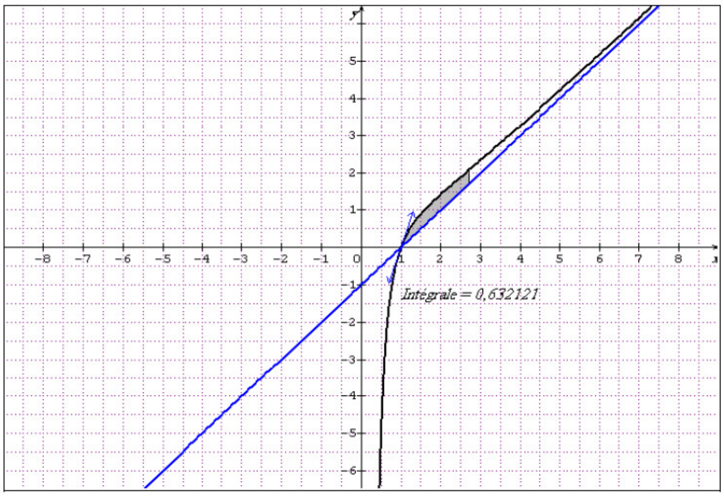
و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2} = +\infty$

ج- $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$

إذن $(\Delta): y = x-1$ مقارب مائل ل ζ_f بجوار $+\infty$

3) لدينا $f'(1)=0$ و $f(1)=0$ إذن معادلة المماس في النقطة التي أفصولها 1 هي $y=3(x-1)$.

(4



5) أ- نضع $u'(x)=\frac{1}{x^2}$ و $v(x)=\ln x$

إذن $u(x)=-\frac{1}{x}$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

إذن $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1-\frac{2}{e}$

أي $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1-\frac{2}{e}$

ب- $A(\Delta)=\int_1^e f(x)-(x-1)dx = \int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx = \left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^e + 1-\frac{2}{e} = (1-\frac{1}{e})cm^2$

إذن $A(\Delta) = (1-\frac{1}{e})cm^2$.