الثلاثاء 18 يوليو 2017

المسألة 1. لكل عدد صحيح $a_0 > 1$ نعرّف المتتابعة $a_0, a_1, a_2, \ldots$ كما يلي:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{if } \sqrt{a_n} \text{ is an integer,} \\ a_n + 3 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{for each } n \geq 0.$$

أوجد كل قيم a_0 بحيث يوجد عدد A و $a_n = A$ لقيم غير منتهية من n.

المسألة 2. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية. أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

لكل الأعداد الحقيقية x, y.

المسألة 3. لدينا صياد و أرنب غير مرئي يلعبان لعبة في المستوى الأقليدي. نقطة بداية الأرنب هي A_0، وهي نفس نقطة بداية الصياد B_0. بعد $n-1$ من الجولات موقع الأرنب عند النقطة A_{n-1} وموقع الصياد عند النقطة B_{n-1}. في الجولة n من اللعبة تحدث الأمور التالية على الترتيب:

(i) يتحرك الأرنب بصورة غير مرئية إلى النقطة A_n، بحيث أن المسافة بين A_{n-1} و A_n تساوي 1 بالضبط.

(ii) جهاز المراقبة لدى الصياد لا يضمن له إلا أن يخبره عن نقطة P_n، حيث أن المسافة بين P_n و A_n هي على الأكثر 1.

(iii) يتحرك الصياد بصورة مرئية إلى النقطة B_n، بحيث أن المسافة بين B_{n-1} و B_n تساوي 1 بالضبط.

بغض النظر عن كيفية حركة الأرنب وأياً كانت النقط التي يرصدها جهاز المتابعة عند الصياد، هل يستطيع الصياد اختيار حركاته بحيث بعد 10^9 من الجولات يمكنه التأكد بأن المسافة بينه و بين الأرنب هي على الأكثر 100؟

الزمن: 4 ساعات ونصف

سبع درجات لكل سؤال

الأربعاء 19 يوليو 2017

المسألة 4 . لتكن R و S نقطتين مختلفتين على الدائرة Ω بحيث أن RS ليس قطراً. ليكن l مستقيماً مماساً للدائرة Ω في النقطة R . نختار النقطة T بحيث أن S تقع في منتصف القطعة المستقيمة RT . كما نختار النقطة J على القوس الأقصر RS من الدائرة Ω بحيث أن الدائرة المحيطة Γ للمثلث JST تقطع l في نقطتين مختلفتين. لتكن A نقطة تقاطع Γ مع l و التي هي الأقرب إلى R . المستقيم AJ يقطع Ω مرة أخرى في K . أثبت أن المستقيم KT يمس الدائرة Γ .

المسألة 5 . لدينا العدد الصحيح $N \geq 2$. توجد مجموعة تحوي $N(N+1)$ من لاعبي كرة القدم بحيث أن أطوالهم مختلفة و يقفون في صف واحد. المدرب طارق يريد أن يستبعد $N(N-1)$ من اللاعبين من هذا الصف بحيث يبقى $2N$ منهم و يحققون شروطاً عددها N كما يلي:

(1) لا يوجد لاعب بين أطول لاعبين،

(2) لا يوجد لاعب بين اللاعبين الثالث طولاً و الرابع طولاً ،

$\vdots$

(N) لا يوجد لاعب بين أقصر لاعبين.

بين أن طارق يستطيع أن ينجز هذا.

المسألة 6 . يقال عن زوج مرتب من الأعداد الصحيحة (x,y) أنه بدأئي إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y يساوي 1 . لتكن S مجموعة منتهية من الأزواج البدائية، أثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب n و أعداد صحيحة $a_0, a_1, \ldots, a_n$ بحيث لكل (x,y) في S لدينا

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1$$

الزمن: 4 ساعات ونصف

سبع درجات لكل سؤال

Language: ARABIC