النهايات والإتصال

I) تذكير

1) الأشكال الغير محددة:

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty\times 0$	$+\infty-\infty$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$+\infty+a=+\infty$
$-\infty+a=-\infty$
$+\infty+\infty=+\infty \quad (a\in\mathbb{R})$
$-\infty-\infty=-\infty$
$+\infty-\infty$ ش غ محدد

$a\times\infty=\infty \quad (a\neq 0)$
$\infty\times\infty=\infty$
$0\times\infty$ ش غ محدد

$\frac{a\neq 0}{0}=\infty \qquad \frac{a}{\infty}=0 \qquad \frac{\infty}{a}=\infty$
$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$ ش غ محدد

3) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا حذرية:

a) $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim\limits_{\infty}(f(x)+g(x))=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) **ملاحظة:** $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases} x=\sqrt{x^2}\,;\, x\geq 0 \\ x=-\sqrt{x^2}\,;\, x\leq 0\end{cases}$

4) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

5) الاتصال.

a) لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا أن $\lim\limits_{x_0}f(x)=f(x_0)$ فإن f متصلة في x_0.

b) إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مركب دوال متصلة في غالب الأحيان.

6) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفةفي x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا $\lim\limits_{x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا g بالاتصال في x_0 معرف بما يلي: $\begin{cases} g(x)=f(x) \;,\; x\neq x_0 \\ g(x_0)=l\end{cases}$

7) النهايات والترتيب.

a) إذا كان $\begin{cases} |f(x)-l|\leq g(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \text{و } \lim\limits_{x_0}g(x)=0\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=l$

b) إذا كان $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \text{و } \lim\limits_{x_0}f(x)=+\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}g(x)=+\infty$

c) إذا كان $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \text{و } \lim\limits_{x_0}g(x)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $\begin{cases} g(x)\leq f(x)\leq h(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \lim\limits_{x_0}g(x)=\lim\limits_{x_0}h(x)=l\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=l$

II) صورة مجال بدالة متصلة.

1) a) صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.
b) صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

2) a) إذا كانت f متصلة وتزايدية فإن:

*) $f([a,b])=[f(a), f(b)]$ *) $f(]a,b])=]\lim\limits_{a^+}f, f(b)]$.

b) إذا كانت f متصلة وتناقصية فإن:

*) $f([a,b])=[f(b), f(a)]$ *) $f(]a,b[)=]\lim\limits_{b^-}f, \lim\limits_{a^+}f[$.

3) مبرهنة القيم الوسيطية

a) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن $(\exists c\in[a,b]) : f(c)=\lambda$

b) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b)\langle 0$ فإن $(\exists c\in\,]a,b[) : f(c)=0$
يعني المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في $]a,b[$

ملاحظة: *) إذا كان $f(a)\cdot f(b)\leq 0$ فإن $c\in[a,b]$.
*) إذا كانت f رتيبة قطعا فإن العدد c وحيد.

III) الدالة العكسية

1) إذا كانت:
*) f متصلة على مجال I
*) f رتيبة قطعا على I
*) $f(I)=J$
فإن f تقابل من I نحو J
وبالتالي f تقبل دالة عكسية $f^{-1}: J\to I$ ولدينا:
$(\forall x\in J)(\forall y\in I) : f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

2) a) الدالة f^{-1} متصلة على J
b) الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على J ولها نفس رتابة الدالة f .
c) في م.م.م المنحنيان C_f و $C_{f^{-1}}$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta) : y=x$.

3) اشتقاق الدالة f^{-1} .

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$

و $(\forall x\in J):\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

IV) دالة الجذر ن الرتبة n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

1) تعريف: لكل x من $\mathbb{R}^+$ العدد $\sqrt[n]{x}$ هو العدد y من IR^+ الذي يحقق $y^n=x$.

مثال: *) $\sqrt[4]{16}=2$ لأن $2^4=16$ و $2\geq 0$.

*) $(-2)^4=16$ لكن $\sqrt[4]{16}\neq -2$ لأن $-2\notin\mathbb{R}^+$

2) خاصيات

a) الدالة $\sqrt[n]{\ }$ معرفة على $\mathbb{R}^+$ (b $(\forall x\in\mathbb{R}^+):\sqrt[n]{x}\geq 0$

c) $\left(\forall x,y\in\mathbb{R}^+\right):$ *) $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$
*) $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$.

d) $\left(\forall x,y\in\mathbb{R}^+\right):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n \langle y^n\Leftrightarrow x\langle y$.

e) إذا كان n فردي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n\langle y^n\Leftrightarrow x\langle y$

f) إذا كان n زوجي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow |x|=|y|$
*) $x^n\langle y^n\Leftrightarrow |x|\langle |y|$

g) *) $(\forall x\geq 0).\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

*) إذا كان n زوجي $(\forall x\in IR):\sqrt[n]{x^n}=|x|$

h) ليكن n و p من IN^* و a و b من $\mathbb{R}^+$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$

*) $(b\rangle 0)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$

i) *) $\left(n\in\mathbb{N}^*,p\in\mathbb{Z}\right)$ $(\forall x\ \rangle\ 0)\ :\ x^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{x^p}$

*) إذا كان p زوجي: $(\forall x\in\mathbb{R}):\sqrt[n]{x^p}=|x|^{\frac{p}{n}}$.

ملاحظة:

1) إذا كان $xy\ \rangle\ 0$ فإن $\sqrt[n]{x\,y}=\sqrt[n]{|x|}\cdot\sqrt[n]{|y|}$ و $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{|y|}}$

2) *) $(\forall x\geq 0):\sqrt[3]{x^3}=x$ $\begin{cases} x=\sqrt[3]{x^3}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 & ;\ x\geq 0\\ x=-\sqrt[3]{-x^3}=\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 & ;\ x\leq 0\end{cases}$.

*) $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

$a-b=\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

j) ليكن a و b من IR_+^* و r و r' من $\mathbb{Q}$

$a^r\cdot a^{r'}=a^{r+r'}$; $\left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$

$\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$; $(ab)^r=a^r\cdot b^r$

$\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

المتتاليات العددية

I) عموميات.

1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$:

$$U : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \le M$.

b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \ge m$.

c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n\in I) : m \le u_n \le M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وجد $k \ge 0$ بحيث k : $(\forall n\in I) : |U_n| \le k$

3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$:

a) تزايدية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n \le U_{n+1}$.

b) تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n < U_{n+1}$.

c) تناقصية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n \ge U_{n+1}$.

d) تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n > U_{n+1}$.

e) ثابتة إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n = U_{n+1}$.

ملاحظات:

1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $p < n \Rightarrow u_p \le u_n$.

2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $p < n \Rightarrow u_p \ge u_n$.

3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة $u_{n+1} - u_n$.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \ge 0$ فإن (U_n) تزايدية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n > 0$ فإن (U_n) تزايدية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \le 0$ فإن (U_n) تناقصية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن (U_n) تناقصية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II) المتتالية الحسابية

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r

بحيث $(\forall n\in \mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$

ونجد $u_{n+1} - u_n = cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

c) تكون الأعداد و و في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة المتتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$ يعني $\frac{a+b}{2} = b$.

2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{U_n = U_0 + nr}\ (\forall n\in \mathbb{N})$

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو :

$U_n = U_1 + (n-1)r$.

2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو :

$U_n = U_2 + (n-2)r$.

3) بصفة عامة: إذا كان U_n و U_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

(ترتيب n و p غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

1) $u_1 + u_2 + ... + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$.

2) $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$.

3) بصفة عامة

$$\boxed{u_P + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}}\ .$$

III) المتتاليات الهندسية.

1) **تعريف:**

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث: $(\forall n\in \mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = q.U_n}$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1} بدلالة U_n ونجد $u_{n+1} = q \cdot u_n$.

c) تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $ac = b^2$.

2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$ $(\forall n\in \mathbb{N})$.

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-p}$

2) بصفة عامة: إذا كان u_n وu_p حدين من متتالية هندسية أساسها q فإن $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

(ترتيب n وp غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0.

مع $(q \neq 1)$.

$$\boxed{S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

u_0 : الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

1) إذا كان $q=1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$

2) $q \neq 1$: $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

IV) نهاية متتالية.

1) $\lim q^n$

$$\boxed{\lim q^n = \begin{cases} 0 \quad ; \quad -1 < q < 1 \\ 1 \quad ; \quad q = 1 \\ +\infty \quad ; \quad q > 1 \\ \text{غير موجودة} \quad q \leq -1 \end{cases}}$$

2) مصادق التقارب.

a) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $|U_n - l| \leq V_n$ انطلاقا من صف ما.

$$\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$$

b) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $U_n \leq V_n$ انطلاقا من صف ما

$\lim U_n = +\infty \Rightarrow \lim V_n = +\infty$ و $\lim V_n = -\infty \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

c) لتكن (U_n) و (V_n) و (W_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$ انطلاقا من صف ما.

$$\lim V_n = \lim W_n = l \Rightarrow \lim U_n = l$$

3) نقول إن متتالية (U_n) متقاربة إذا كانت نهايتها عدد حقيقي.
ونقول إنها متباعدة في الحالات الأخرى.

4) التقارب والترتيب.

a) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث $U_n \leq V_n$ (أو $U_n < V_n$) انطلاقا من صف ما إذا كانت (U_n) و (V_n) متقاربتين فإن $\lim U_n \leq \lim V_n$.

b) كل متتالية تزايدية ومكبورة متقاربة.

c) كل متتالية تناقصية ومصغورة متقاربة.

5) المتتاليات الترجعية $U_{n+1} = f(U_n)$

لتكن f دالة معرفة على I ونعتبر المتتالية $\begin{cases} U_0 \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

*) إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

*) إذا كانت f متصلة على I و (U_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق $f(l) = l$

الأعداد العقدية

I) عموميات.

1) a) $\mathbb{C}=\{z=a+ib\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\ و\ i^2=-1\}$

b) كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=a+ib$ حيث $a\ و\ b\in\mathbb{R}$

و i عنصر من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$ $(i\notin\mathbb{R})$

c) *) الكتابة $z=a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد z .

*) العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب $R_é(z)=a$

*) العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب $\operatorname{Im}(z)=b$

*) إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$.

*) إذا كان $a=0$ فإن $z=ib\in\mathbb{R}$ ونقول إن z تخيلي صرف.

2) ليكن a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$. و $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boxed{a+ib=a'+ib'\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases}}\qquad\boxed{a+ib=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}}$$

II) مرافق عدد عقدي.

1) تعريف ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a\ و\ b\in\mathbb{R}$

نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\overline{z}$ والمعرف بما يلي $\overline{z}=a-ib$.

2) خاصيات.

a) $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\\ \overline{z}=-z\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\end{array}}$ (b $\boxed{\begin{array}{l}z=z'\Leftrightarrow\overline{z}=\overline{z'}\\ \overline{\overline{z}}=z\end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}\\ \overline{z_1+z_2+....+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+....+\overline{z_n}\end{array}}$ (d $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}\\ \overline{z_1z_2....z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot....\overline{z_n}\\ \overline{z^n}=\overline{z}^n\ \ (n\in\mathbb{Z})\end{array}}$

e) $\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}\quad و\quad\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$

f) ليكن $z=x+iy$ لدينا $\boxed{\begin{array}{l}z+\overline{z}=2x=2R_é(z)\\ z-\overline{z}=2iy=2i\operatorname{Im}(z)\end{array}\quad و\quad z\overline{z}=x^2+y^2}$

III) معيار عدد عقدي

1) تعريف: ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a\ و\ b\in\mathbb{R}$

نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$ والمعرف بما يلي: $\boxed{|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}}$

2) خاصيات:

a) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|a|$

إذا كان $z=ib\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|b|$

b) $\boxed{|z|^2=z\overline{z}=a^2+b^2\quad و\quad|z|=|\overline{z}|=|-z|}$

c) $\boxed{|z|=0\Leftrightarrow z=0\quad و\quad|z+z'|\le|z|+|z'|}$

d) $\boxed{\begin{array}{l}|zz'|=|z||z'|\\ |z_1z_2.....z_n|=|z_1||z_2|....|z_n|\end{array}\quad و\quad|z^n|=|z|^n}$

e) $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}\quad و\quad\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}}$

ملاحظة: للحصول على الشكل الجبري لعدد عقدي على شكل كسر نتبع ما يلي:

*) $\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z'}}{z\overline{z'}}=\frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}}$

*) $\boxed{\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}}$

IV) التمثيل الهندسي لعدد عقدي.

نفترض أن المستوى P منسوب إلى معلم متقاعد ممنظم $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1) تعريف:

a) لكل $M(x,y)$ من P العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب $aff(M)$.

b) لكل $\vec{u}(x,y)$ من $\vec{v}$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$

c) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z في P ونكتب $M(z)$.

d) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z في V_2 ونكتب $\vec{u}(z)$.

ملاحظة: a) $aff(o)=0$. $aff(\vec{e}_1)=1$. $aff(\vec{e}_2)=i$

b) $\boxed{\begin{array}{l}z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(x'ox)\\ z\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[ox)\\ z\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(x'o]\end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(y'oy)\\ z\in i\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[oy)\\ z\in i\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(y'o]\end{array}}$

2) خاصيات.

a) $\boxed{\begin{array}{l}aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'\\ aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M)\\ MM'=|aff(M')-aff(M)|\end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{l}aff(\vec{u})=aff(\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}\\ aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})\\ aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u})\\ \|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|\end{array}}$

c) ليكن G مرجع $\{(A,\alpha)(B,\beta)\}$ لدينا

$$\boxed{aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha aff(A)+\beta aff(B))}$$

d) ليكن I منتصف $[AB]$ $\boxed{aff(I)=\frac{1}{2}(aff(A)+aff(B))}$

e) لتكن A و B و C ثلاث نقط الحاقها على التوالي z_c,z_B,z_A

بحيث $A\neq B$ تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

V) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

1) *) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $M(z)$ نسمي عمدة العدد z كل قياس للزاوية $\left(\vec{e}_1, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$. ونرمز له $\arg z$

*) $\boxed{\arg z \equiv \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]}$

ملاحظة:

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = k\pi$$

$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$$

2) كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $|z| = r$ و $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z ونكتب $z = [r,\theta]$ أو $z = re^{i\theta}$.

3) ملاحظة: a) $[r,\theta] = [r',\theta'] \Leftrightarrow r = r'$ و $\theta \equiv \theta'[2\pi]$

b) للحصول على الشكل المثلثي للعدد $z = a + ib$ نتبع ما يلي

$$z = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \left[\sqrt{a^2+b^2}, \theta\right]$$

c)

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$$
$$-\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)$$
$$-\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)$$
$$\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4)

$$[r,\theta]\cdot[r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$$
$$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$$
$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$$
$$\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$$
$$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$$

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$$
$$\arg z^n \equiv n\arg z[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$$
$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

ملاحظة $-1 = e^{i\pi} \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5)

$$\left(\vec{e}_1, \vec{u}\right) \equiv \arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]$$
$$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \equiv \arg\left(aff(\vec{v})\right) - \arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

ملاحظة:

إذاكان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1,\theta]$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Rightarrow AC = AB$$
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[2\pi]$$

6) صيغة Moivre

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

7) صيغتا Euler

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$$

ملاحظة: للحصول على الشكل المثلثي لمجموع عددين لهما نفس المعيار هناك طريقتان

الطريقة 1 . نستعمل الصيغ المثلثية .

ليكن $z_1 = e^{i\alpha}$ $z_2 = e^{i\beta}$

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\beta + i\sin\beta$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta + i(\sin\alpha + \sin\beta)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$z_1 - z_2 = \cos\alpha - \cos\beta + i(\sin\alpha - \sin\beta)$$
$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + i\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

الطريقة 2 . نستعمل الترميز الأسي .

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$z_1 - z_2 = e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

VI) الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم.

1) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نسمي جدر نوني للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$.

2) حلول المعادلة $z^n = a$ هي الجذور النونية للعدد a .

3) ليكن $Z = [r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$ الجذور النونية للعدد Z هي الأعداد $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] / k \in \{0,1,....,n-1\}$ وعددها n

4) الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد $w_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $k \in \{0,1,...,n-1\}$

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=[r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z . $Z=[r,\theta]=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]^2$

إذن جذري Z هما: $u=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]$ و $-u$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $\boxed{Z=a\in\mathbb{R}_+^*}$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{a}$ و $-u$

2) إذا كان $\boxed{Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=i\sqrt{a}$ و $-u$

3- إذا كان $\boxed{Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1+i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-u$

4) إذا كان $\boxed{Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)\right)^2$$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$ و $-u$

5) إذا كان $\boxed{Z=a+ib}$ مع $(b\neq 0$ و $\neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z=-3+4i$$

نضع $z=x+iy$ لدينا $z^2=x^2-y^2+2ixy$

و $|z|^2=x^2+y^2$ و $|Z|=5$

$$z^2=Z\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=Z\\|z|^2=|Z|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-3 & (1)\\2xy=4 & (2)\\x^2+y^2=5 & (3)\end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2=2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن (1) − (3) نستنتج أن $2y^2=8$

يعني $y^2=4$

أي $y=2$ أو $y=-2$

ومن خلال (2) لدينا $xy=2\rangle 0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

إذن جذري Z هما $u=1+2i$ و $-u$

VII) المعادلات من الدرجة II:

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z=-\frac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z=\frac{-b+u}{2a}$ و $z=\frac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases}z_1+z_2=\frac{-b}{a}\\z_1z_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'-ac$$

1- إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ المعادلة لها حل وحيد $z=-\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta'\neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1=\frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2=\frac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ' .

دراسة الدوال

I- الاشتقـــــــــــاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'_d(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$ ونكتب $f'_g(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار x_0 و $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

2) التأويل الهندسي.

a) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى c_f يقبل مماسا (T) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

b) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) على يمين $M(x_0,f(x_0))$ معاملة الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $(T_1): y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.

d) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

e) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يمين $A(x_0,f(x_0))$.

f) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأسفل على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

g) إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى على يسار $A(x_0,f(x_0))$.

ملاحظة:

*) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يمر بشكل عادي من النقطة $M(x_0,f(x_0))$ (لا ينكسر).

*) وإذا كانت f غير قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f (ينكسر) في النقطة $M(x_0,f(x_0))$ ويكون زاوية.

3) اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن gof قابلة للاشتقاق على I و

$$\boxed{(\forall x\in I)\quad (gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)}$$

4) اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ و

$$\boxed{(\forall x\in J): \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}\ .$$

5) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

1) $(a)'=0$ $\quad(a\in\mathbb{R})$	12) $(f+g)'=f'+g'$
2) $(x)'=1$	13) $(af)'=af'$
3) $(ax)'=a$	14) $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
4) $(x^r)'=rx^{r-1}$ $\quad r\in\mathbb{Q}$	15) $(f^r)'=rf'\cdot f^{r-1}$
5) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	16) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$
6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	17) $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$
7) $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	18) $(\sin x)'=\cos x$
8) $\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{3\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)^2}$	19) $(\cos x)'=-\sin x$
9) $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$	20) $(\tan x)'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
10) $(Arc\tan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	21) $\left(\sin(u(x))\right)'=u'(x)\cos(u(x))$
11) $\left(Arc\tan(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	22) $\left(\cos u(x)\right)'=-u'(x)\sin(u(x))$
23) $\left(\tan(u(x))\right)'=u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$	

ملاحظة:

a) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
الدالة $f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $D_f-\{x/u(x)=0\}$.

b) إذا كانت f دالة تغير الصيغة في x_0 أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في x_0 . يجب دراسة اشتقاق f في x_0 باستعمال معدل التغير.

6) رتابة دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in I)\quad f'(x)\geq 0$.

b) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in I)\quad f'(x)\leq 0$.

c) تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان:
$(\forall x\in I)\quad f'(x)=0$.

7) مطارف دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. يكون للدالة f'' مطرافا في x_0 إذا وفقد إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

8) التقعر:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

a) يكون C_f محدبا " $\cup$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\geq 0$.

b) يكون C_f مقعرا " $\cap$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\leq 0$.

9) نقطة انعطاف.

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن $x_0\in I$.
تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0.

ملاحظة:

a) إذا كانت f تنعدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرك إشارتها.

II- التمثيل المبياني لدالة

1) محور تماثل – مركز تماثل.

a) يكون المستقيم $(\Delta).x=a$ محور تماثل المنبنى C_f إذا وفقط إذا كان:
*) لكل x من D_f $\quad 2a-x\in D_f$
*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان:
*) لكل x من D_f $\quad 2a-x\in D$
*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=2b-f(x)$

2) الفروع اللانهائية.

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لا نهائيا إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

b) تصنيف الفروع اللانهائية

1) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty}$
فإن المستقيم $(\Delta): x=a$ مقارب ل C_f بجوار a.

2) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta): y=a$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

3) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞.

b) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

c) إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0}$ نقوم بحساب $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=b}$
فإن المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب ل C_f بجوار ∞.

ii) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=\infty}$
فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y=ax$ بجوار ∞.

ملاحظة:

يكون المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا ل C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim(f(x)-(ax+b))=0$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta): y=ax+b$ مقارب أو إذا كانت $f(x)$ تكتب على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$.

3) بعض الملاحظات.

a) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع المستقيم $(\Delta): y=m$.

b) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g.

d) حلول المتراجحة $f(x)\leq g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g.

e) من أجل دراسة وضع C_f بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة $f(x)-y$

*) إذا كان $f(x)-y\geq 0$ فإن C_f يوجد فوق (Δ).

*) إذا كان $f(x)-y\leq 0$ فإن C_f يوجد تحت (Δ).

الجداء السلمي – الفلكة
الجداء المتجهي

I– الجداء السلمي.

نفترض في كل ما يلي أن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$

لدينا $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz' \qquad \|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

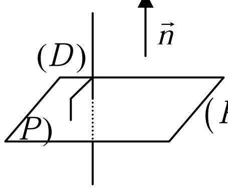
2) نعتبر النقطتين $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$,

$$\boxed{AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}}$$

3) **المستقيمات والمستويات في الفضاء الأقليدي.**

a) ليكن (P) مستوى. نسمي متجهة منظمية على (P) كل متجهة $\vec{n}$ موجهة لمستقيم (D) عمودي على (P).

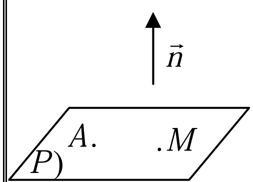


b) نعتبر المستوى $(P):ax+by+cz+d=0$ المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P).

c) معادلة مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1,-1,2)$ والمتجهة $\vec{n}(2,1,-1)$ منظمية عليه:

الطريقة 1: $M\left(x,y,z\right)\in\left(P\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$



$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)+\left(y+1\right)-\left(z-2\right)=0$$

إذن: $\left(P\right):2x+y-z+1=0$

الطريقة 2: لدينا $\vec{n}(2,1,-1)$ منظمية على (P) إذن معادلة (P) على شكل $2x+y-z+1=0$ ولدينا $A(1,-1,2)\in(P)$ إذن $2-1-2+d=0$ يعني $d=1$ إذن $(P):2x+y-z+1=0$.

d) تعامد مستقيمين.

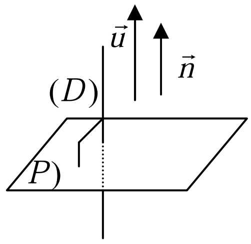
ليكن (D) و (D') مستقيمين موجهين ب $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ على التوالي:

يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $aa'+bb'+cc'=0$.

e) تعامد مستقيم ومستوى.

i) ليكن (D) مستقيم موجه ب $\vec{u}$ و (P) مستوى موجه ب $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

يكون $(D)\perp(P)$ إذا وفقط إذا كان $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\\vec{u}\perp\vec{w}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=0\\\vec{u}.\vec{w}=0\end{cases}$.



ii) ليكن (D) مستقيم موجه ب $\vec{u}(a,b,c)$ و (P) مستوى بحيث تكون $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ منظمية عليه.

*) يكون $(D)\perp(P)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مستقيمتين.

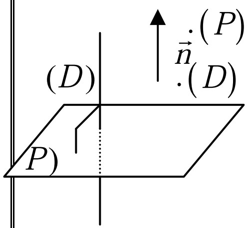
يعني $\begin{vmatrix}a&\alpha\\b&\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&\alpha\\c&\gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&\beta\\c&\gamma\end{vmatrix}=0$

*) يكون $(D)//(P)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}\perp\vec{n}$ يعني $\vec{u}.\vec{n}=0$

iii) إذا كان المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) فإن:

*) كل متجهة موجهة ل (D) تكون منظمية على (P).

*) وكل متجهة منظمية على (P) تكون موجهة ل (D).



f) تعامد مستويين.

i) ليكن (P) و (Q) مستويين و $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ منظميتين عليهما على التوالي.

*) يكون $(P)\perp(Q)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\perp\vec{n}'$ يعني $\vec{n}.\vec{n}'=0$.

*) يكون $(P)//(Q)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ مستقيمين.

ii) نعتبر المستويين $(P):ax+by+cz+d=0$

و $(Q):a'x+b'y+c'z+d'=0$

يكون $(P)\perp(Q)$ إذا وفقط إذا $aa'+bb'+cc'=0$.

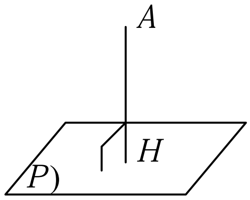
g) مسافة نقطة عن مستوى.

i) ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء

و H المسقط العمودي ل A على (P)

المسافة AH تسمى مسافة A عن (P)

ونكتب $d\left(A,(P)\right)=AH$.



ii) نعتبر المستوى $(P):ax+by+cz+d=0$

والنقطة $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

لدينا $\boxed{d\left(A,(P)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

II) الفلكة.

1) الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة النقط M التي تحقق $\Omega M=r$.

2) معادلة الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها r هي:

$$\boxed{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=r^2}$$

نقوم بالنشر ونجعل المعادلة على شكل:

$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$.

3 نعتبر المجموعة

$$(\Gamma): x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان.

<u>الطريقة1</u>: نضع $a=\frac{-\alpha}{2}$ $b=\frac{-\beta}{2}$ $c=\frac{-\gamma}{2}$ $d=\delta$ ونحسب $a^2+b^2+c^2-d$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d<0$ فإن $\Gamma=\varnothing$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d=0$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b,c)\}$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d>0$ فإن فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

<u>الطريقة2</u> نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k$$

باستعمال بداية متطابقة هامة $X^2+\alpha X=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

*) إذا كان $k<0$ فإن $(\Gamma)=\varnothing$

*) إذا كان $k=0$ فإن $(\Gamma)=\{\Omega(a,b,c)\}$

*) إذا كان $k>0$ فإن $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$.

4 **<u>معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.</u>**

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (S) هناك طريقتان:

<u>الطريقة1</u>

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\\z-z_B\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

<u>الطريقة 2:</u>

نستعمل مباشرة الصيغة

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

5 **<u>تقاطع فلكة ومستوى.</u>**

a) لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من أجل دراسة تقاطع (S) و (P) نقوم بحساب $d=d(\Omega,(P))$ وهناك ثلاث حالات:

i) إذا كانت $d>r$ فإن (P) يوجد خارج (S) ((P) لا يقطع (S)).

ii) إذا كان $d=r$ فإن (P) و (S) يتقاطعان في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (P) مماس ل (S) في H ونقط التماس H هي المسقط العمودي ل Ω على (P).

iii) إذا كانت $d<r$ فإن المستوى (P) يقطع (S) وفق الدائرة (ℓ) الموجودة ضمن المستوى (P) التي مركزها هو H المسقط العمودي ل Ω على (P) وشعاعها $r'=\sqrt{r^2-d^2}$.

b) إذا كانت $d(\Omega,(P))$ فإن $\Omega\in(P)$ ونقول في هذه الحالة إن المستوى (P) مستوى قطري. وفي هذه الحالة المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة الكبرى (ℓ) الموجودة ضمن (P) التي مركزها Ω وشعاعها هو r .

c) لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها x .

i) يكون (P) مماسا ل (S) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega,(P))=r$.

ii) يكون (P) مماسا ل (S) في A إذا وفقط إذا كان (ΩA) عمودي على (P) في A .

iii) المستوى المماس للفلكة (S) في A هو المستوى المار من A و $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

6 **<u>تقاطع فلكة ومستقيم:</u>**

نعتبر المستقيم $(D):\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\y=y_0+\beta t\\z=z_0+\gamma t\end{cases}$

والفلكة (S) التي معادلتها:

$$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

من أجل دراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D) نقوم بحل النظمة:

$$\begin{cases}x=x_0+\alpha t\ (1)\\y=y_0+\beta t\ \ (2)\\z=z_0+\gamma t\ \ \ (3)\\x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0\ (4)\end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها t .

ليكن Δ مميز هذه المعادلة:

i) إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة ليس لها حل إذن (D) لا يقطع (S).

ii) إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا إذن (D) يقطع (S) في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (D) مماس ل (S) في H .

iii) إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين t_1 و t_2 إذن (D) يقطع (S) في نقطتين A و B وللحصول على أحداثيات A و B نعوض t_1 و t_2 في (1) و (2) و (3).

III) الجداء المتجهي

1- ليكن $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا.

ونعتبر المتجهتين $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

لدينا $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}.\vec{k}$

2 تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$

3 a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين موجهتين لمستوى (P) فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منظمية على (P).

b) لتكن A, B, C ثلاث نقط غير مستقيمة (يعني $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq 0$) المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

4 مساحة المثلث (ABC) هي $\boxed{S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

5 مساحة المتوازي أضلاع $(ABCD)$ هي $\boxed{S=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|}$

6 ليكن (D) مستقيم مار من A وموجه بالمتجهة $\vec{u}$ ولتكن M نقطة.

لدينا $\boxed{d(M,(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}}$

7 *) $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

*) $\alpha\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$

*) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

*) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

8 من أجل دراسة تقاطع مستقيم (D) وفلكة (S) يمكن حساب $d(\Omega,(D))$ ثم استنتاج التقاطع.

الدوال اللوغاريتمية والأسية

I) دالة اللوغاريتم النيبري

① تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم النيبري الدالة الأصلية F للدالة

$$f :]0,+\infty[\to IR$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

والتي تحقق $F(1)=0$ ونرمز لها بـــ $\ln$ أو Log

ملاحظة

a) *) $\ln :]0,+\infty[\to IR$

*) $D_{\ln} =]0,+\infty[$

b) *) نعتبر الدالة $f(x)=\ln(u(x))$

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow u(x)>0$

*) نعتبر الدالة $f(x)=\ln|u(x)|$

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow u(x)\neq 0$

c) *) $\ln(1)=0$

*) $\ln(e)=1$ (مع $e\simeq 2,71828$)

*) $(\forall r\in Q) : \ln(e^r)=r$

② خاصيات الدالة $\ln$

ليكن $a>0$ و $b>0$ و $r\in Q$

*) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

*) $\ln(a^r)=r\ln a$

*) $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$

*) $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$

*) $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$

*) $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

ملاحظة :

*) إذاكان $ab>0$ فإن : $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$

*) إذاكان $\frac{a}{b}>0$ فإن : $\ln(\frac{a}{b})=\ln|a|-\ln|b|$

*) إذاكان $a^n>0$ فإن : $\ln(a^n)=n\ln|a|$

③ إشارة $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

④ الإشتقاق

*) $(\forall x>0) : (\ln x)'=\frac{1}{x}$

*) $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

*) $(\ln |u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

⑤ النهايات الإعتيادية

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ ($\ln(+\infty)=+\infty$)

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ ($\ln(0)=-\infty$)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ أو $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)\ln(v(x))}{w(x)} \quad \left|\begin{array}{l} v(x)\to+\infty \to \frac{\ln t}{t} \\ v(x)\to 0^+ \to t\ln t \\ v(x)\to a\neq 0 \to \frac{\ln t}{t-1}\end{array}\right.$$

II) دالة الأس النيبري

① تعريف

نسمي دالة الأس النيبري الدالة العكسية للدلة $\ln$ونرمز لها بالرمز $x\to e^x$

ملاحظة

a) *) الدالة $x\to e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$.

*) $(\forall x\in\mathbb{R}) : e^x>0$

b) *) $e^0=1$ *) $e^1=e$

c) *) $(\forall x\in\mathbb{R}) : \ln(e^x)=x$

*) $(\forall x>0) : e^{\ln(x)}=x$

d) *) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y>0) \quad : e^x=y \Leftrightarrow ln(y)=x$

② خاصيات

ليكن $x,y\in\mathbb{R}$ و $r\in Q$

*) $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$ *) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

*) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ *) $e^{rx}=(e^x)^r$

*) $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$

*) $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

③ الإشتقاق

*) $(\forall x\in\mathbb{R}) : (e^x)'=e^x$

*) $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

4) النهايات الإعتيادية

a) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad (e^{+\infty} = +\infty)$

b) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad (e^{-\infty} = 0)$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

e) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)e^{v(x)} - \varphi(x)}{w(x)} \quad \left| \begin{array}{l} v(x) \to +\infty \to \frac{e^t}{t} \\ v(x) \to -\infty \to te^t \\ v(x) \to a \in \mathbb{R} \to \frac{e^t - 1}{t} \end{array} \right.$$

III) دالة اللوغاريتم للأساس a .

1) تعريف

ليكن $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة التي نرمز لها بـــ $\log_a$ والمعرفة بـــ :

$$(\forall x > 0) : \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

حالات خاصة

*) الدالة $\log_{10}$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بـــالرمز $\log$

$$(\forall x > 0) : \log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

*) دالة اللوغارتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e .

2) خاصيات

*) الدالة $\log_a$ لها نفس خاصيات $\ln$.

*) $\log_a(a) = 1$ $\quad$ *) $\log_a(1) = 0$

*) $\log(10) = 1$ $\quad$ *) $\log(1) = 0$

IV) الأس الحقيقي لعدد حقيقي موجب قطعا

1) تعريف

$$(\forall a > 0)(\forall x \in \mathbb{R}):\ a^x = e^{x\ln(a)}$$

2) خاصيات

ليكن $a > 0$ و $b > 0$ و x و y من $\mathbb{R}$.

*) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $\quad$ *) $a^{xy} = (a^x)^y$

*) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ $\quad$ *) $a^x b^x = (ab)^x$

*) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad$ *) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

*) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

*) $\ln(a^x) = x\ln a$

الإحتمال

I) التعداد

1) رئيسي مجموعة

نسمي رئيسي مجموعة منتهية E عدد عناصرها ، ونرمز له ب $card(E)$

2) عاملي عدد طبيعي

ليكن n عدد طبيعي . نسمي عاملي n ، العدد الذي نرمز له ب $n!$ والمعرف بما يلي :

*) $n!=1.2.3.......n$ إذا كان $n\neq 0$.

*) $0!=1$.

3) مبدأ الجداء .

إذا كان علينا أن ننجز p اختيارا ، وكان لدينا :

*) n_1 طريقة للإختيار رقم 1 .

*) n_2 طريقة للإختيار رقم 2 .

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

*) n_p طريقة للإختيار رقم p .

فإن عدد الطرق التي تتم بها هذه الأختيارات هو $n_1.n_2......n_p$.

4) الترتيبات –التبديلات – التاليفات

لتكن $E=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ مجموعة مكونة من n عنصر . و $p\le n$.

a) نسمي ترتيبة لــ p عنصر من بين n عناصر E أو ترتيبة من الرتبة p لعناصر E كل ترتيب لــ p عنصر مختلف من E . ونرمز لترتيبة بــ : $(x_1,x_2,....,x_n)$

b) عدد هذه الترتيبات هو العدد الذي نرمز له بــ : A_n^p والمعرف بمايلي :

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}=\underbrace{n(n-1)(n-2).......(n-p+1)}_{n\ facteurs}$$

c) نسمي تبديلة لعناصر E كل ترتيبة لــ n عنصر من بين n عناصر E

d) عدد هذه التبديلات هو $A_n^n=n(n-1)(n-2)......1=n!$

e) نسمي تأليفة لــ p عنصر من بين n عناصر E أو تأليفة من الرتبة p لعناصر E كل جزئ مكون من p عنصر مختلف من E . ونرمز لتأليفة بــ : $\{x_1,x_2,....,x_p\}$

f) عدد هذه التأليفات هو العدد الذي نرمز له بــ : C_n^p والمعرف بمايلي :

$$C_n^p=\frac{A_n^p}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2).......(n-p+1)}^{p\ facteurs}}{p(p-1)(p-2)....................1}$$

5) خاصيات

a) $C_n^0=C_n^n=1 \quad C_n^1=C_n^{n-1}=n \quad C_n^p=C_n^{n-p}$

$C_n^p+C_n^{p+1}=C_{n+1}^{p+1}$.

b) الصيغة الحدانية . $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$

c) لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر .عدد أجزاء E هو 2^n .

II) الإحتمال

1) تعريف .

نعتبر المجموعة $\Omega=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ (كون الإمكانيات)

نقول إننا قد عرفنا احتمالا على Ω إذا وفقط إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد حقيقي p_i بحيث : *) $0\le p_i\le 1$

*) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

ونكتب $p(a_i)=p_i$. الزوج (Ω,p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا .

2) احتمال حدث :

ليكن (Ω,p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا و A حدثا .

احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الإبتدائية التي تكونه . يعني .

إذا كان $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ فإن $p(A)=p(a_1)+p(a_2)+\cdots p(a_n)$

3) خاصيات

ليكن (Ω,p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا .

a) ليكن A و B حدثين بحبث $A\cap B=\varnothing$ لدينا

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

b) ليكن A و B حدثين . لدينا $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

c) ليكن A حدثا و $\overline{A}$ الحدث المضاد لــ A ، لدينا $p(A)=1-p(\overline{A})$

d) ليكن A_1 و A_2 و .....و A_n أحداثا منفصلة مثنى مثنى ، لدينا

$$p(A_1\cup A_2\cup....\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\cdots+p(A_n)$$

4) فرضية تساوي الإحتمالات

ليكن (Ω,p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا بحيث يكون لجميع ألإمكانيات نفس الإحتمال

*) جميع الأحداث الإبتدائية لها نفس الإحتمال هو $\dfrac{1}{card(\Omega)}$

*) ليكن A حدثا . لدينا $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

ملاحظة : **a)** إذا كان لجميع الأحداث الإبتدائية نفس الإحتمال فإن

$$p(A)=\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

b) إن فرضية تساوي الإحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صريحة أو بطريقة غير مباشرة كما يلي : (نرد غير مغشوش – قطعة نقود غير مغشوشة–كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

c) إذا كانت التجربة مغشوشة يجب أولا حساب احتمال الأحداث الإبتدائية باستعمال المعطيات حول عملية الغش واستعمال الخاصية : إذا كان $\Omega=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ فإن

$$p(A)=p(a_1)+p(a_2)+\cdots p(a_n)$$

مثال : نرمي نرد وجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش بحيث الأرقام الزوجية لها نفس الإحتمال والأرقام الفردية لها نفس الإحتمال ، واحتمال رقم زوجي مضاعف احتمال رقم فردي أحسب احتمال الحدث A "الحصول على رقم مضاعف لــ 3 "

الحل : لدينا $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

*) لنحسب احتمال الأحداث الإبتدائية .

نضع $p(1)=p(3)=p(5)=x$ و $p(2)=p(4)=p(6)=2x$

لدينا $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$

يعني $x+2x+x+2x+x+2x=1$ يعني $x=\dfrac{1}{9}$ إذن

$$p(1)=p(3)=p(5)=\frac{1}{9} \ , \ p(2)=p(4)=p(6)=\frac{2}{9}$$

*) لدينا $A=\{3,6\}$ إذن $p(A)=p(3)+p(6)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{3}$

5) ألإحتمال الشرطي :

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$ ،

أحتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

6) صيغة الإحتمالات المركبة

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$ ،

$$p(A\cap B)=p(A)\,p(B/A)$$

7) صيغة الإحتمالات الكلية

a) نقول إن الأحداث A_1 و A_2 و .....و A_n تكون تجزيئا لـ Ω إذا وفقط إذا كان

$(\forall i\neq j): A_i\cap A_j=\varnothing$ (* $\qquad$ $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ (* .

b) تكون الأحداث A_1 و A_2 و .....و A_n تجزيئا لـ Ω إذا وفقط إذا كانت منفصلة مثنى مثنى وتكون هي الأحداث الممكنة .

c) صيغة الإحتمالات الكلية

ليكن A_1 و A_2 و .....و A_n أحداثا تكون تجزيئا لـ Ω .لكل حدثا B لدينا :

$$p(B)=p(A_1)\,p(B/A_1)+\cdots+p(A_n)\,p(B/A_n)$$

8) ألإستقلالية

a) نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا وفقط إذا كان

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

b) يكون الحدثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان $p(B/A)=p(B)$ و $p(A/B)=p(A)$ يعني إذا كان تحقق أحدهما لا يؤثر على الآخر .

c) نعتبر تجربة مكونة من n اختبار مستقلة مثنى مثنى .

ليكن A حدثا احتمال تحقيقه في اختبار واحد هو $p(A)=p$

وليكن B الحدث :"الحدث A يتحقق k مرة بالضبط خلال n اختبار "

لدينا : $p(B)=C_n^k(p(A))^k(1-p(A))^{n-k}$

ملاحظة بصفة عامة من أجل حساب احتمال نتبع مايلي :

a) إذا كان لدينا السحب التآني أو الإختيار التآني نستعمل C_n^p و $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

b) إذا كانت تجربة مكونة من عدة اختبارات ، نفكك هذه التجربة إلى عدة اختبارات يكون فيها افختيار التآني حتى نتجنب استعمال الترتيبات والتطبيقات . ونرمز لكل إمكانية بـ : $(x_1,x_2,....,x_n)$ حيث x_i نتيجة التجربة رقم i .

III) المتغير العشوائي .

1) نسمي متغير عشوائي كل تطبيق X يربط كل إمكانية من Ω بعدد حقيقي ، ونرمز للقييم التي يأخذها المتغير X بـ $X(\Omega)$.

2) ليكن X متغير عشوائي بحيث $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....,x_n\}$

نقل إننا قد حددنا قانون احتمل X ، إذا قمنا بحساب $p(X=x_i)$ لكل $i\in\{1,2,...,n\}$ ونلخص هذه النتائج في جدول كما يلي :

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	α_1	α_2	....	α_n

3) الأمل الرياضي .

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $E(X)$ والمعرف بما يلي :

$$E(X)=x_1\,p(X=x_1)+x_2\,p(X=x_2)+\cdots+x_n\,p(X=x_n)$$
$$=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots\cdots+x_n\alpha_n$$

4) المغايرة

المغايرة لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $V(X)$ والمعرف بما يلي :

حيث $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$E(X^2)=x_1^2\,p(X=x_1)+x_2^2\,p(X=x_2)+\cdots+x_n^n\,p(X=x_n)$$
$$x_1^2\alpha_1+x_2^2\alpha_2+\cdots\cdots+x_n^n\alpha_n$$

5) الإنحراف الطرازي .

الإنحراف الطرازي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $\sigma(X)$ والمعرف بما يلي:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

6) دالة التجزيئ

نسمي دالة التجزيئ للمتغير العشوائي X الدالة التي نرمز لها بـ F والمعرفة بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}): F(X)=p(X<x)$$

ونقول إننا قد حددنا الدالة F إذا قمنا بحساب $F(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

مثال : نعتبر الصندوق $U\left|\begin{matrix}3B\\4N\end{matrix}\right.$ نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق . ليكن

X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المحصل عليها .

a) القيم التي بأخذها المتغير X هي :

*) $X=0$ يعني الحصول على $\{3N\}$.

*) $X=1$ يعني الحصول على $\{1B,2N\}$.

*) $X=2$ يعني الحصول على $\{2B,1N\}$.

*) $X=3$ يعني الحصول على $\{3B\}$.

إذن $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

b) قانون احتمال X .

) $p(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$ $\quad$ ($p(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$

) $p(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$ $\quad$ ($p(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{1}{35}$

c) $E(X)=0.\dfrac{4}{35}+1.\dfrac{4}{35}+2.\dfrac{18}{35}+3.\dfrac{1}{35}=\dfrac{49}{35}$

d) لدينا $E(X^2)=0^2.\dfrac{4}{35}+1^2.\dfrac{4}{35}+2^2.\dfrac{18}{35}+3^2.\dfrac{1}{35}=\dfrac{75}{35}$

إذن $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{75}{35}-(\dfrac{49}{35})^2=\dfrac{224}{352}$

e) لدينا $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{224}}{35}$

f) دالة التجزيئ . لنحسب $F(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

*) إذا كان $x\leq 0$ فإن $F(x)=p(X<x)=p(\varnothing)=0$

*) إذا كان $0<x\leq 1$ فإن $F(x)=p(X<x)=p(X=0)=\dfrac{4}{35}$

*) إذا كان $1<x\leq 2$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)=\frac{22}{35}$$

*) إذا كان $2<x\leq 3$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{34}{35}$$

*) إذا كان $3<x$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$$

التكـــــــــامـــــل

I) تعـــــريـــــــف .

لتكن f دالة متصلة على مجال I وليكن a و b من I .

نسمي تكامل f من a إلى b العدد الذي نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$

والمعرف بما يلي : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

حيث F دالة أصلية للدالة f .

ملاحظة .

*) نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

*) يمكن تعويض المتغير x بأي متغير آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

II) خـــاصيـــات

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I وليكن a و b و c من I

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

4) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b af(x)dx = a\int_a^b f(x)dx$ حيث $a \in IR$.

6) الدالة $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a .

7) a) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b])\ : f(x) \ge 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b])\ : f(x) \le 0$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$

c) إذا كان $a \le b$ و $(\forall x \in [a,b])\ : f(x) \le g(x)$

فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

d) إذا كان $a \le b$ و فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

8) a) العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة لدالة f بين a و b

b) يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

c) $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ حيث m و M هم القيمة الدنوية والقيمة القصوية للدالة f على $[a,b]$.

ملاحظـــــــة في الخاصية (8) ترتيب a و b غير مهم .

III) تقنيات حساب التكـــــامــــل .

1) المكاملة بالأجزاء .

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث تكون f' و g' متصلتين على I وليكن a و b من I . لدينا :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

IV) جدول الدوال الأصلية الإعتيادية

f الدالة	F دالة أصلية
0	1
$a \neq 0$	ax
x^r $(r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$u'u^r$ $(r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{u'}{u}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
e^x	e^x
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$

f الدالة	F دالة أصلية
$u'e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\arctan(u(x))$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$1+\tan^2(ax+b = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin u(x)$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos u(x)$
$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$	$\tan u(x)$

V) بعـــض التقنيـــــــــات

1) $I=\int \frac{P(x)}{ax+b}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على $ax+b$
ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$.

2) $I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

a) إذا كان $\Delta<0$ نحدد الشكل القانوني $p(x)=ax^2+bx+c$
نحصل على $I=\int \frac{\alpha}{1+(u(x))^2}dx$ ونضع $t=u(x)$

b) إذا كان $\Delta>0$ نعمل $P(x)$ $p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ثم
نستنتج أن $\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta})$ ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$

c) إذا كان $\Delta=0$

$$I=\int\frac{1}{(x-\alpha)^2}dx=\int\frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-\alpha}\right]$$

3) $I=\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$ نجري قسمة $P(x)$ على
ax^2+bx+c ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$ أو $\frac{u'}{1+(u)^2}$.

4) $I=\int P(x)\sqrt[n]{ax+b}dx$ أو $I=\int\frac{P(x)}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$
نضع $t=\sqrt[n]{ax+b}$

5) $I=\int P(x)\cos(ax)dx$ أو $I=\int P(x)\sin(ax)dx$ أو
$I=\int P(x)e^{kx}dx$ ← المكاملة بالأجزاء ونضع

$$\begin{cases} f(x)=P(x)\\ g'(x)=\cos(ax).....\end{cases}$$

6) $I=\int P(x)\cos\ln(x)dx$ أو $I=\int P(x)Arc\tan x dx$
← المكاملة بالأجزاء ونضع

$$\begin{cases} f(x)=\ln x\ \ (ou\ \arctan)\\ g'(x)=P(x)\end{cases}$$

7) $I=\int e^{kx}\cos(ax)dx$ $\quad I=\int e^{kx}\sin(ax)dx$
← المكاملة بالأجزاء مرتين ونجد $I=A+\alpha I$

8) $I=\int\frac{1}{ae^x+b}dx$.

$$I=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(ae^x+b)}dx=\int\frac{e^{-x}}{a+be^{-x}}dx=\int\frac{u'}{u}$$

9) $I=\int\frac{(\ln x)^r}{x}dx$

$$I=\int\frac{(\ln x)^r}{x}dx=\int(\ln x)'(\ln x)^r dx=\left[\frac{1}{r+1}(\ln x)^{r+1}\right]$$

10) $I=\int\frac{u(x)v(x)}{(w(x))^n}dx$

← المكاملة بالأجزاء ونضع

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{w'(x)}{(w(x))^n}\\ g(x)=....\end{cases}$$

V) تطبيقـــات حســـــاب التـــكامــــــل

1) حســــاب المساحات

a) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و $(x'Ox)$ و $x=a$ و $x=b$.
مساحة الحيز (E) هي $A(E)=(\int_a^b|f(x)|dx)\ u.a$

ملاظـــة :

*) إذا كانت $f\geq 0$ يعني C_f يوجد فوق محور الأفاصيل فإن $A(E)=(\int_a^b f(x)\,dx)\ u.a$

*) إذا كانت $f\leq 0$ يعني C_f يوجد تحت محور الأفاصيل فإن $A(E)=(-\int_a^b f(x)\,dx)\ u.a$.

*) إذا كانت تغير الإشارة مثلا فإن
$A(E)=\int_a^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^b f(x)\,dx$.

b) لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a,b]$ $(a<b)$ وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و C_g و $x=a$ و $x=b$.
مساحة الحيز (E) هي $A(E)=(\int_a^b|f(x)-g(x)|dx)\ u.a$

ملاحظــــة :

*) إذا كانت $f\geq g$ يعني C_f يوجد فوق C_g
فإن $A(E)=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$

*) إذا كانت $f\leq g$ يعني C_f يوجد تحت C_g
فإن $A(E)=\int_a^b(g(x)-f(x))dx$

*) إذا كان وضع C_f بالنسبة لـ C_g يتغير
فإن

$$A(E)=\int_a^\alpha(g(x)-f(x))dx+\int_\alpha^b(f(x)-g(x))dx$$

c) إذا كان $\|\vec{i}\|=\alpha cm$ و $\|\vec{j}\|=\beta cm$
فإن وحدة قياس المساحات هو $u.a=\alpha\beta cm^2$

2) حساب الحجـــــوم

a) ليكن (S) مجسما (أنظر الشكل)
وليكن V حجم الجزئ المحصور بـ
(S) و المستويين $z=a$ و $z=b$

إذا كانت الدالة $\begin{array}{l} S:[a,b]\to IR\\ \quad t\ \to S(t)\end{array}$

متصلة على $[a,b]$ فإن $V=(\int_a^b S(t)\,dx)\ u.v$

($S(t)$ هي مساحة الجزئ تقاطع (S) و المستوى $z=t$)

b) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$
إذا دار C_f حول محور الأفاصيل دورة
كاملة فإنه يولد مجسما يسمى مجسم دوران ،
وحجم هذا المجسم هو

$$V=(\int_a^b\pi(f(x)^2)dx\ )u.v$$