معلمة نقطة من حركة المتحرك

ننسب حركة المتحرك الى معلم فضاء ومعلم زمان مرتبطين بجسم مرجعي

*متجهة الموضع :نختار معلم الفضاء $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ متعامد ممنظم

إحداثيات متجهة الموضع: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ بحيث :

z x هي الإحداثيات الديكارتية للمتحرك في معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

وهي تمثل أيضا المعادلات الزمنية لحركة المتحرك ونعبر عنها ب:

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$$

منظم متجهة الموضع: $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

متجهة السرعة اللحظية:

متجهة السرعة اللحظية لمركز قصور جسم صلب تساوي مشتقة متجهة الموضع بالنسبة للزمن ووحدتها هي $m.s^{-1}$: $\overrightarrow{V_G}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

لدينا: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ اذن:

$$\overrightarrow{V_G}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{V_G}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$$

بحيث: $v_x=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}=\dot{x}$ و $v_y=\dfrac{dy}{dt}\vec{j}=\dot{y}$ و $v_z=\dfrac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{z}$

منظم متجهة السرعة : $\left\|\overrightarrow{V_G}\right\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

متجهة التسارع :

متجهة التسارع لمركز قصور جسم صلب تساوي مشتقة متجهة السرعة اللحظية بالنسبة للزمن ووحدتها هي $m.s^{-2}$: $\overrightarrow{a_G}=\dfrac{d\overrightarrow{V_G}}{dt}$

$$\overrightarrow{a_G}=\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt}=\frac{d\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

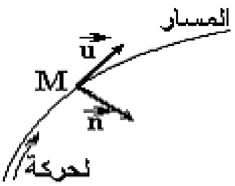
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_G}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

بحيث: $a_x=\dfrac{dv_x}{dt}\vec{i}=\ddot{x}$ و $a_y=\dfrac{dv_y}{dt}\vec{j}=\ddot{y}$ و $a_z=\dfrac{dv_z}{dt}\vec{k}=\ddot{z}$

منظم متجهة التسارع : $\left\|\overrightarrow{a_G}\right\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

متجهة التسارع في أساس فريني

$\left(M;\vec{u};\vec{n}\right)$:



أصله M ينطبق مع موضع المتحرك في كل لحظة

$\vec{u}$: متجهة واحدية مماسة للمسار وموجهة في منحى الحركة

$\vec{n}$: متجهة واحدية منظمية على المسار وموجهة نحو تقعره

تعبير التسارع في أساس فريني : $\vec{a}=\vec{a_T}+\vec{a_N}=a\vec{u}+a.\vec{n}$

متجهة منظم التسارع $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{a_T^2+a_N^2}$

بحيث: $a_T=\dfrac{dv}{dt}$ و $a_N=\dfrac{V^2}{R}$ و R هي شعاع المسار

قوانين نيوتن :

القانون الأول:مبدأ القصور

في معلم غاليليا, اذا كان مجموع القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب منعدم فان متجهة سرعة مركز القصور تكون ثابتة : $\sum\overrightarrow{F_{ext}}=\vec{0}$

القانون الثاني: العلاقة الأساسية للديناميك

في معلم غاليليا , مجموع متجهات القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب يساوي في كل لحظة, جداء كتلة الجسم ومتجهة تسارع مركز القصور:

$$\sum\overrightarrow{F_{ext}}=m.\overrightarrow{a_G}$$

القانون الثالث: التأثيرات المتبادلة

$$\vec{F}_{A/B}=-\vec{F}_{B/A}$$

	حركة مستقيمية منتظمة	حركة مستقيمية متغيرة بانتظام
التسارع	$a_G=0$	$a_G\neq 0\Rightarrow a_G=cte$
المعادلة الزمنية السرعة	$V_G=cte$	$V_G(t)=at+V_0$
المعادلة الزمنية للحركة	$x(t)=at+x_0$	$x(t)=\frac{1}{2}at^2+V_0t+x_0$

ملحوظة:

اذا كان: $a_G\succ 0$:تكون حركة مستقيمية متغيرة بانتظام متسارعة

$a_G\prec 0$: حركة مستقيمية متغيرة بانتظام متباطئة

العلاقة المستقلة عن الزمن :

$$V_B^2-V_A^2=2.a_G.(x_B-x_A)$$

IV تطبيقات:

المراحل المتبعة لتطبيق القانون الثاني لنيوتن هي كما يلي:

المرحلة الأولى: تحديد المجموعة المدروسة.

المرحلة الثانية: جرد القوى وتمثيلها على الشكل.

المرحلة الثالثة: كتابة العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن بالنسبة للمجموعة المدروسة (وهي علاقة متجهية).

المرحلة الرابعة: اختيار معلم مناسب.

المرحلة الخامسة: إسقاط العلاقة المعبرة عن القانون الثاني لنيوتن في هذا المعلم.

دراسة حركة قذيفة:

المجموعة المدروسة: القذيفة

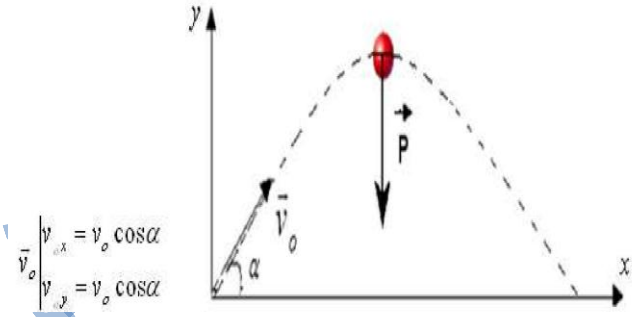
القوى المطبقة : $\vec{P}$ وزن الكرية

بتطبيق القانون الثاني للنيوتن على الكرية :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة السابقة على محور $R(o;x;y)$



*على المحور (ox)

$\vec{P}_x \perp (ox)$ لان $\vec{P}_x = m.\vec{a}_{Gx} \Leftrightarrow 0 = m.a_{Gx} \Leftrightarrow a_{Gx} = 0$

*على المحور (oy)

$\vec{P}_y = m.\vec{a}_{Gy} \Leftrightarrow -m.g = m.a_{Gy} \Leftrightarrow a_{Gy} = -g$

المعادلات الزمنية التي يحققها التسارع

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_{Gx} = 0 \\ a_{Gy} = -g \end{cases}$$

المعادلات الزمنية التي تحققها سرعة مركز القصور

* $V_x = \int a_{Gx} = cte$ ولدينا أن $V_{0x} = cte$ اذن $V_x = V_{0x}$

ومنه فان $V_{0x} = V_0\cos\alpha$ $V_x = V_0\cos\alpha$

* $V_y = \int(-g)dt = -g\,t + V_{0y}$ و $V_{0y} = V_0\sin\alpha$ اذن:

$V_y = -g\,t + V_0\sin\alpha$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_0\cos\alpha \\ V_y = -g\,t + V_0\sin\alpha \end{cases}$$

المعادلات الزمنية التي تحققها احداثيات مركز القصور

* $x = \int(V_0\cos\alpha)dt = V_0\cos\alpha t + x_0$

لنحدد x_0 : ناخذ عند اللحظة $t = 0$

لدينا $x_0 = 0$ اذن : $x = V_0\cos\alpha t$

* $y = \int(-g\,t + V_0\sin\alpha)dt = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_0\sin\alpha t + y_0$

لنحدد y_0 : ناخذ عند اللحظة $t = 0$. لدينا $y_0 = 0$

اذن : $y = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_0\sin\alpha t$

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = V_0\cos\alpha t \\ y = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_0\sin\alpha t \end{cases}$$

معادلة المسار

نأخذ المعادلة الزمنية التالية : $x = V_0\cos\alpha t$ ثم نجد : $(1)\,t = \frac{x}{V_0\cos\alpha}$

فنعوضها في المعادلة الزمنية : $y = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_0\sin\alpha t$

$$y = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + V_0\sin\alpha.\frac{x}{V_0\cos\alpha}$$

فنجد :

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V_0^2\cos\alpha^2} + \cancel{V_0}\sin\alpha.\frac{x}{\cancel{V_0}\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V_0^2\cos\alpha^2} + (\tan\alpha).x$$

المسار شلجمي

احداثيات قمة المسار

$$\begin{cases} x_f = \dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g} \\ y_f = \dfrac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

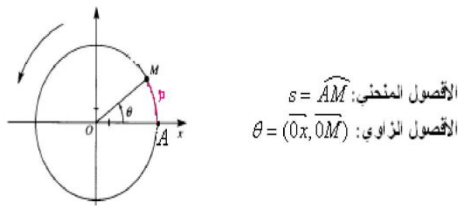
احداثيات المدى

$$\begin{cases} x_f = \dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{g} \\ y_f = 0 \end{cases}$$

معلمة موضع المتحرك

الافصول الزاوي والافصول المنحنى

العلاقة بين الافصول المنحني و الزاوي $(m) \rightarrow s = R.\theta$



السرعة الزاوية

*هي مشتقة الافصول الزاوي بالنسبة للزمن $rad.s^{-1} \rightarrow \omega = \dot\theta = \frac{d\theta}{dt}$

*السرعة الخطية: مشتقة الافصول المنحني بالنسبة للزمن: $m.s^{-1} \rightarrow v = \frac{ds}{dt}$

العلاقة بين السرعة الزاوية والسرعة الخطية :

لدينا ان : $s = R.\theta$ اذن : $v = R.\dot\theta \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt}$

التسارع الزاوي

هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن: $m.s^{-2} \rightarrow \ddot\theta = \frac{d\dot\theta}{dt}$

التسارع الخطي: $a_G = R.\ddot\theta$

العلاقة الاساسية للديناميك لجسم صلب في دوران حول محور ثابت

في معلم مرتبط بالرض , وبالنسبة لمحور ثابت (Δ) مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محورثابت, يساوي في كل لحظة جداء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot\theta$ للجسم :

$$\sum M(\vec F) = \underbrace{J_\Delta}_{kg.m^{-2}}.\ddot\theta \leftarrow rad.s^{-2}$$

	الدوران المنتظم	الدوران المتغير بانتظام
التسارع	$\ddot\theta = 0$	$\ddot\theta \neq 0$
المعادلة الزمنية للسرعة الزاوية	$\dot\theta = cte \Rightarrow \dot\theta = \dot\theta_0$	$\dot\theta(t) = \ddot\theta t + \dot\theta_0$
المعادلة الزمنية للافصول الزوي	$\theta(t) = \dot\theta t + \theta_0$	$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot\theta t^2 + \dot\theta t + \theta_0$

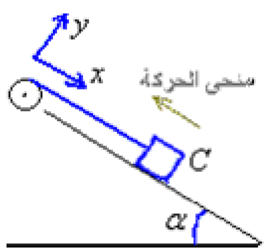
تطبيقات

نعتبر مجموعة ميكانيكية مكونة من:

*بكرة (D) كتلتها m_0 وشعاعها r قابلة للدوران حول محور ثابت

*جسم صلب (C) كتلته m موضوع فوق مستوى مائل بزاوية α

(C)*خيط غير قابل للامتداد ملفوف حول مجرى البكرة وطرفه الاخر مثبت بالجسم



1)نحرر المجموعة فينزلق الجسم نحو الاسفل (الاحتكاكات مهملة)

عبر عن تسارع المجموعة بدلالة m_0, m, α, g

*المجموعة المدروسة{ الجسم}

*جرد القوى : الجسم C يخضع للقوى التالية : * $\vec P$ وزنه .

* $\vec R$: تأثير المستوى المائل.

$\vec T$: القوة المطبقة من طرف الخيط.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم أثناء حركته في معلم $R(0;\vec i;\vec j)$

$$\sum \vec F = m.\vec a_G \Leftrightarrow \vec P + \vec R + \vec T = m.\vec a_G$$

نسقط على المحور (oy): $\vec P_y + \vec R_y + \vec T_y = m.\vec a_{Gy}$

فنجد $P\cos\alpha - R_N = 0 \Leftrightarrow P\cos\alpha = R_N$

نسقط على المحور (ox): $\vec P_x + \vec R_T + \vec T_x = m.\vec a_{Gx}$

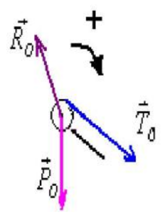
فنجد : $-P\sin\alpha + T = m.a_x$

$\Leftrightarrow T = P\sin\alpha + m.a \quad (1)$

* المجموعة المدروسة{البكرة}

* جرد القوى : تخضع البكرة للقوى التالية:

- $\vec P_0$: وزنها.
- $\vec R_0$: تأثير محور الدوران.
- $\vec T_0$: القوة المطبقة من طرف الخيط.



* تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة $\sum M(\vec F) = J_\Delta.\ddot\theta$

أي: $M_\Delta(\vec P_O) + M_\Delta(\vec R_O) + M_\Delta(\vec T_O) = J_\Delta.\ddot\theta$

لان $M_\Delta(\vec P_0) = M_\Delta(\vec R_0) = 0$ ، $\vec P_0 \perp \vec R_0$

و $M_\Delta(\vec T_0) = -T_0.r$

اذن : $(2) -T_0.r = J_\Delta.\ddot\theta \Leftrightarrow T_0 = -\frac{J_\Delta.\ddot\theta}{r}$

و لدينا $T_0 = T$ لان كتلة الخيط مهملة وغير قابل للامتداد: اذن من

(1) و(2) نستنتج أن $P\sin\alpha + m.a = -\frac{J_\Delta.\ddot\theta}{r}$

ونعلم ان : $a = R.\ddot\theta$ ومنه فان

$$P\sin\alpha = -\frac{J_\Delta.a}{r^2} - m.a \Leftrightarrow m.g.\sin\alpha = a\left(-\frac{J_\Delta}{r^2} - m\right)$$

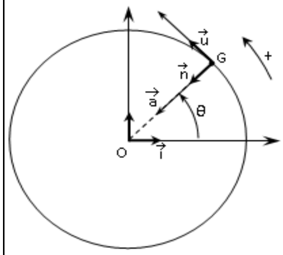
:
$$\Leftrightarrow a = \frac{m.g.\sin\alpha}{-\frac{J_\Delta}{r^2} - m} = \frac{m.g.\sin\alpha}{-\frac{m_0.r^2}{2.r^2} - m}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m.g.\sin\alpha}{-\frac{m_0}{2} - m} \Leftrightarrow a = \frac{-g.\sin\alpha}{\frac{m_0}{2} + 1}$$

دروس الدعم والتقوية - محمد أمين

1)قانون نيوتن لتجاذب الكوني

نعتبر جسمين نقطيين كتلتهما على التوالي m_A وm_B وتفصل بينهما المسافة $d=AB$ يطبق أحدهما على الاخر قوة تجاذب تسمى قوة التجاذب الكوني



$$\vec F = -G\frac{m_A.m_B}{d^2}\vec u_{AB}$$

2)تبيان أن الحركة دائرية منتظمة

نطبق نيوتن على الكرية فنجد أن :

$$\sum\vec F = m\vec a_G \Leftrightarrow \vec F = m\vec a_G$$

ثم نسقط العلاقة على أساس فريني :

على المحور المماسي $\vec u$:

$\vec F = m\vec a_u$ ولدينا أن $\vec F=0$ لان :

ونعلم ان $\vec F\perp \vec a_u$ و $\vec a_u=\frac{d\vec v}{dt}$ اذن $\frac{dv}{dt}=0 \Leftarrow 0=m.\frac{dv}{dt}$

وبما أن: $\frac{d\vec v}{dt}=0$ اذن الحركة دائرية منتظمة

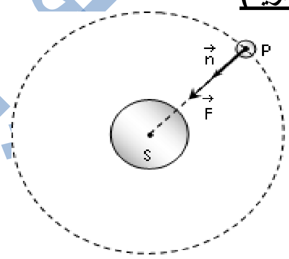
على المحور المماسي $\vec n$:

$\vec F = m\vec a_n \Leftrightarrow F = m.a_n \Leftrightarrow F = m.\frac{v^2}{r}$ مع أن : $\vec a_n=\frac{v^2}{r}\vec n$

إذن طبيعة الحركة انجذابية مركزية لان $\vec a=\vec a_n=\frac{v^2}{r}\vec n$

3)دراسة حركة كوكب حول الشمس (الحركة المدارية)

متجهة تسارع مركز قصور الكوكب :



نطبق نيوتن على الكوكب فنجد أن :

$$\sum\vec F = m\vec a_G \Leftrightarrow \vec F = m\vec a_G$$

و: $\vec a=\vec a_P$ و $\vec F=-G\frac{M_S.m}{r^2}\vec u_{SP}$

ومنه فان : $\vec a_P=-G\frac{M_S}{r^2}\vec u_{SP}$

السرعة والدور المداري

السرعة المدارية

لدينا $\vec a_P=-G\frac{M_S}{r^2}\vec u_{SP}$ و $\vec a_P=\frac{v^2}{r}\vec n$ اذن

ومنه فان : $-G\frac{M_S}{r^2}\vec u_{SP}=\frac{v^2}{r}\vec n$ و $\vec n=-\vec u_{SP}$

$$G\frac{M_S}{r^2}\vec n=\frac{v^2}{r}\vec n \Leftrightarrow G\frac{M_S}{r^2}=\frac{v^2}{r}\Leftrightarrow v^2=G\frac{M_S}{r}$$

$$\Leftrightarrow v=\sqrt{G\frac{M_S}{r}}$$

الدور المداري

نعلم ان $T=\frac{2\pi}{\omega}$ و $\omega=\frac{v}{r}$ اذن

$$T=\frac{2\pi}{\frac{v}{r}}\Leftrightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{G\frac{M_S}{r}}}{r}}\Leftrightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

4) دراسة الحركة المدارية لقمر اصطناعي حول الارض (الاستقمار)

متجهة تسارع مركز قصور الكوكب :

نطبق نيوتن على الكوكب فنجد أن :

$$\sum\vec F = m\vec a_G \Leftrightarrow \vec F = m\vec a_G$$

و: $\vec a=\vec a_{sat}$ و $\vec F=-G\frac{M_T.m}{(r+h)^2}\vec u_{T,SAT}$

ومنه فان : $\vec a_{SAT}=-G\frac{M_T.m}{(r+h)^2}\vec u_{T,SAT}$ مع h الارتفاع عن سطح الأرض

السرعة والدور المداري

السرعة المدارية

لدينا $\vec a_{SAT}=-G\frac{M_T.m}{(r+h)^2}\vec u_{T,SAT}$ و $\vec a_{SAT}=\frac{v^2}{r}\vec n$ اذن

$\frac{v^2}{r}\vec n=-G\frac{M_T.m}{(r+h)^2}\vec u_{T,SAT}$ و $\vec u_{T,SAT}=-\vec n$ ومنه فان :

$$G\frac{M_T}{r^2}\vec n=\frac{v^2}{r}\vec n\Leftrightarrow G\frac{M_T}{(r+h)^2}=\frac{v^2}{(r+h)}\Leftrightarrow v^2=G\frac{M_S}{(r+h)}$$

$$\Leftrightarrow v=\sqrt{G\frac{M_S}{(r+h)}}$$

الدور المداري

نعلم ان $T=\frac{2\pi}{\omega}$ و $\omega=\frac{v}{r}$ اذن

$$T=\frac{2\pi}{\frac{v}{r}}\Leftrightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{G\frac{M_S}{(r+h)}}}{r}}\Leftrightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{(r+h)^3}{G.M_S}}$$

*يكون قمر اصطناعي ساكنا بالنسبة لملاحظ ارضي إذا كان للقمر اصطناعي نفس دور الأرض

قانون كيبلر الثالث

$\frac{T^2}{a^3}=K=cte$ حيث a^3 نصف المحور الكبير للاهليلج و T الدور المداري للكوكب.

دروس الدعم والتقوية - محمد أمين -