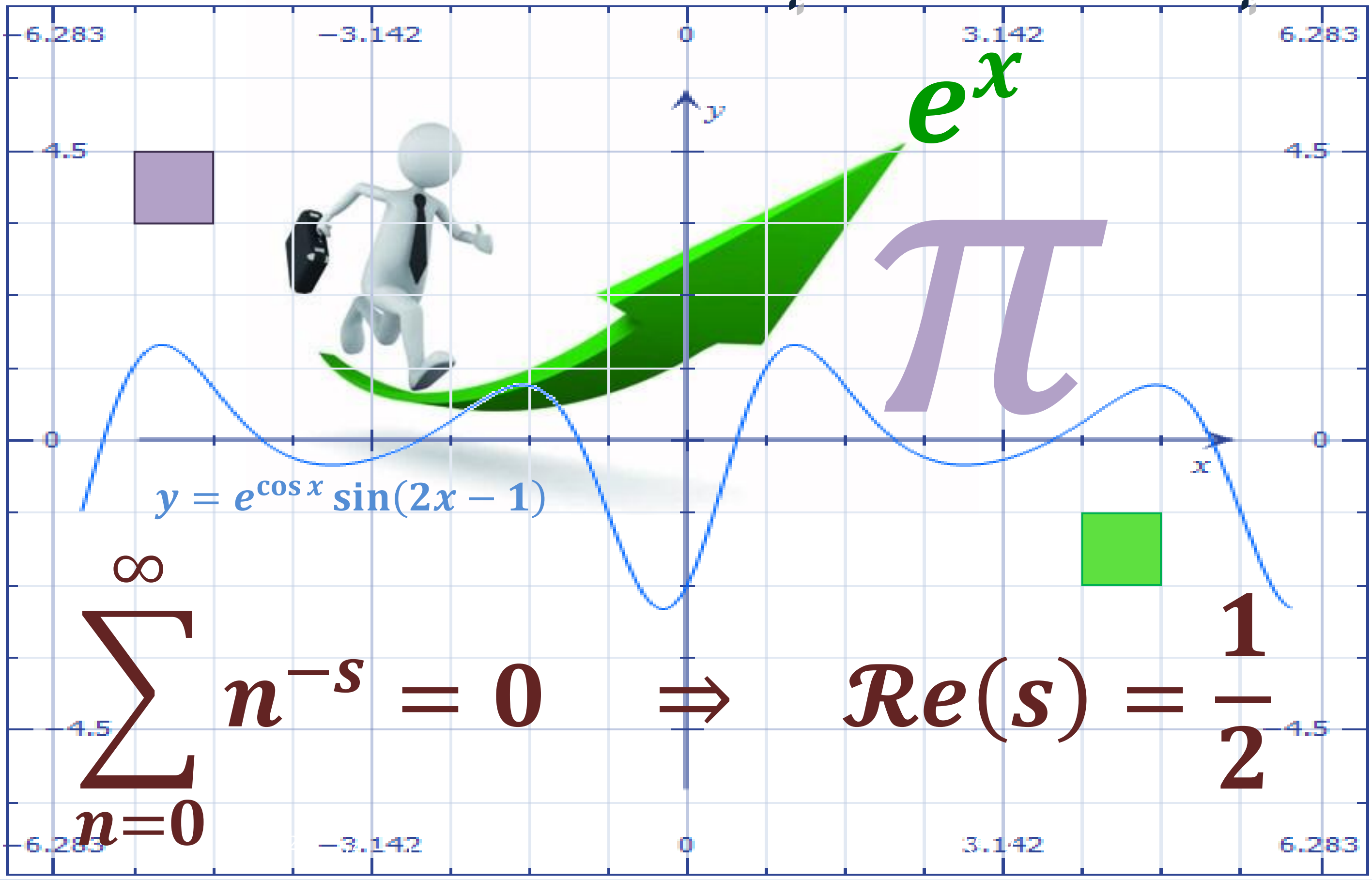
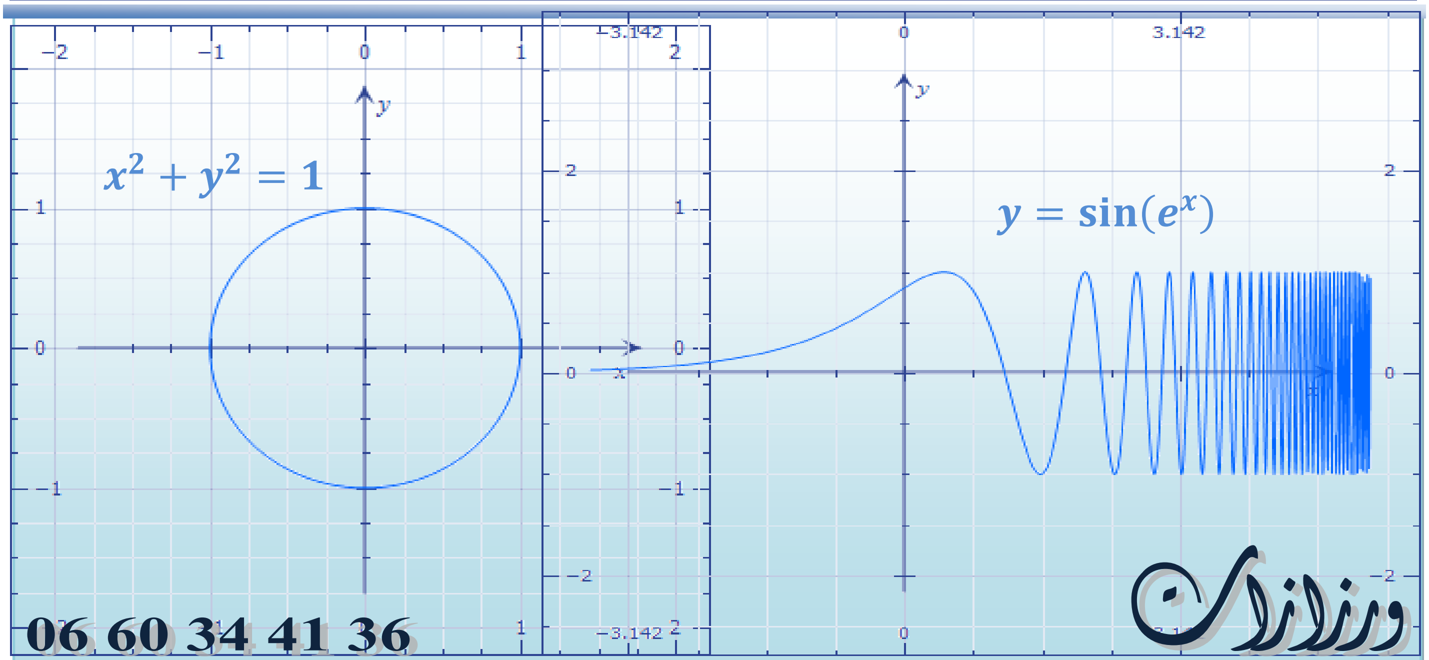
الامتحانات الوطنية لنيل شهادة البكالوريا

من 2003 إلى 2013 في مادة الرياضيات لفائدة تلاميذ السنة الثانية بكالوريا شعبة العلوم الرياضية أ و ب

عمل تطوعي من إنجاز الأستاذ بدر الدين الفاتحي - http://www.professeurbadr.blogspot.com





بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

بدأ المغرب في تطبيق نظام الامتحان الوطني الموحد منذ الموسم الدراسي 2002 – 2003 ، حيث كانت أول دورة للامتحان الوطني الموحد هي دورة يونيو 2003. و سعيا منها إلى تكريس مبدأ المساواة بين كافة أبناء المغرب، قننت الوزارة الإجراءات المصاحبة لهذا النظام في قوانين أساسية تسمى بالأطر المرجعية للامتحان الوطني الموحد على مستوى كل مادة دراسية.

و منذ ذلك الحين صدرت عدة مذكرات وزارية لمراجعة و تصحيح الاختلالات التي تشوب تطبيق مقتضيات هذا النظام، و ذلك لتوخي الدقة و الموضوعية و ضمان مرور العملية في الظروف التي تجعل من شهادة البكالوريا المغربية ذات مصداقية و جودة عالمية.

الامتحان الوطني الموحد في مادة الرياضيات الخاص بشعبة العلوم الرياضية بسلكيها (أ) و (ب)، يضعنا أمام إشكالية حقيقية و هي طبيعة التلميذ الذي يجتاز الامتحان بنجاح. هل هو التلميذ الآلي و الميكانيكي الذي يجتر طرق الآخرين في الحل و يرد بضاعة قد بيعت له مسبقا؟ أم هل هو التلميذ المفكر المتعمق و المتأمل في المسائل الرياضياتية أياما و ليالي و الذي غالبا ما ينتهي به سلوكه هذا إلى الدورات الاستدراكية؟

أرى أن التلميذ السليم هو الذي يأخذ من هذا و ذاك. فهو يحفظ ما هو تقليدي و كلاسيكي في الرياضيات لتفادي تضييع الوقت : و أقصد بذلك الخوارزميات و بعض منهجيات الإجابة على بعض التمارين التقليدية. و يتأمل في الأسئلة الغريبة و التي وضعت ربما لأول مرة.

يضم موضوع الرياضيات في غالب الأحيان أربعة أو خمسة تمارين يكون التلميذ مطالبا بإنجاز ما يستطيع في ظرف زمني لا يتعدى أربع ساعات.

التمرين الأول : يتعلق عادة بالبنيات الجبرية و يمتحن التلاميذ في قدرتهم على التعامل مع مفاهيم الزمرة و الحلقة و الجسم و الاستقرار و التبادلية و التشاكل و الزمرة الجزئية و حل معادلات في مجموعات غير اعتيادية كمجموعة المصفوفات.

التمرين الثاني : يتعلق عادة بالأعداد العقدية و يمتحن التلاميذ في قدرتهم على التعامل مع العدد العقدي في شكليه الجبري و المثلثي و ربط ذلك بحل بعض المسائل الهندسية التي توظف الإزاحة و الدوران و التحاكي في المستوى العقدي. و قد يتم في بعض الأحيان إدراج المخروطيات في دراسة عقدية تستدعي من التلميذ التمكن من الاهليلج و الهذلول و الدائرة و مميزاتهم.

التمرين الثالث : قد يضم تمرين في الحسابيات و عندها تقترح بعض الأسئلة التي يجب على التلميذ استحضار مبرهنات $(Gauss)$ و $(Fermat)$ و $(Bezout)$ في حلها. كما يكون التلاميذ مطالبين بضبط تقنيات الحساب بالموافقة بترديد. و يوظف كل ذلك في هدف عام و هو حل معادلات مُمَيَّزة في $\mathbb{Z}^2$ و $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ أو دراسة نوع معين من الأعداد في $\mathbb{N}$ أو في $\mathbb{Z}$.

و قد يتعلق التمرين الثالث بالاحتمالات و فيها يتحتم على التلميذ استحضار كفاءته التجريدية في التفكير و نمذجة التجارب العشوائية بطرق سليمة. كما يجب على التلاميذ حفظ قواعد الحساب في الفضاءات الاحتمالية المقترحة في التمرين: و أقصد بذلك الاحتمال الشَّرطي و الاستقلالية و الأمل الرياضي و المغايرة.

التمرين الرابع (و **الخامس** إن وجد) : يضم مسألة في التحليل و هي تعالج في غالب الأحيان تمثيل دالة عددية في المستوى الحقيقي، أو دراسة حلول معادلة، أو دراسة تقارب متتالية أو حساب تكامل أو دراسة دالة معرفة بتكامل. و توظف في هذه الدراسة المبرهنات الأساسية :$(Rolle)$ و (TAF) و (TVI) و تقنيات التأطير و حساب النهايات و دراسة الرتابة و التعامل مع المتتاليات و التقارب.

في المسألة المتعلقة بالتحليل يجب دائما التمرن على استغلال نتائج الأسئلة السابقة لأن المسألة تكون عادة متكاملة و الأسئلة فيها متسلسلة و مترابطة.كما يجب على التلاميذ التدرب على استعمال الآلة الحاسبة العادية ، لأنها تساعد في التأكد من صحة بعض النتائج بشرط أن تكون غير قابلة للبرمجة. و حتى إن كانت كذلك فهي لا تُغْنِي عنك من البرهان شيئا. و اعلم في الأخير أنه ما دام تفكيرك يؤول إلى 20 فإن النقط التي سوف تحصل عليها تُشكل متتالية متقاربة و تؤول إلى الصفر. إن الحصول على معدل جيد في الدورة العادية خير من أن تُحال على الدورة الإستدراكية التي تضم في غالب الأحيان تمارين أكاد أرى بعضا منها مستحيلا إنجازه في أربع ساعات . و أستحضر هنا موضوع الدورة الاستدراكية 2007.

أسأل الله العلي القدير أن يكون هذا العمل التطوعي بداية لخدمة الصالح العام . و أجعل الختام صلاة على نبينا محمد بن عبد الله : فاللهم صل على محمد و آله . و السلام عليكم و رحمة الله و بركاته.

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية : $\boxed{(E)\ :\ x^2(x^2+7)=y(2x+y)}$

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x=\delta a$ و $y=\delta b$

1. نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

0,50 ن — أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)$

0,50 ن — ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2a^2+7=kb$ و $2a+b=ka^2$

0,50 ن — ج) بين أن : $a=1$

0,75 ن — د) إستنتج أن : $(b+1)^2=\delta^2+8$

0,75 ن — 2. حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

0,50 ن — 1. أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده.

0,50 ن — ب) أرسم المنحنى (E) .

0,75 ن — 2. لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما : $(4;0)$ و $(0;3)$

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

نضع : $x_1=4\cos(t_1)$ حيث : $0\leq t_1\leq\frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

1,00 ن — أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x=4\cos(t)$ حيث : $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

بين أن : $I(x_1)=6t_1-3\sin(2t_1)$

0,75 ن — ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E) .

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

0,25 ن ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin(t_1)$

0,25 ن ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن و) بين أن : $t_1 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow S(x_1) = \frac{1}{2}S$

0,25 ن هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $\boxed{E = \{M_{(a,b)} \ / \ (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\}}$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

0,75 ن ① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,25 ن ② بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و احدية.

0,50 ن ③ أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x = y = 0) \Leftrightarrow (x^2+xy+y^2 = 0)$

0,25 ن ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$

0,50 ن ج) إستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

0,25 ن ① بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

0,75 ن ② نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \psi & : & E & \to \mathbb{C} \\ & & M_{(a,b)} & \to a+\sigma b \end{array}}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

0,75 ن ③ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حليها على الشكل المثلثي

0,50 ن ④ نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{4\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{2}$

(I) و ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وحدته : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$

0,50 ن ① أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$

0,25 ن ②أ بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ \ ;\ \ f'(x) = 4\left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right)$

0,75 ن ب إعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن ③ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$

0,50 ن ④ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1

0,75 ن ⑤ أرسم $(\mathscr{C})$

0,25 ن (II) ① بين أن : $\forall\ t\ \epsilon\ [0;+\infty[\ \ ;\ \ 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

0,50 ن ② استنتج أن : $\forall\ a\ \epsilon\ [0;+\infty[\ \ ;\ \ a - \dfrac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$

(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n \geq 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \dfrac{n\ ln\ x}{x^2} - \dfrac{1}{2}$

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .

0,50 ن ① أدرس تغيرات الدالة f_n .

0,50 ن ② أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$

0,25 ن ③أ قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x .

0,25 ن ب استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$.

0,50 ن ④ بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

0,50 ن ⑤ بين أن $(u_n)_{n\geq4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال ③

0,25 ن ⑥أ باستعمال (II)② بين أن : $(\forall n \geq 4)\ ;\ \dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$

0,25 ن ب استنتج أن : $(\forall n \geq 4)\ ;\ \dfrac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

0,25 ن ج بين أن : $(\forall n \geq 4)\ ;\ \dfrac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \dfrac{e}{n}$

0,50 ن د استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq4}$ متقاربة محددا نهايتها

0,50 ن ⑦أ بين أن : $(\forall n \geq 4)\ ;\ e^{\frac{5}{6}} < v_n$

0,50 ن ب استنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} v_n = +\infty$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ 1 أ

لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2+7)=y(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\delta a)^2((\delta a)^2+7)=(\delta b)(2\delta a+\delta b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)} \; (*)$$

■ 1 ب

لدينا : $x\wedge y=\delta$

$$\Leftrightarrow \quad \delta a\wedge \delta b=\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad a\wedge b=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a^2\wedge b=1} \quad (1)$$

و لدينا حسب النتيجة $(*)$: $b \;/\; a^2(\delta^2a^2+7)$

و بما أن $a^2\wedge b=1$ وذلك حسب النتيجة (1)

فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{b \;/\; (\delta^2a^2+7)}$

و منه : $(\exists k\in\mathbb{Z})$: $(\delta^2a^2+7)=kb$

في المعادلة $(*)$ نعوض التعبير (δ^2a^2+7) بالتعبير kb نجد :

$$kba^2=b(2a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ka^2=(2a+b)}$$

■ 1 ج

ننطلق من الكتابة : $ka^2=2a+b$

$$\Leftrightarrow \quad a(ka-2)=b$$

$$\Rightarrow \quad a \;/\; b$$

$$\Rightarrow \quad a \;/\; 1b$$

و بما أن : $a\wedge b=1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $\boxed{a \;/\; 1}$

و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه

و بالتالي : $\boxed{a=1}$

■ 1 د

نعوض a بالعدد 1 في المعادلة $(*)$ نجد : $\delta^2+7=b(2+b)$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7=b^2+2b$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+7+1=b^2+2b+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta^2+8=(b+1)^2$$

■ 2

ننطلق من الكتابة : $(b+1)^2=\delta^2+8$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1)^2-\delta^2=8$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1-\delta)(b+1+\delta)=8$$

نفصل هنا بين أربع حالات :

الحالة الأولى :

$$\begin{cases} b+1-\delta=-1 \\ b+1+\delta=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-11}{2} \\ \delta=\dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{77}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=-8 \\ b+1+\delta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-11}{2} \\ \delta=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{-77}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الثانية :

$$\begin{cases} b+1-\delta=1 \\ b+1+\delta=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{7}{2} \\ \delta=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{49}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=8 \\ b+1+\delta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{7}{2} \\ \delta=\dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-7}{2}\notin\mathbb{N} \\ y=\dfrac{-49}{4}\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الثالثة :

$$\begin{cases} b+1-\delta=2 \\ b+1+\delta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \delta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=1\in\mathbb{N} \\ y=2\in\mathbb{N} \end{cases}}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=4 \\ b+1+\delta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ \delta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\notin\mathbb{N} \\ y=-2\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

الحالة الرابعة :

$$\begin{cases} b+1-\delta=-2 \\ b+1+\delta=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ \delta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\notin\mathbb{N} \\ y=4\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b+1-\delta=-4 \\ b+1+\delta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ \delta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\in\mathbb{N} \\ y=-4\notin\mathbb{N} \end{cases}$$

نستنتج من هذه الدراسة أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $(\mathbb{N}^*)^2$

و هو الزوج : $(x,y)=(1,2)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ ① أ

يكون التعبير $\sqrt{16-x^2}$ معرَّفا إذا كان $16-x^2\geq 0$

و يبين الجدول التالي إشارة : $(16-x^2)=(4-x)(4+x)$

	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$(4-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(16-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

يكون إذن التعبير $\sqrt{16-x^2}$ مُعَرَّفا إذا كان $x\,\epsilon\,[-4;4]$

و لدينا : $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\geq 0$

$$\Longrightarrow\quad y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$$

$$\Longrightarrow\quad y^2+\frac{9}{16}x^2=9$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

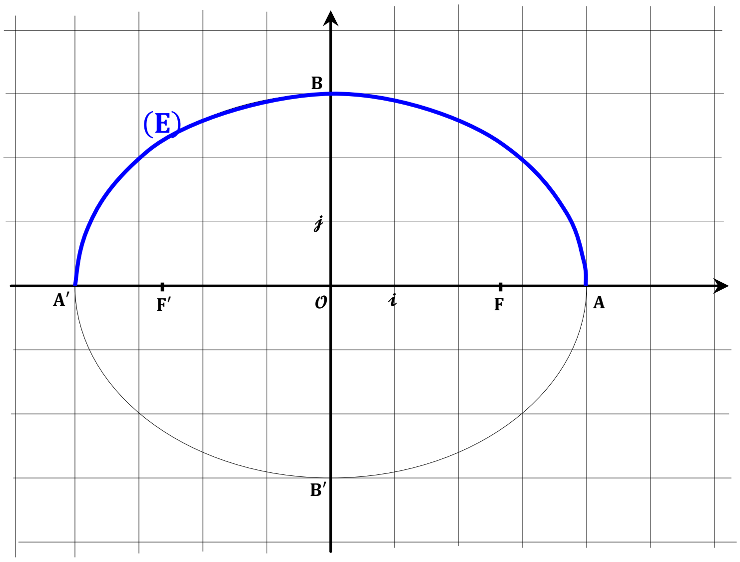
$$\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\quad;\quad x\,\epsilon\,[-4;4]\;;\;y\geq 0}$$

إذن : (E) هو النصف العلوي للإهليلج الذي مركزه O

و رؤوسه $A(4,0)$ و $A'(-4,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$

و بؤرتاه : $F(\sqrt{7};0)$ و $F'(-\sqrt{7};0)$

■ ① ب



■ ② أ

لدينا : $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

نضع : $x=4\cos t$ إذن : $dx=-4\sin t\;dt$

إذا كان $x=x_1$ فإن : $t=t_1$ لأن : $x_1=4\cos t_1$

إذا كان $x=4$ فإن : $t=0$ لأن : $\left(0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$

إذن :

$$I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{t_1}^{0}(4\sin t)(-4\sin t)\,dt=-12\int_{t_1}^{0}\sin^2 t\,dt$$

نعلم أن : $\sin^2 t=\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)$

و ذلك بإخطاط الدالة المثلثية $t\to\sin^2 t$

إذن : $I(x_1)=-12\int_{t_1}^{0}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$

$$\Leftrightarrow\quad I(x_1)=-12\left(\left[\frac{t}{2}\right]_{t_1}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{t_1}^{0}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad I(x_1)=-12\left(\frac{-t_1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin 2t_1}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{I(x_1)=6t_1-3\sin 2t_1}$$

■ ② ب

لدينا M_1 نقطة من (E) و أفصولها x_1 .

إذن : أرتوبها y_1 يحقق ما يلي :

$$y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16-(4\cos t_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16(1-\cos^2 t_1)}$$

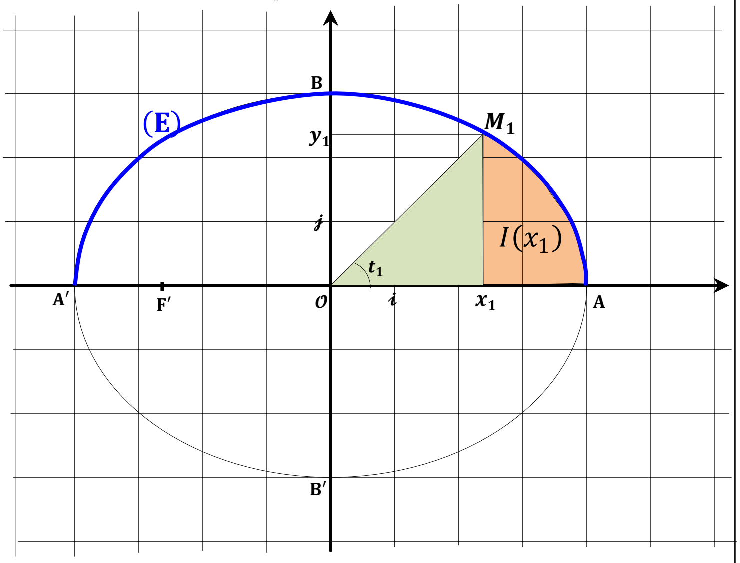
$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\sqrt{16\sin^2 t_1}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_1=\frac{3}{4}\cdot 4\sin t_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{y_1=3\sin t_1}$$

■ ② ج

نستعين بالشكل التالي :



لدينا حسب هذا الشكل : $\mathcal{S}(x_1) = \mathcal{S}(Ox_1M_1) + I(x_1)$

$$= \frac{x_1 \times y_1}{2} + I(x_1)$$

$$= \frac{4\cos(t_1) \times 3\sin(t_1)}{2} + I(x_1)$$

$$= 6\cos(t_1)\sin(t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + I(x_1)$$

$$= 3\sin(2t_1) + 6t_1 - 3\sin(2t_1)$$

$$= 6t_1$$

■ ② د

لدينا : $\mathcal{S}(x_1) = 6t_1$

إذن : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

■ ② و

$$\mathcal{S}(x_1) = \frac{1}{2}\mathcal{S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6t_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}$$

■ ② هـ

لدينا : $M_1\begin{pmatrix} 4\cos t_1 \\ 3\sin t_1 \end{pmatrix}$

يعني : $\overrightarrow{OM_1} = 4\cos(t_1)\vec{\imath} + 3\sin(t_1)\vec{\jmath}$

من أجل : $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على : $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2}\vec{\imath} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{\jmath}$

ونعلم أن : $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

و منه النقطة M_1 مُعَرَّفَة بالزوج : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ في المعلم $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

■ (I) ①

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا :

$$M(a,b) + M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+b)+(c+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((a+c),(b+d)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

و لدينا كذلك :

$$M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd)+(bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (I) ②

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

إذن $+$ قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن : $+$ تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $+$ تبادلي و تجميعي في E .

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لِـ $+$ في E .

و لدينا :

$$M(a,b)+M(-a,-b)=M(-a,-b)+M(a,b)=M(0,0)$$

إذن كل مصفوفة $M(a,b)$ من E تقبل مماثلة $M(-a,-b)$ بالنسبة لـ $+$

و بالتالي : $(E,+)$ زمرة تبادلية . (1)

بما أن : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

و بما أن : E جزء من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $\times$ تجميعي و توزيعي على $+$ في E . (2)

و لدينا : $M(a,c)\times M(1,0)=M(a,c)$

و : $M(1,0)\times M(a,c)=M(a,c)$

إذن $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـِ $\times$ في E . (3)

و لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big)$$
$$=M(c,d)\times M(a,b)$$

و منه : $\times$ تبادلي في E . (4)

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$(E,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية.

■ (I) ③ أ

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $x^2+xy+y^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2-xy=-xy \\ x^2+xy+y^2+xy=xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=-xy\geq 0 \\ (x+y)^2=xy\geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad xy=0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x^2+y^2=0}$$

إذن : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها O و شعاعها 0

و لإيقاف هذا العبث المبين نقول : $\boxed{x=y=0}$

عكسيا : إذا كان $x=y=0$ فإن : $x^2+xy+y^2=0$

و بالتالي :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad (x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow(x=y=0)$$

■ (I) ③ ب

لدينا : $M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \ \det M(a,b)=a^2+ab+b^2$$

إذن : تكون المصفوفة $M(a,b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2+ab+b^2\neq 0$

يعني : $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

و بالتالي : جميع عناصر المجموعة $E\setminus\{M(0,0)\}$ قابلة للقلب .

و لدينا :

$$\big(M(a,b)\big)^{-1}=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix} (a+b)+(-b) & -(-b) \\ (-b) & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=M\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\,;\,\frac{-b}{a^2+ab+b^2}\right)$$

■ (I) ③ ج

نعتبر المجموعة $(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)$

لدينا : $\times$ قانون تركيب داخلي في $E\setminus\{M(0,0)\}$

لأن : E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و لدينا : $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـِ $\times$ في $E\setminus\{M(0,0)\}$

و كل عنصر يقبل مماثلا(مقلوبا) في $E\setminus\{M(0,0)\}$

إذن : $(E\setminus\{M(0,0)\}\,;\times)$ زمرة. (5)

و نعلم أن : $(E,+)$ زمرة تبادلية (6)

و نعلم كذلك أن $\times$ تبادلي و توزيعي على $+$ في $E\setminus\{M(0,0)\}$ (7)

إذن من النتائج (5) و (6) و (7) نستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي

■ (II) ①

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists\sigma_1\in\mathbb{R}),(\exists\sigma_2\in\mathbb{R}^*) \ ; \ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2$

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا .

نضع : $z=m_1+m_2\sigma$

$$\Longrightarrow \quad z=m_1+m_2(\sigma_1+i\sigma_2)$$
$$\Longrightarrow \quad z=m_1+m_2\sigma_1+im_2\sigma_2$$

بما أن : $z=x+iy$ فإن : $\begin{cases} x=m_1+m_2\sigma_1 \\ y=m_2\sigma_2 \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} m_1=\left(x-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)\in\mathbb{R} \\ m_2=\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)\in\mathbb{R} \end{cases}$

$(\forall z\epsilon\mathbb{C}),(\exists(m_1,m_2)\epsilon\mathbb{R}^2)\;\;;\;\; z=m_1+m_2\sigma$ يعني :

إذن $\boxed{\{1;\sigma\}\text{ أسرة مولدة لـ } \mathbb{C}\,.}$ (8)

لتكن $x+\sigma y$ تأليفة خطية منعدمة لِ 1 و σ يعني : $x+\sigma y=0$

$$\Leftrightarrow\quad x+y(\sigma_1+i\sigma_2)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x+y\sigma_1=0\\ \sigma_2 y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

إذن $\boxed{\{1;\sigma\}\text{ أسرة حرة}}$ (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\sigma\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

■ (II) ②

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)+M(c,d)\big)=\psi\big(M(a+c\,;b+d)\big)$

$$=(a+c)+\sigma(b+d)$$

$$=(a+\sigma b)+(c+\sigma d)$$

$$=\psi\big(M(a,b)\big)+\psi\big(M(c,d)\big)$$

إذن ψ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

ليكن $(a+\sigma b)$ عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحل المعادلة $\psi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$ ذات المجهول $M(x,y)$ في E

لدينا : $\psi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$

$$\Leftrightarrow\quad x+\sigma y=a+\sigma b$$

بما أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

فإن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليفة خطية للعنصرين 1 و σ

إذن : $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$

و بالتالي :

$$(\forall(a+\sigma b)\epsilon\mathbb{C})\;;\;\exists!\,M(x,y)\,\epsilon\,E\quad:\quad\psi\big(M(x,y)\big)=(a+\sigma b)$$

و منه : ψ تقابل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

$\boxed{\text{و بالتالي } \psi \text{ تشاكل تقابلي من } (E,+) \text{ نحو } (\mathbb{C},+)}$

■ (II) ③

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z+1=0$

لدينا : $\Delta=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=e^{\left(\frac{-i\pi}{3}\right)}$$

و

$$z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\left(\frac{i\pi}{3}\right)}$$

■ (II) ④

لدينا : $\sigma=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن :
$$\sigma^2+1=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sigma$$

إذن : $\boxed{\sigma^2+1=\sigma}$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)=\psi\big(M(ac-bd\,;bc+ad+bd)\big)$

$$=(ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big)=(a+\sigma b)\times(c+\sigma d)$$

$$=ac+ad\sigma+bc\sigma+\sigma^2bd$$

$$=ac+ad\sigma+bc\sigma+(\sigma-1)bd$$

$$=ac+ad\sigma+bc\sigma+bd\sigma-bd$$

$$=\boxed{(ac-bd)+\sigma(bc+ad+bd)}$$

نستنتج إذن أن :

$$\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)=\psi\big(M(a,b)\big)\times\psi\big(M(c,d)\big)$$

و بالتالي : $\boxed{\psi \text{ تشاكل من } (E,\times) \text{ نحو } (\mathbb{C},\times)}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ (I) ①

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{-\infty}-\frac{1}{2}=\boxed{-\infty}$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لِ $(\mathscr{C})$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{0^+}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0^+}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{-1}{2}}$

إذن المستقيم $y=\frac{-1}{2}$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

■ (I) ② أ

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن تشكيلة من الدوال المعرفة و القابلة للأشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

لدينا :
$$f'(x)=4\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{4(x-2x\ln x)}{x^4}=\frac{4(1-2\ln x)}{x^3}$$

■(I)②ب

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\quad ; \quad f'(x) = \dfrac{4(1-2\ln x)}{x^3}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

إذا كان : $x = \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \sqrt{e}$ فإن : $f'(x) > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$	↘ $\frac{-1}{2}$

■(I)③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f(I)$.

إذن : f تقابل من المجال $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]f(1);f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0{,}5\,;0{,}2[$

و بما أن : $0 \in]-0{,}5\,;0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α في المجال $]1;\sqrt{e}[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \alpha \in]1;\sqrt{e}[\ ; \ f(\alpha) = 0}$ (1)

<u>و بنفس الطريقة :</u>

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f(J)$

أي f تقابل من المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو المجال $]f(3)\,;f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]\sqrt{e}\,;3[$ نحو $]-0{,}01\,;\,0{,}2[$

و بما أن $0 \in]-0{,}01\,;\,0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\sqrt{e}\,;3[$ بالتقابل f

أي : $\boxed{\exists!\ \beta \in]\sqrt{e}\,;3[\ ; \ f(\beta) = 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α و β

بحيث : $\boxed{1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3}$

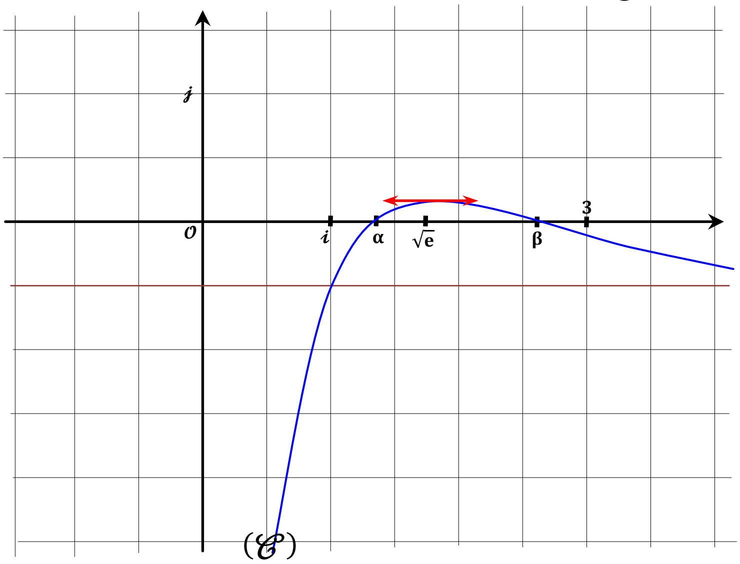
■(I)④

معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 يكتب على شكل :

$$\begin{aligned}(T) : y &= f'(1)(x-1) + f(1)\\ &= 4(x-1) + \left(\tfrac{-1}{2}\right)\\ &= 4x - \tfrac{9}{2}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(T) : y = 4x - \frac{9}{2}$

■(I)⑤



■(II)①

ليكن $t \geq 0$ إذن : $-t^2 \leq 0$ ومنه : $1 - t^2 \leq 1$

أي : $(1-t)(1+t) \leq 1$

نضرب كلا الطرفين في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1+t}\right)$ نحصل على :

$\boxed{1 - t \leq \dfrac{1}{1+t}}$ (1)

و لدينا كذلك $1 + t \geq 1$ إذن : $\boxed{\dfrac{1}{1+t} \leq 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\quad ; \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1}$$

■(II)②

ليكن a عنصرا من $[0;+\infty[$

لدينا : $\forall t \in [0;+\infty[\quad ; \quad 1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t)\,dt \leq \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right) dt \leq \int_0^a 1\,dt$$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^a \leq [\ln(1+t)]_0^a \leq [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(a - \frac{a^2}{2}\right) \leq \ln(1+a) \leq a}$$

■ (III) ①

لدينا f_n دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$

لأنها تضم تركيبة من الدوال الاعتيادية القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$

$$f_n'(x) = n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{n(1-2\ln x)}{x^3}$$

بما أن : $\forall x > 0 \;\; ; \;\; \frac{n}{x^3} \geq 0$

فإن إشارة $f_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2e}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

■ (III) ②

دراسة التقعر و نقط الانعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n

$$f_n''(x) = \frac{x^3\left(\frac{-2n}{x}\right) - 3x^2 n(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_n''(x) = \frac{n(6\ln x - 5)}{x^4}$$

إذن $f_n''(x)$ تنعدم إذا كان $(6\ln x - 5) = 0$

يعني : $\ln x = \frac{5}{6}$ أي : $x = e^{\frac{5}{6}}$

إذا كان $x > e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x - 5) > 0$ و منه : $f''(x) > 0$

إذا كان $x < e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6\ln x - 5) < 0$ و منه : $f''(x) < 0$

نلاحظ أن $f_n''(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفصول $e^{\frac{5}{6}}$ و تغير إشارتها بجوار تلك النقطة

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل نقطة انعطاف و هي : $\left(e^{\frac{5}{6}} \; ; \; \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2}\right)$

■ (III) ③ أ

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

إذا كان $x = 0$ فإن $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

إذا كان $x > 1$ فإن $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

إذا كان $x < 1$ فإن $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

■ (III) ③ ب

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	0	$+$
$(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$	$(\mathscr{C}_n)$ أسفل $(\mathscr{C}_{n+1})$	$(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$ يتقاطعان	$(\mathscr{C}_{n+1})$ فوق $(\mathscr{C}_n)$

■ (III) ④

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $]0;\sqrt{e}[$

إذن f_n تقابل من أي مجال I ضمن $]0;\sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$

و منه f_n تقابل من $]1;\sqrt{e}[$ نحو $]-0,5\,;0,2[$

و بما أن : $0 \in]-0,5\,;0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا u_n من $]1\,;\sqrt{e}[$.

يعني : $\boxed{\exists!\; u_n \in]1;\sqrt{e}[\;\; ; \;\; f_n(u_n) = 0}$ (1)

و بنفس الطريقة : لدينا f_n تناقصية قطعا على $]\sqrt{e}\,;+\infty[$

إذن f_n تقابل من أي مجال J ضمن $]\sqrt{e}\,;+\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$

و منه : f_n تقابل من $]\sqrt{e}\,;n[$ نحو $]f_n(n)\,;0,2[$

و بما أن $0 \in]f_n(n)\,;0,2[$ لأن $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا v_n من $]\sqrt{e}\,;n[$

يعني : $\boxed{\exists!\; v_n > \sqrt{e} \;\; ; \;\; f_n(v_n) = 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين

u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

■ (III) ⑤

لدينا : $\sqrt{e} > u_n > 1$ إذن حسب (III)③ : $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$

و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0$

إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية على $]1\,;\sqrt{e}[$ فإن : $u_n > u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا .

■ (III) ⑥ أ

لدينا : $\forall\, a \in [0\,;+\infty[\;\; ; \;\; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$

و لدينا : $u_n > 1$ إذن : $u_n - 1 > 0$

و منه : $(u_n - 1) - \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4)\;;\;\; \frac{2(u_n-1) - (u_n-1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4)\;\;;\;\; \frac{(u_n-1)(2-u_{n+1})}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\forall n \geq 4)\ ;\ \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n-1)}\ (*)$$

■(III) 6 ب

ونعلم أن : $f_n(u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n\ln(u_n)}{(u_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(u_n) = \frac{(u_n)^2}{2n}$$

ننطلق إذن من الشق الأول من التأطير $(*)$: $\ln(u_n) \leq u_n - 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1}\ (7)$$

و لدينا كذلك حسب الشق الثاني من التأطير $(*)$:

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \ln(u_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u_n-1) \leq \frac{2(u_n)^2}{2n(3-u_n)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}}\ (8)$$

من (7) و (8) نحصل على التأطير (9) التالي :

$$(9)\ \boxed{(\forall n \geq 4)\ ;\ \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}}$$

■(III) 6 ج

لدينا $u_n < \sqrt{e}$ إذن : $\boxed{\frac{(u_n)^2}{2n} < \frac{e}{2n}}\ (10)$

و $3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$

إذن : $(11)\ \boxed{\frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{3-\sqrt{e}} < 1}$

من (10) و (11) نستنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{(3-u_n)} < e$

و منه : $(12)\ \boxed{\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n}}$

من (9) و (10) و (12) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \leq \frac{e}{n}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 4)\ ;\ \frac{1}{2n} \leq (u_n-1) \leq \frac{e}{n}}$

■(III) 6 د

لدينا : $\frac{1}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{e}{n}$

$$\frac{1}{2n} \xrightarrow{+\infty} 0 \qquad \frac{e}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$$

إذن : $\lim_{n\infty}(u_n - 1) = 0$ أي : $\boxed{\lim_{n\infty} u_n = 1}$

■(III) 7 أ

لدينا : $n \geq 4$

$$\Rightarrow \quad \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}}$$

باستعمال الآلة الحاسبة لدينا : $\frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}} \approx 0,63 > 0,5$

$$\Rightarrow \quad \frac{20}{6}e^{\frac{-5}{3}} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad f_n\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \geq f_n(v_n)$$

و بما أن f_n دالة تناقصية على المجال $]\sqrt{e}\ ;\ +\infty[$

فإن : $\boxed{e^{\frac{5}{6}} \leq v_n}$

■(III) 7 ب

لدينا : $f_n(v_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n\ln(v_n)}{(v_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ln(v_n) = \frac{(v_n)^2}{2n}}\ (*)$$

و لدينا : $v_n > e^{\frac{5}{6}}$ إذن : $\ln(v_n) > \frac{5}{6}$

و منه باستعمال $(*)$ نجد : $\frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6}$

$$\Leftrightarrow \quad (v_n)^2 > \frac{10}{6}n$$

$$\Leftrightarrow \quad v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$$

بما أن : $\lim_{n\infty} \sqrt{\frac{10n}{6}} = +\infty$

فإن : $\boxed{\lim_{n\infty} v_n = +\infty}$

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة الاستدراكية 2003		مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 10 مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية : " نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U : إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V . و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V " .

نعتبر الأحداث التالية :

- R_1 : " الكرة المسحوبة من U حمراء " .
- B_1 : " الكرة المسحوبة من U زرقاء ".
- R_2 : " الكرة المسحوبة من V حمراء "
- B_2 : " الكرة المسحوبة من V زرقاء " .

1,00 ن ① أحسب احتمال الحدثين R_1 و B_1 .

1,00 ن ② أحسب احتمال B_2 علما أن R_1 محقق، و احتمال B_2 علما أن B_1 محقق.

0,50 ن ③ بين أن : $P(B_2) = \dfrac{13}{21}$

0,50 ن ④ استنتج $P(R_2)$.

التمرين الثاني : (4,5 ن)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0 \le \theta \le 2\pi$ و نضع : $p = 5\cos\theta + 3i\sin\theta$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $\boxed{(E):\ z^2 - 2pz + 16 = 0}$

0,50 ن ① (أ) تحقق أن : $p^2 - (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2 = 16$

0,50 ن (ب) أوجد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1| < |z_2|$

② المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما : z_1 و z_2 .

0,50 ن (أ) بين أنه عندما يتغير العدد θ في $[0; 2\pi[$ فإن النقطة M_1 تتغير على دائرة $(\mathscr{C})$ ينبغي تحديد معادلة لها.

0,50 ن (ب) لتكن P منتصف القطعة $[M_1M_2]$. و لتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi[$

بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4 .

0,50 ن	③ ⓐ بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$ لدينا : $(ab = 16) \iff \left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right)$
0,50 ن	ب استنتج أن : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$
0,50 ن	ج بين أن : $\left(\overrightarrow{M_1F};\overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\left(\overrightarrow{M_2F};\overrightarrow{M_2F'}\right)\right) [2\pi]$
0,50 ن	④ ⓐ بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي : $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$
0,50 ن	ب بين أن : المماس (T) عمودي على المستقيم (M_1M_2) .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لتكن E مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $\boxed{E = \left\{M_{(a,b)} \ / \ a^2 - 2b^2 = 1\right\}}$

0,25 ن	① نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A \in E$
0,50 ن	② ⓐ بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في E .
0,50 ن	ب بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.
0,50 ن	ج بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .
	③ نضع : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n \in \mathbb{N})$
	نعتبر المجموعة $\boxed{G = \{A^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}}$
0,25 ن	ⓐ تحقق أن : $G \subset E$
0,50 ن	ب لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E .
	بين أن : $H = \{B^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ حيث : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$
0,50 ن	ج بين أن : $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الرابع : (9,5 ن)

(I) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\boxed{g_n(x) = x + e^{-nx}}$

و ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة g_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

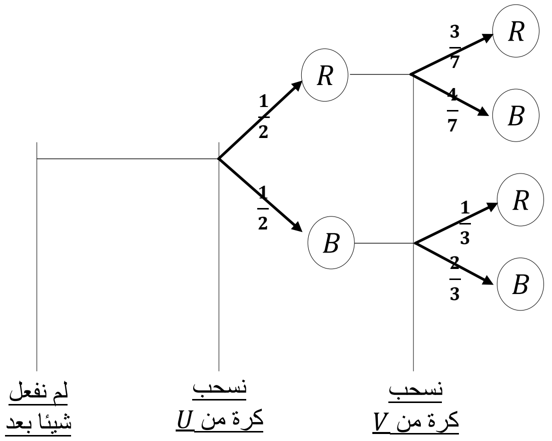
0,50 ن	① ⓐ أدرس تغيرات الدالة g_n .
0,50 ن	ب بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n .
0,50 ن	② ⓐ أحسب : $\lim_{x\to-\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$

0,50 ن	ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$
0,50 ن	3) أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ الممثلين للدالتين g_1 و g_2
0,50 ن	ب) أرسم في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.
	(نأخذ : $\lVert\vec{i}\rVert = \lVert\vec{j}\rVert = 2\,cm$ و نعطي : $\ln 2 \approx 0{,}7$)
1,00 ن	4) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب بدلالة x التكامل : $I(x) = \int_0^x te^{-2t}\,dt$
0,50 ن	ب) لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على المجال $[0, \ln 2]$
	أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل.
1,00 ن	5) نضع : $v_n = g_n(u_n)$
	بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتيهما.
	(II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x) = x + e^{nx}}$
	و ليكن (Γ_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$
0,50 ن	1) أدرس تغيرات الدالة f_n .
0,50 ن	2) إستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n
0,50 ن	3) أ) بين أن $\alpha_1 \epsilon \left]-\ln 2 \,; \frac{-1}{2}\right[$
0,50 ن	ب) بين أن : $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة.
0,50 ن	4) أ) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\left]-\infty \,; \frac{-1}{2}\right]$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$
	بين أن الدالة φ تناقصية على المجال $\left]-\infty \,; \frac{-1}{2}\right]$
0,50 ن	ب) استنتج أن : $\lvert e^x + \alpha_1\rvert \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\lvert x - \alpha_1\rvert$
	5) نضع : $\beta_0 = \frac{-1}{2}$ و لكل عدد صحيح طبيعي n : $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$
0,50 ن	أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;:\; \lvert\beta_{n+1} - \alpha_1\rvert \leq a\lvert\beta_n - \alpha_1\rvert$
0,50 ن	ب) بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الأول : (3,0 ن)

1

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو استعمال شجرة الإحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R_1) = P(B_1) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

2

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P_{R_1}(B_2) = \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

3

لدينا : $P(B_2) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)$

$$= P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21}$$

4

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد

$$P(B_2) + P(R_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = 1 - P(B_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$$

الطريقة الثانية : (استعمال الشجرة)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(R_2) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

1 أ

لدينا : $p^2 - (3\,cos\theta + 5i\,sin\theta)^2$

$$= (5cos\theta + 3isin\theta)^2 - (3\,cos\theta + 5i\,sin\theta)^2$$

$$= 25\cos^2\theta - 9\sin^2\theta - 9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta$$

$$= 25(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= 25 - 9$$

$$= 16$$

1 ب

لدينا : $\Delta' = p^2 - 16 = (3cos\theta + 5i\,sin\theta)^2$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين في $\mathbb{C}$.

$$z_1 = p + (3cos\theta + 5i\,sin\theta) = 2e^{-i\theta}$$

$$z_2 = p - (3cos\theta + 5i\,sin\theta) = 8e^{i\theta}$$

2 أ

ليكن θ عنصرا من $[0; 2\pi[$.

نضع : $aff(M_1) = 2e^{-i\theta} = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(-\theta) + 2i\sin(-\theta) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\cos(\theta) = x \\ -2\,sin(\theta) = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (2\,cos(\theta))^2 + (-2\,sin(\theta))^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2^2$$

إذن : $M_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها O و شعاعها 2 .

2 ب

لدينا P هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = \frac{aff(M_1) + aff(M_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = \frac{2e^{-i\theta} + 8e^{i\theta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = (cos\theta - i\,sin\theta) + 4(cos\theta + i\,sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = 5\,cos\theta + 3i\,sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad aff(P) = p$$

نضع : $p = x + iy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\cos(\theta) \\ y = 3\,sin(\theta) \end{cases}$$

لدينا حسب نتيجة السؤال ① أ : $p^2 - (3cos\theta + 5i\,sin\theta)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 - \left(\frac{3x}{5} + \frac{5i}{3}y\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

إذن عندما يتغير العدد θ في المجال $[0;2\pi[$

فإن النقطة P تتغير على الإهليلج (Γ) الذي مركزه O

و رؤوسه : $A(5,0)$ و $A^{'}(-5,0)$ و $B(0,3)$ و $B^{'}(0,-3)$.

و بؤرتاه : $F(4,0)$ و $F'(-4,0)$.

(لأن : $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 \implies c = 4$)

■ ③ أ

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$ بحيث: $\left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right)$.

$$\Leftrightarrow \quad (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ab = 32$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{ab = 16}$$

■ ③ ب

لدينا : $z_1 = 2e^{-i\theta} \neq 4$ و $z_2 = 8e^{i\theta} \neq 4$.

إذن : $z_1 z_2 = 16e^{i\theta}e^{-i\theta} = 16$

و منه حسب ③ أ : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$.

■ ③ ج

ننطلق من الكتابة : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$.

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{4-z_1}{-4-z_1}\right) = -\left(\frac{4-z_2}{-4-z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) = -\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) \equiv \pi + arg\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\overrightarrow{M_1F}\,;\,\overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{M_2F}\,;\,\overrightarrow{M_2F'}\right)[2\pi]}$$

■ ④ أ

لدينا : $P(5\,cos\theta\,;3\sin\theta)$

إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$(T):\ \frac{5x\,cos\theta}{5^2} + \frac{3y\,sin\theta}{3^2} = 1$$

$$\boxed{(T):\ 3x\,cos\theta + 5y\,sin\theta = 15}$$

■ ④ ب

لدينا : $(\mathrm{T}): 3x\,cos\theta + 5y\,sin\theta = 15$

$$(T):\ y = \left(\frac{-3\,cos\theta}{5\sin\theta}\right)x + \left(\frac{3}{\sin\theta}\right)$$

إذن : ميل المستقيم (T) هو : $\left(\frac{-3\,cos\theta}{5\,sin\theta}\right)$.

لنحسب الآن m ميل المستقيم (M_1M_2) .

لدينا : $M_1\begin{pmatrix}2\cos\theta \\ -2\sin\theta\end{pmatrix}$ و $M_2\begin{pmatrix}8\cos\theta \\ 8\sin\theta\end{pmatrix}$.

إذن : $m = \frac{8\,sin\theta - (-2sin\theta)}{8cos\theta - 2cos\theta} = \left(\frac{5\,sin\theta}{3\,cos\theta}\right)$

إذن ميل المستقيم (M_1M_2) هو $\left(\frac{5\,sin\theta}{3\,cos\theta}\right)$.

و بالتالي : (T) و (M_1M_2) متعامدان لأن جداء ميليهما يساوي (-1) .

$$\boxed{\left(\frac{-3\,cos\theta}{5\,sin\theta}\right) \times \left(\frac{5\,sin\theta}{3\,cos\theta}\right) = -1}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ①

نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

لدينا : $3^2 - 2 \times 2^2 = 1$

إذن : $A = M(3,2) \in E$

■ ② أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} ac + 2bd & (bc+ad)\sqrt{2} \\ (bc+ad)\sqrt{2} & ac+2bd \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+2bd\,;\,ad+bc)}\ (*)$$

و لدينا :

$$(ac+2bd)^2-2(bc+ad)^2$$
$$=(ac)^2+4(bd)^2-2(bc)^2-2(ad)^2$$
$$=c^2\underbrace{(a^2-2b^2)}_{1}+2d^2\underbrace{(2b^2-a^2)}_{-1}$$
$$=c^2-2d^2$$
$$=1$$

إذن : $M(ac+2bd\,;bc+ad)\ \epsilon\ E$

و بالتالي : E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

بالإستعانة بالعلاقة $(*)$ لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+2bd\,;\ ad+bc)$$
$$=M(ca+2db\,;\ cb+da)$$
$$=M(c,d)\times M(a,b)$$

إذن القانون $\times$ تبادلي في E .

■ ②ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E

لدينا :
$$\big(M(a,b)\big)^{-1}=\frac{1}{detM\,(a,b)}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{(a^2-2b^2)}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}=M(a,-b)\ \epsilon\ E$$

و بالتالي : مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ هو المصفوفة $M(a,-b)$

بتعبير آخر : $\boxed{\big(M(a,b)\big)^{-1}=M(a,-b)}$

■ ②ج

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

$\times$ قانون تركيب داخلي في المجموعة E لأن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و بما أن $\times$ تجميعي في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي كذلك في E .

و بما أن المصفوفة $I=M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $I=M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في E

و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائما وحيدا.

توصلنا كذلك إلى أن كل عنصر $M(a,b)$ يقبل مماثلا و هو $M(a,-b)$

نستنتج إذن أن $(E,\times)$ زمرة.

و بما أن $\times$ تبادلي في E .

فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

■ ③أ

ليكن $\times$ عنصرا من G .

إذن : $(\exists m\epsilon\mathbb{N})\ ;\ X=A^m$

نريد أن نبرهن على أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ A^n\,\epsilon\, E$

لدينا من أجل $n=0$: $A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=M(1,0)\ \epsilon\ E$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ A^n\ \epsilon\ E$

لدينا : $A^n\ \epsilon\ E$ و $A\ \epsilon\ E$

إذن $A^n\times A\ \epsilon\ E$

لأن $\times$ قانون داخلي في E .

إذن : $A^{n+1}\ \epsilon\ E$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ A^n\ \epsilon\ E}$

و منه : $X=A^m\ \epsilon\ E$

خلاصة القول : $\boxed{G\subset E}$

■ ③ب

للإجابة على هذا السؤال يكفي أن نبين أن : $(A^n)^{-1}=B^n$

من أجل $n=0$ لدينا : $(A^0)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B^0$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (A^n)^{-1}=B^n$

لدينا :
$$(A^{n+1})^{-1}=(A^n\times A)^{-1}$$
$$=A^{-1}\times(A^n)^{-1}$$
$$=B\times B^n$$
$$=B^{n+1}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (A^n)^{-1}=B^n}$

■ ③ج

لنبرهن في البداية على الخاصية $(\sharp)$ التالية :

$(\sharp)$ $\boxed{\forall(m,n)\,\epsilon\,\mathbb{N}^2\ ;\ A^m\times B^n\ \epsilon\ G\cup H}$

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين

نفصل هنا بين حالتين أساسيتين :

<u>الحالة الأولى</u> : إذا كان $m\geq n$:

لدينا :
$$A^m\times B^n=A^{m-n}\times(A\times B)^n$$
$$=A^{m-n}\times I$$
$$=A^{m-n}\ \epsilon\ G\subset G\cup H$$

إذن : $\boxed{A^m \times B^n \;\epsilon\; G \cup H}$

الحالة الثانية : إذا كان $m \leq n$:

لدينا :
$$\begin{aligned} A^m \times B^n &= (A \times B)^m \times B^{n-m} \\ &= I \times B^{n-m} \\ &= B^{n-m} \;\epsilon\; H \subset G \cup H \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^m \times B^n \;\epsilon\; G \cup H}$

و بالتالي : $\boxed{\forall (m,n) \,\epsilon\, \mathbb{N}^2 \;;\; A^m \times B^n \,\epsilon\, G \cup H}$ $(\#)$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال ج :

من الواضح أن $G \cup H$ جزء غير فارغ من E لأن : $(G,H) \subset E^2$

لتكن X و Y مصفوفتين من $G \cup H$ و نفصل بين أربع حالات أساسية :

الحالة الأولى : إذا كان $X \epsilon G$ و $Y \epsilon G$:

إذن : $\exists (m,n) \,\epsilon\, \mathbb{N}^2 \;;\; X = A^n$ و $Y = A^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (A^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times B^m$

إذن : $A^n \times B^m \,\epsilon\, G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة $(\#)$.

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \,\epsilon\, G \cup H}$

الحالة الثانية : إذا كان $X \epsilon H$ و $Y \epsilon H$:

إذن : $\exists (m,n) \,\epsilon\, \mathbb{N}^2 \;;\; X = B^n$ و $Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = B^n \times A^m$

إذن : $B^n \times A^m \,\epsilon\, G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة $(\#)$.

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \,\epsilon\, G \cup H}$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \epsilon G$ و $Y \epsilon H$:

إذن : $\exists (m,n) \,\epsilon\, \mathbb{N}^2 \;;\; X = A^n$ و $Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times A^m = A^{m+n} \,\epsilon\, G \subset G \cup H$

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \,\epsilon\, G \cup H}$

الحالة الرابعة : إذا كان $X \epsilon H$ و $Y \epsilon G$:

إذن : $\exists (m,n) \,\epsilon\, \mathbb{N}^2 \;;\; X = B^n$ و $Y = A^m$

و منه :
$$\begin{aligned} X \times Y^{-1} &= B^n \times (A^m)^{-1} \\ &= B^n \times B^m \\ &= B^{m+n} \,\epsilon\, H \subset G \cup H \end{aligned}$$

و منه : $\boxed{X \times Y^{-1} \,\epsilon\, G \cup H}$

خلاصة القول: نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع نجد:

$$\boxed{(\forall X,Y \,\epsilon\, G \cup H) \;;\; X \times Y^{-1} \,\epsilon\, G \cup H}$$

و بالتالي : $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الرابع : (9,5 ن)

■ 1 أ

لدينا : $g_n(x) = x + e^{-nx}$

إذن g_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $g'_n(x) = 1 - ne^{-nx} = e^{-nx}(e^{nx} - n)$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}),(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \;;\; e^{-nx} > 0$

فإن إشارة $g'_n(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(e^{nx} - n)$

إذا كان $x = \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g'_n(x) = 0$

إذا كان $x > \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g'_n(x) > 0$ يعني g_n تزايدية

إذا كان $x < \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g'_n(x) < 0$ يعني g_n تناقصية

■ 1 ب

لدينا الدالة g_n متصلة على $\mathbb{R}$.

و تناقصية على $\left]-\infty \,;\, \frac{\ln n}{n}\right[$.

و تزايدية على $\left]\frac{\ln n}{n} \,;\, +\infty\right[$

و تنعدم في $\frac{\ln n}{n}$

إذن g_n تقبل قيمة دنوية عند $u_n = \frac{\ln n}{n}$ و هذه القيمة هي $g_n(u_n) = \frac{1+\ln n}{n}$

■ ②(أ)

$$\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+e^{-nx})$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right)$$
$$= (-\infty)\left(1+\frac{n}{0^-}\right)$$
$$= (-\infty)(-\infty)$$
$$= (+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+e^{-nx})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right)$$
$$= (+\infty)\left(1+\frac{n}{(+\infty)}\right)$$
$$= (+\infty)(1)$$
$$= (+\infty)$$

■ ②(ب)

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right)$

$$= \left(1+\frac{n}{+\infty}\right)$$
$$= 1$$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} (g_n(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-nx} = 0$

إذن المنصف الأول للمعلم $y = x$ مقارب مائل لِـ $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $(+\infty)$.

و لدينا من جهة أخرى : $\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{n}{nxe^{nx}}\right) = (-\infty)$

إذن : $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

■ ③(أ)

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$

ندرس إشارة الفرق : $g_1(x) - g_2(x)$

لدينا : $g_1(x) - g_2(x) = (x+e^{-x}) - (x+e^{-2x})$

$$= e^{-x} - e^{-2x}$$
$$= e^{-x}(1-e^{-x})$$

بما أن : $e^{-x} > 0 \ ; \ (\forall x \in \mathbb{R})$ فإن إشارة الفرق $g_1(x) - g_2(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-e^{-x})$ و نفصل هنا بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $x = 0$

فإن : $(1-e^{-x}) = 0$ و منه $g_1(x) = g_2(x)$:

إذن: $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ يتقاطعان في النقطة $(0,1)$.

الحالة الثانية : إذا كان $x > 0$

فإن : $(1-e^{-x}) > 0$ و منه $g_1(x) > g_2(x)$:

إذن : $(\mathscr{C}_1)$ يوجد فوق $(\mathscr{C}_2)$

الحالة الثالثة : إذا كان $x < 0$

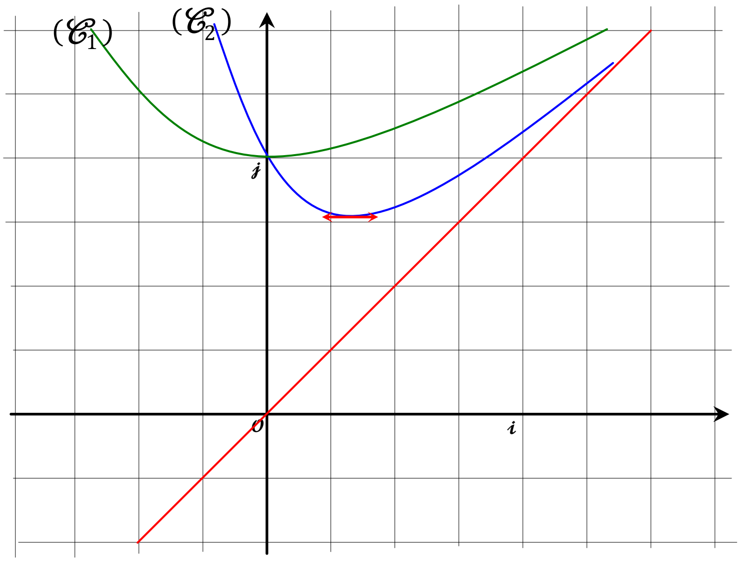
فإن : $(1-e^{-x}) < 0$ و منه $g_1(x) < g_2(x)$:

إذن : $(\mathscr{C}_1)$ يوجد أسفل $(\mathscr{C}_2)$

خلاصة :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x) - g_2(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$	$(\mathscr{C}_2)$ فوق $(\mathscr{C}_1)$	$(\mathscr{C}_1)$ $(\mathscr{C}_2)$ يتقاطعان في $(0,1)$	$(\mathscr{C}_1)$ فوق $(\mathscr{C}_2)$

■ ③(ب)



■ ④(أ)

$$I(x) = \int_0^x \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{-2t}}_{v'}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x) = \left[\frac{-te^{-2t}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x) = \left[\frac{-te^{-2t}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad I(x) = \frac{-xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{I(x) = \frac{-e^{-2x}}{4}(2x+1-e^{2x})}$$

■ 4 ب

لدينا : $\forall\, x \in [0;\ln 2] \;\; ; \;\; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن h_2 متصلة على المجال : $[0;\ln 2]$

و $\forall\, x \in [0;\ln 2] \;\; ; \;\; h_2(x) > 0$

إذن حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2

حول محور الأفاصيل هو :

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \left(h_2(x)\right)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi \int_0^{\ln 2} (x+e^{-2x})^2\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi \int_0^{\ln 2} (x^2 + e^{-4x} + 2xe^{-2x})\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ln 2} + \left[\frac{-e^{-4x}}{4}\right]_0^{\ln 2} + 2I(\ln 2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V = \pi\left(\frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64}\right)}$$

■ 5

لدينا حسب نتيجة السؤال 1 ب :

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{و} \quad v_n = g_n(u_n) = \left(\frac{1+\ln n}{n}\right)$$

و لدينا : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1+\ln n}{n}\right) = 0$ و $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان متقاربتان و تؤولان معا إلى الصفر.

■ (II) 1

لدينا : $f_n(x) = x + e^{nx}$

إذن $f_n'(x) = 1 + ne^{nx} > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

■ (II) 2

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن : 0 عدد حقيقي فإنه يقبل سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

بتعبير آخر : $\boxed{\exists!\ \alpha_n \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; f_n(\alpha_n) = 0}$

■ (II) 3 أ

بما أن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

فإن f_n تقابل من أي مجال I من $\mathbb{R}$ نحو صورته $f_n(I)$.

نأخذ المجال $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$ و نقول من أجل $n = 1$:

f_1 تقابل من $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$ نحو صورته $\left]\frac{1}{2} - \ln 2 \,;\, \frac{-1}{2} + e^{\frac{-1}{2}}\right[$

و باستعمال القيم المقربة نحصل على :

f_1 تقابل من $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$ نحو $]-0{,}2 \,;\, 0{,}1[$

وبما أن $0 \in]-0{,}2 \,;\, 0{,}1[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α_1 من $\left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[$

يعني : $\boxed{\exists!\ \alpha_1 \in \left]-\ln 2 \,;\, \frac{-1}{2}\right[\;\; ; \;\; f_1(\alpha_1) = 0}$

■ (II) 3 ب

لدينا $f_1(\alpha_1) = 0$ إذن : $(\alpha_1 + e^{\alpha_1}) = 0$ و منه : $\boxed{-\alpha_1 = e^{\alpha_1}}$

<u>الحالة الأولى</u> : إذا كان $(x - \alpha_1) > 0$

فإن : $x > \alpha_1$ و منه $e^x > e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x > -\alpha_1$ إذن : $\boxed{(e^x + \alpha_1) > 0}$

<u>الحالة الثانية</u> : إذا كان $(x - \alpha_1) < 0$

فإن : $x < \alpha_1$ و منه $e^x < e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x < -\alpha_1$ إذن : $(e^x + \alpha_1) < 0$

نستنتج من هاتين الحالتين أن الكميتين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة .

■ (II) 4 أ

لدينا : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

إذن : $\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}$

من أجل : $x \leq \frac{-1}{2}$

لدينا : $e^x \leq e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

و منه : $e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$

أي : $\forall\, x \in \left]-\infty \,;\, \frac{-1}{2}\right] \;\; ; \;\; \varphi'(x) \leq 0$

و بالتالي : $\boxed{\varphi \text{ دالة تناقصية على المجال } \left]-\infty \,;\, \frac{-1}{2}\right]}$

■(II)(4)(ب)

نعلم أن الدالة Exp قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$.

نختار المجال الذي طرفاه α_1 و x بحيث : $x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right[$

إذن يوجد c محصور بين α_1 و x بحيث :

$$\frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} = e^c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{\alpha_1}}{x - \alpha_1} = e^c$$

و بما أن $(e^x + \alpha_1)$ و $(x - \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة فإن :

$$\Rightarrow \quad \frac{|e^x + \alpha_1|}{|x - \alpha_1|} = e^c$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{|e^x + \alpha_1| = e^c |x - \alpha_1|} \quad (*)$$

من جهة أخرى لدينا : $c \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right[$ إذن : $c < \frac{-1}{2}$

و منه : $e^c < \frac{1}{\sqrt{e}}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|x - \alpha_1|$ نحصل على :

$$(**) \quad \boxed{e^c |x - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|}$$

من النتيجتين $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن :

$$\boxed{\forall\, x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right] \quad ; \quad |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|}$$

■(II)(5)(أ)

في البداية يجب أن نبرهن على أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$$

من أجل : $n = 0$ لدينا : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_0 = \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

إذن : $e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \leq e^{\beta_n} \leq e^{\frac{-1}{2}}$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}}$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد : $-e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \approx -0{,}54 < \frac{-1}{2}$

إذن : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq \frac{-1}{2}$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}}$

ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق : $\boxed{\beta_n \leq \frac{-1}{2}} \ (\star)$

و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال (ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال (ب) :

$$\forall\, x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right] \quad ; \quad |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

إذن من أجل : $x = \beta_n$ المنتمي إلى $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$ حسب $(\star)$ نجد :

$$\left|e^{\beta_n} + \alpha_1\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|-e^{\beta_n} - \alpha_1\right| = \left|e^{\beta_n} + \alpha_1\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|} \quad (777)$$

و بالتالي : $\left(\exists a = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \mathbb{R}\right) \ |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a |\beta_n - \alpha_1|$

لدينا باستعمال النتيجة (777) :

$$\Leftrightarrow \quad |\beta_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1|$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1|$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_0 - \alpha_1|$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{-1}{2} - \alpha_1\right|$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$$

بما أن $\alpha_1 < 0$ فإن : $\left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right| < \frac{1}{2}$

و منه : $(1111) \ \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}$

نلاحظ أن : $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها العدد الموجب $\frac{1}{\sqrt{e}}$ و الأصغر من 1 :

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0$

و منه حسب التأطير (1111) نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} |\beta_n - \alpha_1| = 0$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} \beta_n = \alpha_1}$

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

أ) بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن $n^2 \equiv 1[8]$. — 0,50 ن

ب) بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$. — 0,50 ن

2) ليكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .

أ) بين أن $a^2+b^2+c^2$ ليس مربعا كاملا. — 0,50 ن

ب) بين أن : $2(ab+bc+ac) \equiv 6[8]$. — 0,50 ن

(لاحظ أن : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$)

ج) استنتج أن : $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا . — 0,50 ن

د) بين أن $(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على شكل : $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

و F مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

1) أ) بين أن : $M_a \times M_b = M_{ab}$; $(\forall (a,b) \epsilon \mathbb{R}^{*2})$. — 0,50 ن

ب) ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $\varphi(a) = M_a$. — 0,50 ن

بين أن : φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

ج) استنتج البنية الجبرية لـ $(E,\times)$. — 0,50 ن

2) أ) بين أن $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$; $(\forall (a,b) \epsilon \mathbb{R}^{*2})$. — 0,50 ن

ب) نضع $G = E \cup F$ ، بين أن : $(G,\times)$ زمرة . — 0,50 ن

ج) هل $(G,\times)$ زمرة تبادلية ؟ — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

0,75 ن ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+z+1=0$.

② لكل عدد عقدي z حيث : $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ نضع : $z'=\dfrac{1}{z^2+z+1}$

مع : $\boxed{-\pi\le\theta\le\pi}$ و $\boxed{\theta\neq\dfrac{2\pi}{3}}$ و $\boxed{\theta\neq\dfrac{-2\pi}{3}}$

0,75 ن (أ) تحقق أن : $1+z+z^2=z(1+z+\bar{z})$.

0,75 ن (ب) احسب معيار و عمدة z' بدلالة θ .

0,75 ن (ج) نضع : $z'=x+iy$ حيث $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$.

بين أن : $x^2+y^2=(1-2x)^2$.

0,50 ن (د) استنتج أن M ذات اللحق z' تنتمي إلى هدلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه .

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $\boxed{f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}}$

0,50 ن ① أحسب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها $\mathcal{D}_f$.

0,50 ن ② أدرس تغيرات الدالة f .

③ ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

0,50 ن (أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,25 ن (ب) أنشيء $(\mathscr{C})$.

(II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}={u_n}^2 f(u_n)=u_n e^{-u_n} \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0=1 \end{cases}$

0,25 ن ① بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x\ge x+1$.

0,25 ن ② استنتج أن : $(\forall x>0)\ ;\ x^2f(x)\le\dfrac{x}{x+1}$

0,50 ن ③ (أ) باستعمال البرهان بالترجع بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n\le\dfrac{1}{n+1}$

0,75 ن (ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

④ نضع من أجل كل عنصر n من $\mathbb{N}^*$: $\boxed{v_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k}$

0,75 ن (أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

0,50 ن (ب) حدد نهاية المتتالية (v_n) .

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(0) = 2\ln 2 \qquad \text{و} \qquad (\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt$$

ن 0,25	① (أ) تحقق أن : $(\forall x > 0)\ ;\ \int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\ln 2$
ن 0,50	(ب) باستعمال نتيجة السؤال ① من الجزء الثاني بين أن : $(\forall t > 0)\ ;\ -t < e^{-t} - 1 \leq 0$.
ن 0,50	② (أ) بين أن : $(\forall x > 0)\ ;\ -3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0$.
ن 0,25	(ب) استنتج أن F متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.
ن 0,25	③ (أ) بين أن $(\forall t \geq 1)\ ;\ f(t) < e^{-t}$.
ن 0,50	(ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$
ن 0,75	④ (أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$.
ن 0,50	(ب) اعط جدول تغيرات الدالة F .
ن 0,50	(ج) أنشىء $(\mathscr{C}_F)$ في معلم متعامد ممنظم .
	⑤ لتكن G الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t}\ln t\,dt$
ن 0,50	(أ) بين أن : $(\forall x > 0)\ ;\ G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} ln(4x) + e^{-x} ln(x)$.
ن 0,50	(ب) أحسب النهاية التالية : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x$
ن 0,25	(ج) استنتج : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x)$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ ① أ

ليكن n عددا فرديا

إذن : $(\exists k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n = 2k+1$

$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n^2 = (2k+1)^2$

$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4k^2+4k+1$

$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4k(k+1)+1$

k و $(k+1)$ عددان صحيحان طبيعيان و متتابعان إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي. و منه فإن الجداء $k(k+1)$ عدد زوجي دائما.

إذن : $(\exists m \epsilon \mathbb{N})\ ;\ k(k+1) = 2m$

و بالتالي : $n^2 = 4k(k+1)+1 = 8m+1$

$\Leftrightarrow\ n^2 - 1 = 8m$

$\Leftrightarrow\ n^2 \equiv 1[8]$

■ ① ب

ليكن n عددا زوجيا .

هذا يعني أن : $(\exists k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n = 2k$

العدد الصحيح الطبيعي k يمكن أن يكون فرديا أو زوجيا .

الحالة الأولى : k عدد زوجي

إذن : $(\exists p \epsilon \mathbb{N})\ ;\ k = 2p$

و منه : $n = 4p$ يعني : $n^2 = 16p^2 = 8(2p^2)$

إذن : $8 / n^2$ و منه : $n^2 \equiv 0[8]$

الحالة الثانية : k عدد فردي

إذن : $(\exists q \epsilon \mathbb{N})\ ;\ k = 2q+1$

و منه : $n = 4q+2$ يعني : $n^2 - 4 = 8(2q^2+2q)$

إذن : $8 / (n^2-4)$ و منه : $n^2 \equiv 4[8]$

الخلاصة :

إذا كان n عددا زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$

■ ② أ

نُذَكِّرُ في البداية أن مجموع ثلاثة أعداد فردية هو عدد فردي و أن مربع أي عدد فردي يكون دائما عددا فرديا .

نفترض أن $(a^2+b^2+c^2)$ مربع كامل.

إذن : $\boxed{(\exists d \epsilon \mathbb{N})\ ;\ a^2+b^2+c^2 = d^2}$ (1)

بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a^2+b^2+c^2)$ عدد فردي كذلك .

و منه حسب نتيجة السؤال ① أ

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1[8] \\ b^2 \equiv 1[8] \\ c^2 \equiv 1[8] \end{cases}$$

إذن : $\boxed{a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]}$ (2)

لدينا d و d^2 عددان فرديان

إذن حسب نتيجة السؤال ① أ $\boxed{d^2 \equiv 1[8]}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $3 \equiv 1[8]$

يعني أن : $8 / 2$ و هذا مستحيل حدوثه

و بالتالي $(a^2+b^2+c^2)$ ليس مربعا كاملا.

■ ② ب

لدينا a و b و c أعداد فردية.

إذن حسب نتيجة السؤال ① أ :
$$\begin{cases} a^2 \equiv 1[8] \\ b^2 \equiv 1[8] \\ c^2 \equiv 1[8] \end{cases}$$

و منه : $\boxed{a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]}$ (4)

و بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a+b+c)$ عدد فردي كذلك

و منه حسب نتيجة السؤال ① أ $\boxed{(a+b+c)^2 \equiv 1[8]}$ (5)

من (4) و (5) نستنتج أن :

$$(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 1-3[8]$$

يعني : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv -2[8]$

و نعلم أن : $-2 \equiv 6[8]$

إذن : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 6[8]$

و منه : $\boxed{2(ab+ac+bc) \equiv 6[8]}$ $(\star)$

لأن : $(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc)$

■ ② ج

نفترض أن العدد $2(ab+ac+bc)$ مربع كامل.

إذن : $(\exists m \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 2(ab+ac+bc) = m^2$

و لدينا $2(ab+ac+bc)$ عدد زوجي

و منه : m و m^2 عددان زوجيان .

إذن حسب نتيجة السؤال ① ب :

$m^2 \equiv 0[8]$ أو $m^2 \equiv 4[8]$

في الحالة الأولى : $m^2 \equiv 0[8]$

لدينا حسب نتيجة السؤال ② ب $m^2 \equiv 6[8]$

إذن : $6 \equiv 0[8]$ و هذا مستحيل. لأن 8 لا تقسم 6

في الحالة الثانية : $m^2 \equiv 4[8]$

لدينا حسب نتيجة السؤال ② ب $m^2 \equiv 6[8]$

إذن : $6 \equiv 4[8]$ و هذا مستحيل. لأن 8 لا تقسم 2

و بالتالي : $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا.

■ ②د

نفترض أن : $(ab+bc+ac)$ مربع كامل.

إذن : $(\exists m \epsilon \mathbb{N})\ ;\ (ab+bc+ac)=m^2$

لدينا : a و b و c أعداد فردية.

إذن : $(ab+bc+ac)$ عدد فردي كذلك.

و منه m^2 عدد فردي . إذن m عدد فردي

و منه حسب ①أ : $m^2 \equiv 1[8]$

أي : $ab+bc+ac \equiv 1[8]$

و منه : $2(ab+bc+ac) \equiv 2[8]$

لكن لدينا $2(ab+bc+ac) \equiv 6[8]$ و ذلك حسب $(\star)$

إذن : $6 \equiv 2[8]$

يعني : $8\ /\ 4$ و هذا بطبيعة الحال مستحيل.

و بالتالي : $(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا .

<u>التمرين الثاني : (3,0 ن)</u>

■ ①أ

ليكن M_a و M_b عنصرين من E

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} = M_{ab}$$

بما أن : $M_a \epsilon E$ و $M_b \epsilon E$ فإن : $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و منه : $\boxed{ab \neq 0}$

■ ①ب

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا : $\varphi\ :\ (\mathbb{R}^*,\times) \to (E,\times)$
$a \to \varphi(a) = M_a$

لدينا : $\varphi(a\times b) = M_{ab} = M_a \times M_b = \varphi(a)\times\varphi(b)$

إذن : φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

و لدينا : $(\forall y \epsilon E), (\exists!\, a \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ y=\varphi(a)=M_a$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

■ ①ج

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ فإن φ يحافظ على بنية الزمرة.

<u>بما أن</u> : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 و كل عنصر a يقبل $\frac{1}{a}$ كمماثل.

<u>فإن</u> : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد $\varphi(1)$ و كل عنصر M_a يقبل $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$ كمماثل.

و لدينا : $\varphi(1) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

و $\varphi\left(\frac{1}{a}\right) = M_{\frac{1}{a}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}-a\right) \\ 0 & a \end{pmatrix}$

■ ②أ

ليكن N_a و N_b عنصرين من F

$$N_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab-b\left(a-\frac{1}{a}\right) & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right)-\frac{b}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -ab\sqrt{3}+ab\sqrt{3} & -a\left(b-\frac{1}{b}\right)+ab \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{\frac{b}{a}}\right) \\ 0 & \frac{1}{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} = M_{\frac{b}{a}}$$

■ ②ب

نضع : $G = E \cup F$

في البداية يجب أن نبرهن على أن :

$\forall (a,b) \epsilon (\mathbb{R}^*)^2\ ;\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ و

$\forall (a,b) \epsilon (\mathbb{R}^*)^2\ ;\ N_b \times M_a = N_{ab}$

لدينا :

$$M_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) \\ \frac{-b}{a}\sqrt{3} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix} = N_{\frac{b}{a}}$$

و لدينا كذلك :

$$N_b \times M_a = \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix} = N_{ab}$$

نحن الآن مسلحون بأربع خاصيات مهمة و هي :

$$\boxed{\begin{cases} M_a \times M_b = M_{ab} & (1) \\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} & (2) \\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} & (3) \\ N_b \times M_a = N_{ab} & (4) \end{cases}}$$

لنبرهن على أن $\times$ قانون تركيب داخلي في G

ليكن X و Y عنصرين من G

إذن نفصل هنا بين أربع حالات :

<u>الحالة الأولى : $X \in E$ و $y \in E$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (1) : $X \times Y \in E$ إذن : $X \times Y \in G$

<u>الحالة الثانية : $X \in F$ و $Y \in F$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (2) : $X \times Y \in E$ إذن : $X \times Y \in G$

<u>الحالة الثالثة : $X \in E$ و $Y \in F$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (3) : $X \times Y \in F$ إذن : $X \times Y \in G$

<u>الحالة الرابعة : $X \in F$ و $y \in E$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (4) : $X \times Y \in F$ إذن : $X \times Y \in G$

نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع لدينا :

$$\forall\ (X,Y) \in G^2\ ;\ X \times Y \in G$$

و بالتالي $\times$ قانون تركيب داخلي في G .

<u>البحث عن العنصر المحايد :</u>

نعلم أن M_1 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في E و ذلك حسب نتيجة السؤال 1 ج

و نعلم كذلك أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا .

يكفي الآن أن نبرهن أن :

$$\forall\ A \in G\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A$$

لتكن A مصفوفة من G . نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : A فرد من أفراد E .</u>

إذن : $(\exists!\, a \in \mathbb{R}^*)\ ;\ A = M_a$

و لدينا حسب الخاصية رقم (1) :

$$M_a \times M_1 = M_a \ \text{و}\ M_1 \times M_a = M_a$$

إذن : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$

<u>الحالة الثانية : A فرد من أفراد F .</u>

إذن : $(\exists!\, a \in \mathbb{R}^*)\ ;\ A = N_a$

و منه حسب الخاصية (4) : $N_a \times M_1 = N_{a\times 1} = N_a$

و كذلك حسب الخاصية (3) : $M_1 \times N_a = N_{\frac{a}{1}} = N_a$

نستنتج إذن أن : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$

في كلتا الحالتين لدينا :

$$\boxed{\forall A \in G\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A}$$

إذن M_1 هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في G .

<u>التماثل :</u>

$(E,\times)$ زمرة تبادلية و مماثل كل عنصر M_a يمتلك مماثلا و هو : $M_{\frac{1}{a}}$

G مجموعة تتكون من اتحاد مجموعتين و هما E و F

لنبحث عن مماثلات عناصر F .

ليكن N_a عنصرا من F .

إذن حسب الخاصية (2) : $N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1$

و منه كل عنصر N_a من F يتماثل مع نفسه

و بالتالي جميع عناصر G تمتلك مماثلات من E و F .

<u>خلاصة السؤال ب :</u> $(G,\times)$ زمرة لأن $\times$ قانون تركيب داخلي في G و يقبل عنصرا محايدا وحيدا M_1 و كل عنصر يمتلك مماثلا وحيدا من G .

■ 2 ب

ليكن M_a عنصرا من E و N_b عنصرا من F

لدينا حسب الخاصية (3) : $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$

و لدينا حسب الخاصية (4) : $N_b \times M_a = N_{ab}$

إذن : $M_a \times N_b \neq N_b \times M_a$

و بالتالي : $\times$ ليس تبادليا في G

يعني : الزمرة $(G,\times)$ ليست تبادلية .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ ①

لنحل المعادلة : $z^2+z+1=0$

نحسب Δ نجد أن : $\Delta=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{-2\pi i}{3}}=\bar{j}$$

$$z_2=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2\pi i}{3}}=j$$

■ ② أ

لدينا : $z=e^{i\theta}$ إذن : $|z|=1$ و منه : $z\bar{z}=1$

لدينا إذن : $z(1+z+\bar{z})=z+z^2+z\bar{z}=z+z^2+1$

■ ② ب

لدينا z' مُعَرَّف لأنه إذا كان $\theta\neq\pm\frac{2\pi}{3}$ فإن $z^2+z+1\neq 0$

و لدينا حسب السؤال أ : $1+z+z^2=z(1+z+\bar{z})$

إذن : $$z'=\frac{1}{1+z+z^2}=\frac{1}{z(1+z+\bar{z})}$$

و منه :

$$|z'|=\left|\frac{1}{z}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+z+\bar{z}}\right|=1\cdot\frac{1}{1+2\cos\theta}=\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)$$

و لدينا كذلك : $$Arg(z')\equiv Arg\left(\frac{1}{z}\right)+Arg\left(\frac{1}{1+z+\bar{z}}\right)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad Arg(z')\equiv -Arg(z)+0[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad Arg(z')\equiv -\theta[2\pi]$$

و بالتالي : $$\boxed{z'=\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)e^{-i\theta}}$$

■ ② ج

لدينا : $$z'=x+iy=\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)e^{-i\theta}$$

إذن : $$\begin{cases}x=\dfrac{\cos(-\theta)}{1+2\cos(\theta)}\\ y=\dfrac{\sin(-\theta)}{1+2\cos(\theta)}\end{cases}$$

و من هذه النظمة نستنتج أن :

$$x^2+y^2=\frac{\cos^2(-\theta)}{(1+2\cos(\theta))^2}+\frac{\sin^2(-\theta)}{(1+2\cos(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\frac{\cos^2(-\theta)+\sin^2(-\theta)}{(1+2\cos(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\left(\frac{1}{1+2\cos(\theta)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\left(\frac{1+2\cos(\theta)-2\cos(\theta)}{1+2\cos(\theta)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\left(1-2\left(\frac{\cos(\theta)}{1+2\cos(\theta)}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{x^2+y^2=(1-2x)^2}$$

■ ② ب

من آخر نتيجة نستخرج ما يلي : $x^2+y^2=1+4x^2-4x$

$$\Leftrightarrow\quad -3x^2+4x+y^2=1$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y^2=\frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}y^2=\frac{-1}{3}+\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1}$$

و منه : $M(z')$ تنتمي إلى الهذلول الذي مركزه هو النقطة $C\left(\frac{2}{3},0\right)$

و رأساه هما $S_1(1,0)$ و $S_2\left(\frac{1}{3},0\right)$

و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases}(\Delta):y=\sqrt{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ (\Delta'):y=-\sqrt{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) ①

لدينا : $$\forall\, x\,\epsilon\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\quad:\quad f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to-\infty\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to0^+\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to0^-\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to-\infty\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{0}$$

■ (I) ②

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$

لدينا : $$f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

بما أن : $\frac{-e^{-x}}{x^2} < 0$ فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x+1)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

■ (I) ③ أ

<u>الفروع اللانهائية :</u>

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C})$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

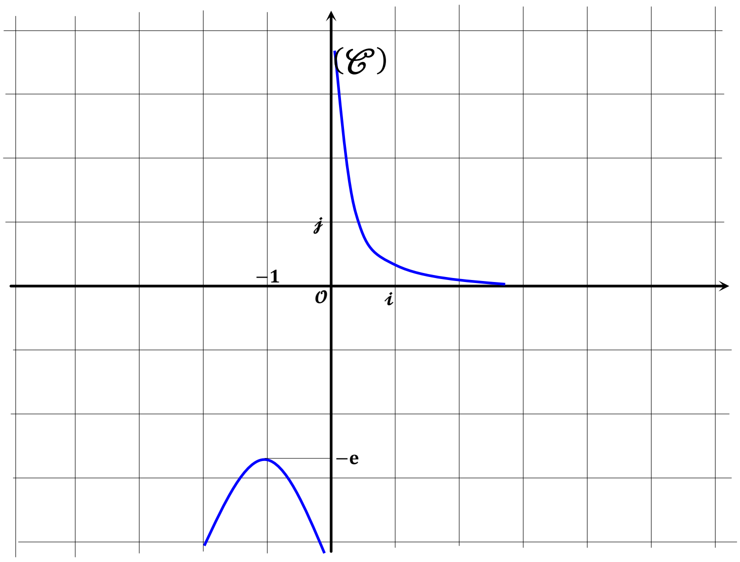
إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل.

■ (I) ③ ب

<u>تمثيل الدالة f .</u> $(\mathscr{C})$



■ (II) ①

نعتبر الدالة : $\varphi(x) = e^x - x - 1$

لدينا : $\varphi'(x) = e^x - 1$

إذا كان $x = 0$ فإن : $\varphi'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن : $\varphi'(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن : $\varphi'(x) < 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا : $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي 0

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \varphi(x) \geq 0$

أي : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x \geq (x+1)$

■ (II) ②

لدينا حسب السؤال ① : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^+)\ ;\ e^x \geq x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x > 0)\ ;\ xe^{-x} \leq \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x > 0)\ ;\ \frac{x^2}{x}e^{-x} \leq \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x > 0)\ ;\ x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$$

■ (II) ③ أ

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$

يعني : $0 < u_0 \leq \frac{1}{0+1}$

إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\quad 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

ننطلق من الطرف $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,u_n + u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,u_n + (2u_n - u_n) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,u_n + 2u_n \leq 1 + u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+2)u_n \leq (1+u_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+2)u_n}{(1+u_n)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{u_n}{1+u_n} \leq \frac{1}{n+2}} \ (\ast)$$

و لدينا $u_n \geq 0$ إذن حسب نتيجة السؤال 2 :

$$\boxed{(u_n)^2 f(u_n) \ \leq \frac{u_n}{1+u_n}} \ (\ast\ast)$$

من $(\ast)$ و $(\ast\ast)$ نستنتج أن : $(u_n)^2 f(u_n) \ \leq \dfrac{1}{n+2}$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\quad 0 < (u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\quad 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)+1}$$

إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $(n+1)$

و بالتالي : $\Leftrightarrow \boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\quad 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}}$

■ (II) 3 ب

بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\quad \underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty} 0} < u_n \leq \underbrace{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$

فإن : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

■ (II) 4 أ

ليكن $k\epsilon\mathbb{N}$. لدينا حسب تعريف المتتالية $(u_n)_n$:

$$(\forall k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_k = u_{k-1}e^{-u_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall k\epsilon\mathbb{N})\quad ;\quad \frac{1}{u_k} = \frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall k\epsilon\mathbb{N})\quad ;\quad \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall k\epsilon\mathbb{N})\quad ;\quad \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln(e^{u_{k-1}}) - \ln(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} u_{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\ln(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1}\ln(u_k)$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = v_n - \sum_{k=1}^{n-1}\ln(u_k) - \underbrace{\ln(u_0)}_{\overset{\|}{0}}$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(u_k)\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \ln(u_k)\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{u_k}{u_k}\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(1) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + 0 = v_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = v_n}$$

■ (II) 4 ب

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

و لدينا : $ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = v_n$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = +\infty$

■(III)①(أ)

ليكن : $x > 0$

$$\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{x^2}^{4x^2} = \ln(4x^2) - \ln(x^2) = \ln 4$$

■(III)①(ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال (II) ① $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x \geq x+1$

من أجل العدد $-x$ نحصل على : $e^{-x} \geq -x+1$

يعني : $e^{-x} - 1 \geq -x$

ليكن $x > 0$ إذن $-x < 0$

و منه : $e^{-x} < 1$ يعني : $\boxed{e^{-x} - 1 \leq 0}$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x > 0)\ ;\ -x \leq e^{-x} - 1 \leq 0$

■(III)②(أ)

ليكن x عددا حقيقيا موجبا

لدينا : $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$ و منه : $-1 < \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \leq 0$

$$\Leftrightarrow -\int_{x^2}^{4x^2} 1\,dt < \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt - \int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} 0\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 < F(x) - \ln 4 \leq 0$$

■(III)②(ب)

لدينا : $(\forall x > 0)\ ;\ -3x^2 \leq F(x) - \ln 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 < \frac{F(x) - 2\ln 2}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 < \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq 0$$

و بما أن : $\lim_{x \to 0^+} -3x = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$

فإن : $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0$

و بالتالي F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و نعلم أن الإشتقاق يستلزم الإتصال إذن F متصلة على اليمين في الصفر.

■(III)③(أ)

ليكن t عددا حقيقيا بحيث $t \geq 1$ إذن $\frac{1}{t} \leq 1$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الحقيقي الموجب قطعا e^{-t} نجد :

$$\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f(t) \leq e^{-t}}$$

■(III)③(ب)

لدينا حسب السؤال (أ) : $(\forall t \geq 1)\ ;\ f(t) \leq e^{-t}$

و لدينا كذلك حسب التمثيل المبياني للدالة f $\quad (\forall t > 0)\ ;\ f(t) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad (\forall t > 1)\ ;\ f(t) \geq 0$$

و منه : $(\forall t \geq 1)\ ;\ 0 < f(t) \leq e^{-t}$

$$\Rightarrow \quad 0 < \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 < F(x) \leq e^{-x^2} - e^{-4x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < F(x) \leq e^{-x^2}\left(1 - e^{-3x^2}\right)$$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2}\left(1 - e^{-3x^2}\right) = 0(1-0) = 0$

و بالتالي : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

■(III)④(أ)

لدينا f دالة متصلة على $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ .

بحيث : $\varphi'(x) = f(x)$

لدينا : $F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \ ;\ x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{4x^2} f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{0}^{4x^2} f(t)\,dt - \int_{0}^{x^2} f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \varphi(4x^2) - \varphi(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = 8x\varphi'(4x^2) - 2x\varphi'(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = 8xf(4x^2) - 2xf(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{8xe^{-4x^2}}{4x^2} - \frac{2xe^{-x^2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{2e^{-4x^2}}{x} - \frac{2e^{-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F'(x) = \frac{2e^{-x^2}\left(e^{-3x^2} - 1\right)}{x}}$$

■ (III) ④ (ب)

لدينا : $x > 0$ إذن : $\dfrac{2e^{-x^2}}{x} > 0$

و منه فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة بإشارة $e^{-3x^2} - 1$

و لدينا : $x > 0$ إذن : $-3x^2 < 0$ و منه : $e^{-3x^2} < 1$

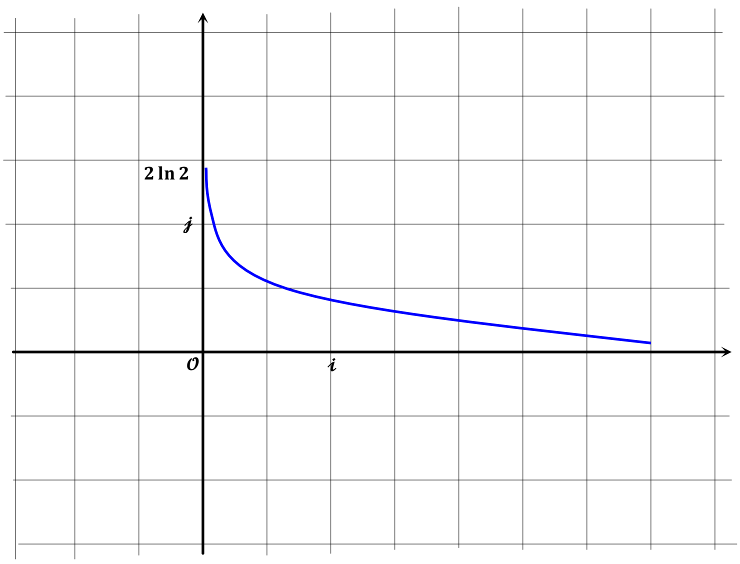
أي : $e^{-3x^2} - 1 < 0$.

و بالتالي : $(\forall x > 0)\ ;\ F'(x) < 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي :

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	
F	$2\ln 2$	$\searrow$	0

■ (III) ④ (ج)



■ (III) ⑤ (أ)

ليكن $x > 0$.سوف نستعمل مكاملة بالأجزاء.

نضع : $u(t) = \ln t$ و منه : $u'(t) = \frac{1}{t}$

و نضع : $v'(t) = e^{-t}$ و منه : $v(t) = -e^{-t}$

لدينا : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln t \, dt = [uv] - \int vu'$

$$\Leftrightarrow \quad G(x) = [-\ln t \cdot e^{-t}]_x^{4x} - \int_x^{4x} \frac{-e^{-t}}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad G(x) = e^{-x}\ln(x) - e^{-4x}\ln(4x) + \int_{(\sqrt{x})^2}^{4(\sqrt{x})^2} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{G(x) = e^{-x}\ln(x) - e^{-4x}\ln(4x) + F(\sqrt{x})}$$

■ (III) ⑤ (ب)

$$\lim_{x\to 0^+} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x = \lim_{x\to 0^+} e^{-x}(1 - e^{-3x})\ln x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{(3xe^{-x})}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 0}} \underbrace{\left(\frac{e^{-3x} - e^0}{-3x - 0}\right)}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 1}} \underbrace{(x\ln x)}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 0}} = 0$$

■ (III) ⑤ (ج)

لدينا : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}(\ln 4 + \ln x) + e^{-x}\ln x$

$$\Leftrightarrow \quad G(x) = F(\sqrt{x}) + (e^{-x} - e^{-4x})\ln x - e^{-4x}\ln 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{F(\sqrt{x})}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to \ln 4}} + \underbrace{(e^{-x} - e^{-4x})\ln x}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 0}} - \underbrace{e^{-4x}\ln 4}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to -\ln 4}} \right)$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2004

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس، نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس.

1. أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين. — 0,50 ن
2. أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين. — 0,50 ن
3. أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين. — 0,75 ن
4. أحسب الإحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء. — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1. حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $\boxed{(E)\ :\ 3x-2y=1}$. — 0,75 ن
2. ليكن $n\in\mathbb{N}$.
   - أ) بين أن : $(14n+3\ ,\ 21n+4)$ حل للمعادلة (E) . — 0,25 ن
   - ب) استنتج أن العددين $(14n+3)$ و $(21n+4)$ أوليان فيما بينهما . — 0,50 ن
3. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n+1)$ و $(21n+4)$.
   - أ) بين أن : $d=1$ أو $d=13$. — 0,50 ن
   - ب) بين أن : $n\equiv 6[13]\ \Leftrightarrow\ d=13$. — 0,25 ن
4. من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\geq 2$ نضع :

   $\boxed{A=21n^2-17n-4}$ و $\boxed{B=28n^3-8n^2-17n-3}$

   - أ) بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$. — 0,25 ن
   - ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B . — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

① ليكن a عددا عقديا غير منعدم مكتوب في شكله الجبري التالي : $a = \alpha + i\beta$.

لتكن $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$.

0,50 ن — (أ) حدد طبيعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن — (ب) أنشىء $(\mathcal{H})$ في الحالة : $a = 1 + i$.

② لتكن $(\mathcal{C})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$.

0,75 ن — (أ) حدد طبيعة $(\mathcal{C})$.

0,25 ن — (ب) أنشىء $(\mathcal{C})$ في الحالة : $a = 1 + i$.

③ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ النظمة التالية :

$$(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

نضع : $u = z - a$.

0,75 ن — (أ) بين أن النظمة (S) تكافىء النظمة :

$$(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$$

0,75 ن — (ب) نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

حدد بدلالة r و θ ألحاق نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{H})$.

0,50 ن — (ج) استنتج أن تقاطع $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{H})$ يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الرابع : (10,5 ن)

(I) لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 4xe^{-x\ln 2} - 2$ و $g(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{T})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,75 ن — ① (أ) أحسب نهايتي f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

0,50 ن — (ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$.

0,75 ن — ② (أ) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 4(1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$.

0,75 ن — (ب) اعط جدول تغيرات الدالة f .

بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيدين للمعادلة $f(x) = 0$

0,75 ن — ③ أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية – النهايات – التغيرات.

0,50 ن — ④ ارسم $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{T})$ في نفس المعلم . $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm)$

تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب نأخذ : $\dfrac{1}{\ln 2} \approx 1,4$ و $\dfrac{1}{e} \approx 0,4$ و $e \approx 2,7$ و $\ln 2 \approx 0,7$

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$

0,75 ن | ① أ) تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

0,75 ن | ب) حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$.

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2}$.

0,50 ن | ② أ) تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$.

0,50 ن | ب) إعط جدول تغيرات f_k .

0,50 ن | ③ أ) استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b . بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$

0,75 ن | ب) بين أن $a = \alpha$ و $b = \beta$

0,75 ن | ④ أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \epsilon \mathbb{R})$

0,75 ن | ب) أحسب التكامل : $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)dx$ بدلالة α و β .

0,50 ن | ج) استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$

0,75 ن | ⑤ بين أنه إذا كان u و v عددان حقيقيان مختلفين موجبين قطعا . بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$

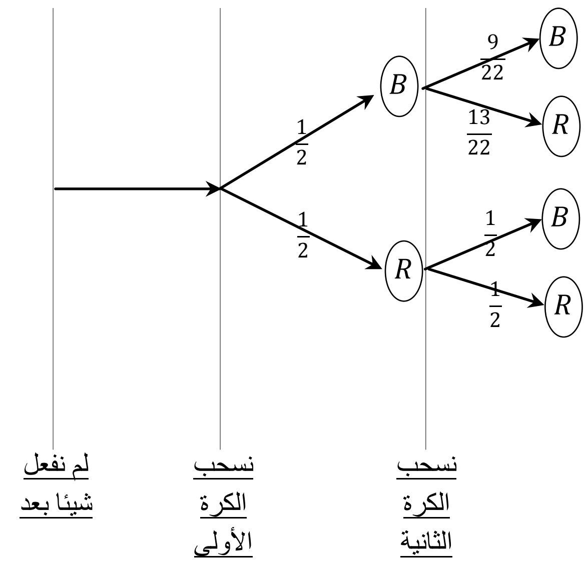
فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$

التمرين الأول : (2,5 ن)

■ ①

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو شجرة الاحتمالات .

من معطيات التجربة العشوائية نستنتج شجرة الإحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R\cap R)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

■ ②

لدينا حسب الشجرة : $P(B\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}=\frac{9}{44}$

■ ③

لدينا حسب الشجرة :

$$\begin{aligned} P(\text{لونين مختلفين}) &= P(B\cap R)+P(R\cap B)\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{13}{22}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &=\frac{6}{11}\end{aligned}$$

■ ④

نستعمل الاحتمال الشرطي التالي :

$$p_{B_2}(B_1)=\frac{p(B_1\cap B_2)}{p(B_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}}{\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ ①

نلاحظ في البداية أن $(1,1)$ حل خاص للمعادلة (E)

لأن : $\boxed{3\times1-2\times1=1}$ $(*)$

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\boxed{3x-2y=1}$ $(**)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ نحصل على :

$$3(x-1)-2(y-1)=0$$

و منه : $\boxed{3(x-1)=2(y-1)}$ $\otimes$ إذن : $3\,/\,2(y-1)$

و بما أن : $3\wedge2=1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $3\,/\,(y-1)$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=3k+1$

نعوض y بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على : $3(x-1)=2(3k)$

يعني : $x=2k+1$

عكسيا : لدينا $3(2k+1)-2(3k+1)=1$

و بالتالي :مجموعة حلول المعادلة تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(2k+1\,;3k+1)\quad/\quad k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

■ ② أ

لدينا :

$$3(14n+3)-2(21n+4)=42n+9-42n-8=1$$

إذن $(14n+3\,;21n+4)$ حل للمعادلة (E) .

■ ② ب

بما أن : $3(14n+3)-2(21n+4)=1$

فإنه حسب $(Bezout)$: $(14n+3)\wedge(21n+4)=1$

■ ③ أ

ليكن $(21n+4)\wedge(2n+1)=d$

باستعمال خوارزمية إقليدس نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} (21n+4) & (2n+1) \\ \cline{2-2} (n-6) & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (2n+1) & (n-6) \\ \cline{2-2} 13 & 2 \end{array}$$

من هاتين الإقليديتين نستنتج أن :

$$\begin{aligned}(21n+4)\wedge(2n+1)&=(2n+1)\wedge(n-6)\\ &=(n-6)\wedge13\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{d = (n-6) \wedge 13}$ $(\star)$

و منه : $d \,/\, 13$

و نعلم أن 13 عدد أولي إذن : $d = 1$ أو $d = 13$

■ ③ ب

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب $(\star)$: $d \,/\, (n-6)$

(لأن d قاسم مشترك لـ 13 و $(n-6)$)

أي : $13 \,/\, (n-6)$ و منه : $n \equiv 6[13]$

■ ④ أ

نضع : $A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4$

و : $B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

لدينا : $P(1) = Q(1) = 0$

إذن : 1 جذر للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في $\mathbb{Z}$.

و منه : $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على : $(n-1)$

■ ④ ب

بالاستعانة بالقسمة الأقليدية نحصل على :

$A = (n-1)(21n+4)$

$B = (n-1)(28n^2+20n+3)$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2+20n+3)$ نحصل على :

$B = (n-1)(2n+1)(14n+3)$

تذكير بخاصية مهمة :

$$\boxed{c \wedge a = 1 \implies (\forall b \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; a \wedge b = a \wedge (bc)}$$

ليكن : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = d$

لدينا حسب السؤال ② ب $(14n+3) \wedge (21n+4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة :

$$(21n+4) \wedge (2n+1) = (21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3)$$

و منه : $(21n+4) \wedge (2n+1) = d$

إذن حسب السؤال ③ أ $d = 13$ أو $d = 1$

الحالة الأولى : إذا كان $d = 13$.

إذن حسب السؤال ③ ب : $n \equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = 13$

يعني :

$$\boxed{(n-1)(21n+4) \wedge (n-1)(2n+1)(14n+3) = 13(n-1)}$$

و منه : $\boxed{A \wedge B = 13(n-1)}$

الحالة الثانية : إذا كان $d = 1$ فإن : $n \not\equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = 1$

يعني : ——————————————

$$(n-1)(21n+4) \wedge (n-1)(2n+1)(14n+3) = (n-1)$$

و منه : $A \wedge B = (n-1)$

خلاصة :

$$(\forall n \geq 2) \; ; \; A \wedge B = \begin{cases} 13(n-1) \; ; & si \quad n \equiv 6[13] \\ (n-1) \; ; & si \quad n \not\equiv 6[13] \end{cases}$$

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ ① أ

نضع : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$

$$\Leftrightarrow \quad (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (a - \bar{a})(a + \bar{a})$$

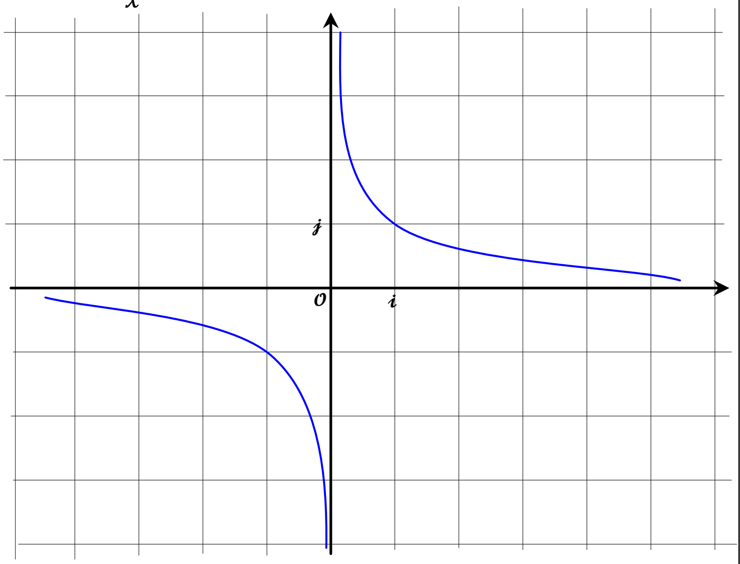
$$\Leftrightarrow \quad (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad xy = \alpha\beta$$

و منه المجموعة $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \dfrac{\alpha\beta}{x}$

■ ① ب

في حالة $a = (1+i)$ لدينا $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \dfrac{1}{x}$



■ ② أ

ليكن : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $(z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$

$$\Leftrightarrow \quad z\bar{z} - (z\bar{\mathbb{a}} + \mathbb{a}\bar{z}) + \mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+y^2) - (2\alpha x + 2\beta y) + \alpha^2 + \beta^2 = (2|\mathbb{a}|)^2$$

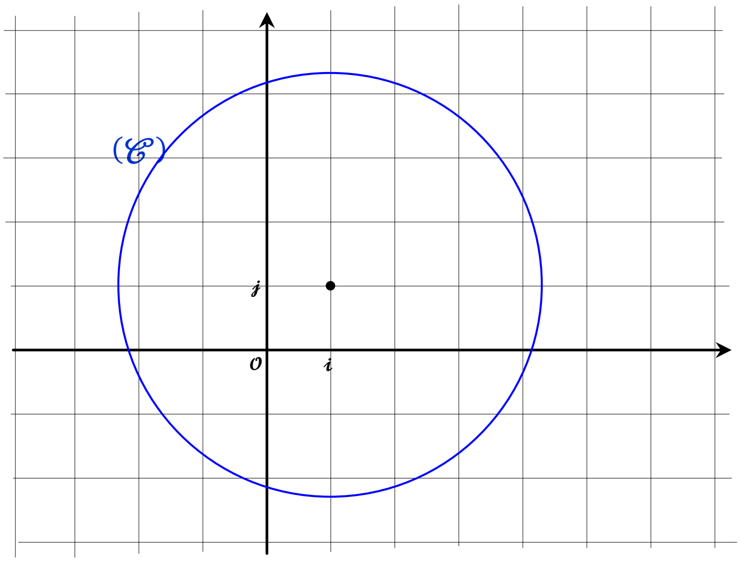
$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = (2|\mathbb{a}|)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (2|\mathbb{a}|)^2$$

إذن : $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها النقطة $C(\alpha,\beta)$ و شعاعها $r = 2|\mathbb{a}|$

■ ② أ

في حالة $\mathbb{a} = (1+i)$ لدينا $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها $C(1,1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



■ ③ أ

لدينا : $u = z - \mathbb{a}$ إذن : $\bar{u} = \bar{z} - \bar{\mathbb{a}}$

ننطلق من الكتابة : $\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = \mathbb{a}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2 \\ (z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^2 - \mathbb{a}^2 = \bar{z}^2 - \bar{\mathbb{a}}^2 \\ (z-\mathbb{a})(\bar{z}-\bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (z-\mathbb{a})(z+\mathbb{a}) = (\bar{z}-\bar{\mathbb{a}})(\bar{z}+\bar{\mathbb{a}}) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u+2\mathbb{a}) = \bar{u}(\bar{u}+2\bar{\mathbb{a}}) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

لدينا حسب المعادلة الثانية : $\bar{u} = \dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}$

نعوض $\bar{u}$ بقيمته في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u+2\mathbb{a}) = \dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u} + 2\bar{\mathbb{a}}\right) \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^2 + 2\mathbb{a}u - \left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\right)^2 - 2\bar{\mathbb{a}}\left(\dfrac{4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}}{u}\right) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^4 + 2\mathbb{a}u^3 - 16\mathbb{a}^2\bar{\mathbb{a}}^2 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2 u = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (u^4 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2 u) + (2\mathbb{a}u^3 - 16\mathbb{a}^2\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) + 2\mathbb{a}(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (S') \quad \begin{cases} (u+2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

■ ③ ب

لنحل النظمة (S') بحيث : $\mathbb{a} = re^{i\theta}$

لدينا حسب المعادلة الثانية من النظمة (S') :

$$(u+2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (u+2\mathbb{a}) = 0 \quad \text{أو} \quad (u^3 - 8\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -2re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^3 = 8r^3e^{i\theta}$$

حلول المعادلة : $u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد للعقدي $8r^3e^{-i\theta}$ و التي تكتب بصفة عامة على شكل : $u_k = \left[\sqrt[3]{8r^3}\ ,\ \dfrac{-\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}\right]$. مع $k\{0,1,2\}$

و لدينا : $u_0 = \left[2r\ ;\ \dfrac{-\theta}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}}$

$$u_1 = \left[2r\ ;\ \dfrac{-\theta}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}}$$

$$u_2 = \left[2r\ ;\ \dfrac{-\theta}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}}$$

إذن حلول النظمة هي :

$\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}}}$ $\boxed{-2re^{-i\theta}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}}}$ $\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}}}$

و نعلم أن : $z = u + a$

إذن القيم التي يأخذها z هي :

$$\boxed{-re^{-i\theta}} \qquad \boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}} + re^{i\theta}}$$

$$\boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}} + re^{i\theta}} \qquad \boxed{2re^{\frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}} + re^{i\theta}}$$

■ 3 ج

نضع : $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$

نريد أن نبرهن على أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

لدينا :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2r - 2rj}{2r\bar{j} - 2rj} = \frac{1 - j}{\bar{j} - j} = \frac{1 - j}{-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

إذن : $\left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| \equiv 1$ و $arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

و منه : $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع (غير مباشر)

التمرين الرابع : (10ن)

الجزء الأول

■ 1 أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(4xe^{-xln2} - 2\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{4}{ln2}\right)\frac{1}{\left(\frac{e^{xln2}}{xln2}\right)} - 2\right)$$

$$= \left(\frac{4}{ln2}\right)\left(\frac{1}{0^-}\right) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{4}{ln2}\right)\frac{1}{\left(\frac{e^{xln2}}{xln2}\right)} - 2\right)$$

$$= \left(\frac{4}{ln2}\right)\left(\frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \boxed{-2}$$

■ 1 ب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(4e^{-xln2} - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

فإن : $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

■ 2 أ ب

$$f'(x) = 4(1 - xln2)e^{-xln2}$$

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 4e^{-xln2} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - xln2)$

إذا كان : $x = \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{1}{ln2}$ فإن : $f'(x) > 0$

و لدينا : $f\left(\frac{1}{ln2}\right) = \frac{4}{eln2} - 2$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{ln2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{eln2} - 2$	↘ -2

■ 2 ج

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

إذن f تقابل من المجال $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$ نحو المجال $f\left(\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]\right)$

و لدينا : $f\left(\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]\right) = \left]-\infty, \frac{4}{eln2} - 2\right] \approx \left]-\infty, \frac{1}{10}\right]$

و بما أن : $0\ \epsilon \left]-\infty, \frac{1}{10}\right]$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

و لدينا : $f(1) = 4e^{-ln2} - 2 = 0$

و $1\ \epsilon \left]-\infty, \frac{1}{ln2}\right]$

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f

f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$

إذن f تقابل من $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$ نحو صورته $\left]-2,\frac{1}{10}\right]$

مع : $\frac{4}{eln2}-2 \approx \frac{1}{10}$

و بما أن : $0 \in \left]-2,\frac{1}{10}\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$

و لدينا : $2 \in \left[\frac{1}{ln2},+\infty\right[$ ولدينا : $f(2)=0$

خلاصة : العددان 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x)=0$

■ 3 أ

دراسة الدالة g : $g(x)=\frac{ln(2x)}{x}$

لدينا g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$

و لدينا : $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(2x)}{x}\right)=-\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{T})$

و لدينا : $\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{ln(2x)}{x}\right)=0$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي لـ $(\mathcal{T})$ بجوار $+\infty$

$$g'(x)=\frac{1-ln(2x)}{x^2}$$

إذا كان : $x=\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)=0$

إذا كان : $x>\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)<0$

إذا كان : $x<\frac{e}{2}$ فإن : $g'(x)>0$

و لدينا : $g\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{2}{e}$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

■ 3 ب

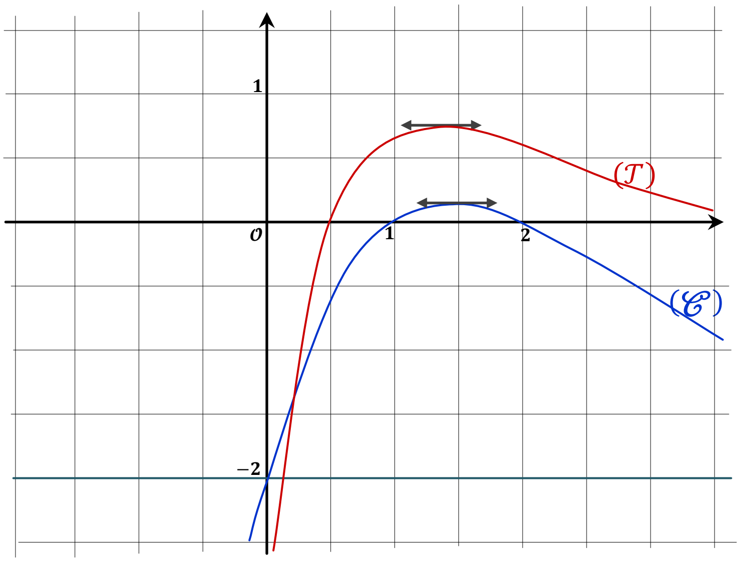
قبل رسم $(\mathcal{T})$ أضيف نقطة تقاطع $(\mathcal{T})$ مع محور الأفاصيل و التي يحقق أفصولها المعادلة $g(x)=0$

لنحل المعادلة : $g(x)=0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{ln(2x)}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad ln(2x)=ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$



الجزء الثاني

■ 1 أ

لدينا : $g'\left(\frac{e}{2}\right)=0$

إذن $(\mathcal{T})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2};\frac{2}{e}\right)$

و منه المستقيم $(\Delta):y=\frac{2}{e}$ يقطع $(\mathcal{T})$ في نقطة واحدة و هي Ω

و لدينا حسب الرسم المبياني : $(\mathcal{T})$ مقعر

إذن كل مستقيم $(D):y=k$ متواجد بين (Δ) و محور الأفاصيل يقطع $(\mathcal{T})$ في نقطتين

و بالتالي : المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلين α و β مختلفين بشرط أن يكون : $0<k<\frac{2}{e}$

بما أن : $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ و α و β مختلفين فإن أحدهما أصغر من الآخر و نضع $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$

■ ① ب

ليكن α و β حلا المعادلة $f(x) = 0$

بما أن : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإنه حسب السؤال ② ج من الجزء الأول: $\alpha = 1$ و $\beta = 2$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال ① أ من الجزء الثاني :

α و β هما حلا المعادلة $g(x) = k$

و منه : $g(1) = k$ و $g(2) = k$

أي : $ln2 = k$ و $ln4 = 2k$

و بالتالي : $k = ln2$

■ ② أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$f_k'(x) = 4\left(e^{-kx} - kxe^{-kx}\right) = 4(1-kx)e^{-kx}$$

■ ② ب

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{ke}-2$	$\searrow$	-2

■ ③ أ

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_k :

f_k تقابل من $\left]-\infty;\frac{1}{k}\right[$ نحو $\left]-\infty;\frac{4}{ke}-2\right[$ لأنها متصلة و تزايدية قطعا

و لدينا : $0 \in \left]-\infty;\frac{4}{ke}-2\right[$

لأن :

لدينا : $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن : $\frac{1}{k} > \frac{e}{2}$

و منه : $\frac{4}{ke} > 2$

أي : $\frac{4}{ke} - 2 > 0$

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا a في المجال $\left]-\infty;\frac{1}{k}\right[$ بالتقابل f_k

و بنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$ نحو $\left]-2;\frac{4}{ke}-2\right[$

لأنها متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$.

بما أن $0 \in \left]-2;\frac{4}{ke}-2\right[$ فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا b

من المجال $\left]\frac{1}{k};+\infty\right[$ بالتقابل f_k

يعني : $f_k(b) = 0$ و $b > \frac{1}{k}$

و بالتالي : المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين

a و b بحيث $a < \frac{1}{k} < b$

■ ③ ب

نلاحظ أن $f_{\ln 2}(x) = f(x)$

و نعلم أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x) = 0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2

و لدينا المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين a و b

كيفما كان $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن لدينا بالضرورة $a = 1$ و $b = 2$ لأن a و b وحيدين.

■ ④ أ

$$\int_0^t xe^{-kx}\,dx = \left[\frac{xe^{-kx}}{-k}\right]_0^t - \int_0^t \left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \left[\frac{xe^{-kx}}{-k}\right]_0^t + \frac{1}{k}\left[\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \left(\frac{te^{-kt}}{-k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(1 - kte^{-kt} - e^{-kt}\right)$$

■ ④ ب

لدينا :
$$I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(4xe^{-kx} - 2\right)dx$$
$$= 4\left(\int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx\right) - 2(\beta - \alpha)$$

لدينا : $\displaystyle\int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx = \int_0^\beta xe^{-kx}\,dx - \int_0^\alpha xe^{-kx}\,dx$

$$= \frac{1}{k^2}\left(1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta}\right)$$

و نعلم أن : $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$

إذن : $4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0$ و $4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0$

و منه : $\overset{(1)}{\boxed{2\alpha = e^{\alpha k}}}$ و $\overset{(2)}{\boxed{2\beta = e^{\beta k}}}$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل $\displaystyle\int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx$

نحصل على : $\displaystyle\int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta}\right)$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta xe^{-kx}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)}{2\alpha\beta k^2}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نحصل على :

$$I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)dx = 4\left(\int_\alpha^\beta \left(xe^{-kx}\right)dx\right) - 2(\beta-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{4(\beta-\alpha)}{2\alpha\beta k^2} - 2(\beta-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = 2(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_k = \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha\beta k^2}(1-\alpha\beta k^2)}$$

■ 4 ج

بما أن α و β عددان حقيقيان موجبان قطعا و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإن التكامل I_k يقيس مساحة و منه I_k كمية موجبة.

إذن : $(1-\alpha\beta k^2) \geq 0$

يعني : $\boxed{(\alpha k)(\beta k) \leq 1}$ $(\star)$

باستعمال العلاقتين (1) و (2) نستنتج منهما :

$\boxed{(\alpha k) = ln(2\alpha)}$ و $\boxed{(\beta k) = ln(2\beta)}$

و بالتالي بالرجوع إلى $(\star)$ نحصل على :

$$\boxed{ln(2\alpha)\cdot ln(2\beta) \leq 1}$$

■ 5

ليكن u و v عددان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعا بحيث :

$$\frac{ln(u)}{u} = \frac{ln(v)}{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)}$$

نضع : $\displaystyle\frac{ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k$

إذن العددان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $\displaystyle\frac{ln(2x)}{x} = k$

أو بتعبير آخر $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $g(x) = k$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g :

$\frac{2}{e}$ قيمة قصوية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\;;\; 0 \leq \dfrac{ln(2x)}{x} \leq \dfrac{2}{e}$

و منه : $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

لدينا إذن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلا المعادلة : $g(x) = k$ بحيث $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

و بالتالي يمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصا نتيجة السؤال 4 ج

إذن : $ln\left(2.\frac{u}{2}\right)\cdot ln\left(2.\frac{v}{2}\right) \leq 1$

و بالتالي : $\boxed{ln(u)\cdot ln(v) \leq 1}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2005

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ,\quad (\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ :\ (a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{ay+bx}{2}\right)$$

لتكن المجموعة : $E=\left\{\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\mathbb{R}^2/\ m\epsilon\mathbb{R}^*\right\}$

0,75 ن ① بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في E .

② ليكن φ التطبيق المعرف على $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $(\forall m\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m}\ ;m-\frac{1}{m}\right)$

0,50 ن (أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

0,75 ن (ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد .

و مماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m}\ ;m-\frac{1}{m}\right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم .

نعتبر المجموعة . $F=\{(x\ ,y)\epsilon\mathbb{R}^2\ ;\ x\geq 2\ \text{و}\ y^2=x^2-4\}$

1,00 ن (أ) بين أن : $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2/\ m>0\ \right\}$

1,00 ن (ب) بين أن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

(I) p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي 5

0,50 ن ① بين أن : $p^2\equiv 1[3]$.

0,50 ن ② (أ) باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث : $p^2-1=4q(q+1)$.

0,50 ن (ب) استنتج أن : $p^2\equiv 1[8]$.

0,50 ن ③ بين أن : $p^2\equiv 1[24]$.

(II) ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24

0,50 ن ① بين أن : $a^2\equiv 1[24]$.

0,50 ن ② هل توجد أعداد صحيحة طبيعية $a_1\ ,a_2\ ,\cdots,a_{23}$ حيث :

$$\forall k\epsilon\{1,2,\dots,23\}\ ;\ a_k\wedge 24=1 \quad \text{و} \quad {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{23}}^2=23997$$

التمرين الثالث : (8,5 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، (الوحدة $2cm$)

0,25 ن ① (أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 .

0,25 ن (ب) بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

0,50 ن (ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

0,25 ن ② (أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall t \geq 0\ )\ ;\ 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \dfrac{t^2}{2}$

0,50 ن (ج) بين أن : $(\forall x > 0\ );\ \dfrac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{x}$

0,25 ن (د) استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلته .

0,50 ن ③ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

(II) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right) e^{\frac{-2}{x}} & ; \ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ن ① بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

0,50 ن ② أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$.

0,50 ن ③ (أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $f_n(x) = \dfrac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty]$.

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall x > 0), (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_{n+1}(x) - \dfrac{2}{n+1} > f_n(x) - \dfrac{2}{n}$

0,75 ن (ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

نضع : $a = \lim\limits_{\infty} a_n$

0,50 ن (د) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

0,50 ن (هـ) بين أن : $a = 0$.

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$

(بحيث f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

0,25 ن ① أ بين أن : $xf(x) \le F(x) \le xf(2x)$; $(\forall x>0)$.

0,25 ن ب أحسب : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 ن ② أ بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال : $[0,+\infty[$.

0,75 ن ب بين أن : $x>0$; $\begin{cases} F'(x)=e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) \\ F'_d(0)=0 \end{cases}$

($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في 0)

0,50 ن ③ إعط جدول تغيرات الدالة F .

التمرين الرابع : (4,5 ن)

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 نضع : $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$

0,25 ن ① أ حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy)=iy$.

1,00 ن ب حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): f(z)=z$.

نرمز بـ z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث : $\begin{cases} \Re e(z_1)>Re(z_2) \\ \Re e(z_0)=0 \end{cases}$

0,50 ن ② أ تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

0,75 ن ب استنتج الكتابة المثلثية لكل من z_1 و z_2

③ في هذا السؤال نفترض أن : $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\le\alpha<\pi$

0,50 ن أ بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$.

0,25 ن ب حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

0,75 ن ج أكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\epsilon\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

0,50 ن ④ حدد z إذا علمت أن : $|z|=1$ و $\Re e\big(f(z)\big)=\frac{1}{2}$.

التمرين الأول : (4,0 ن)

■ ①

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{R}^*$

ليكن : $\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)$ و $\left(n+\frac{1}{n}\ ;\ n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من E

لدينا :
$$\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ m-\frac{1}{m}\right)*\left(n+\frac{1}{n}\ ;\ n-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(mn+\frac{1}{mn}\ ;\ mn-\frac{1}{mn}\right)$$

بما أن : $n\neq 0$ و $m\neq 0$ فإن : $mn\neq 0$

و منه : $\left(mn+\frac{1}{mn}\ ;\ mn-\frac{1}{mn}\right)\epsilon\, E$

و بالتالي : $*$ قانون تركيب داخلي في E .

■ ② أ

ليكن $\varphi(m)$ و $\varphi(n)$ عنصرين من E

لدينا حسب السؤال ① : $\varphi(m)*\varphi(n)=\varphi(mn)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

ليكن A عنصرا من E . إذن حسب تعريف المجموعة E :

$$(\exists!\, m\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \ \varphi(m)=A$$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

■ ② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

لدينا $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 و كل عنصر a يقبل مماثلا $\frac{1}{a}$ بالقانون $\times$.

و بما أن φ تشاكل تقابلي فإن :

$(E,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو $\varphi(1)$ و كل عنصر $\varphi(m)$ يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)$ بالقانون $*$.

و لدينا : $\varphi(1)=(2,0)$

و $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)=\left(m+\frac{1}{m}\ ;\ -m+\frac{1}{m}\right)$

■ ③ أ

ليكن (x,y) عنصرا من F

إذن : $\begin{cases} x\geq 2 \\ y^2=x^2-4\end{cases}$

نطرح السؤال : هل يوجد عدد حقيقي موجب m بحيث : $m+\frac{1}{m}=x$

و للإجابة على هذا السؤال نبين أن المعادلة

$m+\frac{1}{m}=x$ تقبل على الأقل حلا موجبا m

لدينا : $m+\frac{1}{m}=x$

$$\Leftrightarrow\ \ m^2-mx+1=0$$

لدينا : $\Delta=x^2-4=(x-2)(x+2)$

بما أن : $x\geq 2$ فإن : $\Delta>0$

و منه المعادلة تقبل حلين مختلفين m_1 و m_2

$$m_1=\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}\quad \text{و} \quad m_2=\frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$$

الحل m_1 عدد حقيقي موجب قطعا إذن فإشارة الحل الثاني m_2 لا تهمنا علما أنه تم إيجاد حل موجب للمعادلة

نستنتج إذن أن :

$$(\forall x\geq 0),(\exists m>0)\ ;\ \ x=m+\frac{1}{m}$$

و لدينا : $y^2=x^2-4$

إذن : $y=\pm\sqrt{x^2-4}$

$$=\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+2-4}=\pm\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=\pm\left(m-\frac{1}{m}\right)$$

نختار : $y=\left(m-\frac{1}{m}\right)$

إذن : $(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\,\mathbb{R}^2\ \ /\ \ m>0$

__عكسيا__ : ننطلق من : $\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\epsilon\,\mathbb{R}^2\ \ /\ \ m>0$

لنبرهن أن المتراجحة $m+\frac{1}{m}\geq 2$

تقبل حلولا من أجل $m>0$.

المتراجحة تكافئ : $\frac{m^2+1}{m}\geq 2$

نضرب طرفي المتراجحة في العدد الموجب m نحصل على :

$$m^2 + 1 \geq 2m$$

يعني : $m^2 - 2m + 1 \geq 0$ أي : $(m-1)^2 \geq 0$

و هذه العبارة صحيحة كيفما كان العدد الحقيقي m .

و بالأخص من أجل $m > 0$

خلاصة :

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4\}$$
$$= \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 \ / \ m > 0 \right\}$$

■ ③ ب

من بين عناصر المجموعة F نجد الزوج $(2,0)$. إذن : $F \neq \emptyset$

و من الصيغة الثانية للمجموعة F نستنتج أن : $F \subset E$

لأن : $m > 0 \implies m \in \mathbb{R}^*$

و بالتالي : F جزء غير فارغ من E (1)

ليكن X_m و X_n عنصرين من F بحيث :

$$\begin{cases} X_m = \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right) ; \ m > 0 \\ X_n = \left(n + \frac{1}{n} ; n - \frac{1}{n} \right) ; \ n > 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$X_m * (X_n)' = \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right) * \left(n + \frac{1}{n} ; -n + \frac{1}{n} \right)$$
$$= \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{\frac{m}{n}} ; \frac{m}{n} - \frac{1}{\frac{m}{n}} \right) = X_{\left(\frac{m}{n}\right)}$$

بما أن : $m > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{m}{n} > 0$ و منه $X_{\left(\frac{m}{n}\right)} \in F$

أي : $(X_m) * (X_n)' \in F$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ (I) ①

لدينا p و 3 عددان أوليان .

إذن $3 \wedge p = 1$ و منه 3 لا تقسم p

و بالتالي حسب مبرهنة $(Fermat)$: $p^{3-1} \equiv 1[3]$

■ (I) ② أ

نعلم أن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2

و بما أن p عدد أولي و أكبر من 5 فإنه بالضرورة p سيكون عددا فرديا.

إذن : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p = 2q + 1$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 = (2q+1)^2$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 = 4q^2 + 4q + 1$

يعني : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 4q(q+1)$

■ (I) ② ب

لدينا : $(\exists q \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 4q(q+1)$

و لدينا q و $(q+1)$ عددان صحيحان طبيعيان متتابعان .

إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي .

و منه الجداء $q(q+1)$ عدد زوجي دائما .

يعني : $(\exists m \in \mathbb{N}) \ ; \ q(q+1) = 2m$

إذن : $(\exists m \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 4(2m)$

أي : $(\exists m \in \mathbb{N}) \ ; \ p^2 - 1 = 8m$

و منه : $8 \ / \ (p^2 - 1)$ أي : $\boxed{p^2 \equiv 1[8]}$

■ (I) ③

في البداية وجب التذكير بالخاصية التالية :

إذا كان : p_1 و p_2 و ... و p_k أعداد أولية و كانت n_1 و n_2 و ... و n_k أعدادا صحيحة طبيعية بحيث : $(\forall i) \ ; \ (p_i)^{n_i} \ / \ a$

فإن : $\left(\prod_{i=1}^{k} {p_i}^{n_i} \right) / \ a$

لدينا : $24 = 2^3 \times 3^1$

و لدينا كذلك حسب نتائج الأسئلة السابقة : $8/(p^2-1)$ و $3/(p^2-1)$

يعني : $2^3/(p^2-1)$ و $3^1/(p^2-1)$

و نعلم أن 3 و 2 عددان أوليان

إذن حسب الخاصية أعلاه : $2^3 \times 3^1/(p^2-1)$

يعني : $24/(p^2-1)$

و بالتالي : $p^2 \equiv 1[24]$

و أشير إلى أنه يوجد شكل آخر للخاصية المذكورة و هو كالتالي :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad mn / a$$

■ (II) ①

لدينا a عدد صحيح طبيعي بحيث : $a \wedge 24 = 1$

نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : إذا كان a عددا أوليا.</u>

لدينا : $2 \wedge 24 \neq 1$ و $3 \wedge 24 \neq 1$ و $5 \wedge 24 \neq 1$

إذن : a عدد أولي أكبر من 5

و منه حسب نتائج الفقرة(I): $a^2 \equiv 1[24]$

<u>الحالة الثانية : إذا كان a غير أولي</u>

ليكن $(p_1{}^{n_1} p_2{}^{n_2} \cdots p_k{}^{n_k})$ تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية

بما أن $a \wedge 24 = 1$ أي : $a \wedge (2^3 3^1) = 1$

فإن : جميع الأعداد الأولية p_1 و p_2 و ... و p_k تخالف 2 و تخالف 3

و منه : $(\forall i \epsilon [\![1, k]\!])$; $p_i \geq 5$

إذن يمكننا استعمال نتائج الفقرة الأولى من التمرين.

لدينا : $p_1^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_1^2)^{n_1} \equiv 1[24]$

و لدينا : $p_2^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_2^2)^{n_2} \equiv 1[24]$

و لدينا : $p_3^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_3^2)^{n_3} \equiv 1[24]$

$\vdots \qquad \vdots$

و لدينا : $p_k^2 \equiv 1[24]$ إذن : $\left(p_k^2\right)^{n_k} \equiv 1[24]$

عند المرور إلى الجداء نحصل على : $p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} p_3^{2n_3} \cdots p_k^{2n_k} \equiv 1[24]$

و منه : $\left(p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \cdots p_k^{n_k}\right)^2 \equiv 1[24]$

و بالتالي : $\boxed{a^2 \equiv 1[24]}$

■ (II) ②

سوف نستعمل البرهان بالخلف.

نفترض وجود الأعداد a_1 و a_2 و.... و a_{23}

بحيث : $(\forall k \epsilon [\![1,23]\!])$; $a_k \wedge 24 = 1$ و $a_1^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997$

لدينا كل عدد a_k أولي مع 24

إذن حسب السؤال (II) ①
$$\begin{cases} a_1^2 \equiv 1[24] \\ a_2^2 \equiv 1[24] \\ \vdots \\ a_{23}^2 \equiv 1[24] \end{cases}$$

عند المرور إلى الجمع بين هذه المتفاوتات نحصل على :

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{23}^2 \equiv 23[24]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{23997 \equiv 23[24]} \ (1)$$

نستعين بالآلة الحاسبة لنحصل على : $\boxed{23997 \equiv 21[24]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $23 \equiv 21[24]$

يعني : $2 / 24$ و هذا مستحيل بطبيعة الحال

و بالتالي : لا وجود لأعداد a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_{23} أولية مع 24
و تحقق : $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997$

<u>**التمرين الثالث : (8,5 ن)**</u>

■ (I) ① أ

لدينا :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+2) e^{\frac{-2}{x}} = 2 \times e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في الصفر .

■ (I) ① ب

لدينا : $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2) e^{\frac{-2}{x}}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{-2}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{-2}{x}} - \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-2}{x}\right) e^{\frac{-2}{x}}$$

$$= 0 - \lim_{\substack{u \to -\infty \\ u = \frac{-2}{x}}} u e^u$$

$$= 0 - 0 = 0 = f_d'(0)$$

■ (I)(1)(ج)

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$

لدينا : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$

إذن : $f'(x) = e^{\frac{-2}{x}} + \left(\frac{-2}{x}\right)'(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{-2}{x}} + \frac{2}{x^2}(x+2)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{2x+4+x^2}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{x^2+2x+1+3}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2+3}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}} > 0$$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

■ (I)(2)(أ)

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+2)}_{+\infty}\ \underbrace{e^{\frac{-2}{x}}}_{1} = +\infty$$

■ (I)(2)(ب)

ليكن t عددا حقيقيا موجبا

نضع : $\begin{cases} \varphi(t) = 1-t \\ \psi(t) = 1-t+\dfrac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t-1 \\ h'(t) = -e^{-t} \end{cases}$

لدينا : $t \geq 0$ إذن : $-t \leq 0$

و منه : $-e^{-t} \leq -1$ يعني : $h'(t) \leq \varphi'(t)$

و بما أن : $h(0) = \varphi(0) = 1$

فإن : $\forall t \in [0,+\infty[\ ; \ h(t) \leq \varphi(t)$

يعني : $\boxed{\forall t \in [0,+\infty[\ ; \ e^{-t} \leq 1-t}$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج أن : $-e^{-t} \geq t-1$

إذن : $h'(t) \geq \psi'(t)$

و بما أن : $h(0) = \psi(0) = 1$

فإن : $h(t) \geq \psi(t)$

يعني : $\boxed{\forall t \in [0,+\infty[\ ; \ e^{-t} \geq 1-t+\frac{t^2}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall t \in [0,+\infty[\ ; \ 1-t \leq e^{-t} \leq 1-t+\frac{t^2}{2}$$

و بالتالي : $\boxed{\forall t \in [0,+\infty[\ ; \ 0 \leq e^{-t}+t-1 \leq \frac{t^2}{2}}$

■ (I)(2)(ج)

ليكن $x > 0$ إذن $\frac{2}{x} > 0$

و منه حسب السؤال (2)(ب) $0 \leq e^{\frac{-2}{x}} + \frac{2}{x} - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2$

و منه : $\left(1-\frac{2}{x}\right) \leq e^{\frac{-2}{x}} \leq \left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

نضرب طرفي هذا التأطير في العدد الموجب $(x+2)$ نحصل على :

$$(x+2)\left(1-\frac{2}{x}\right) \leq (x+2)e^{\frac{-2}{x}} \leq (x+2)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $\left(x-\frac{4}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(x-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$

إذن : $(\forall x > 0) \ ; \ \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2}$

■ (I)(2)(د)

لدينا : $(\forall x > 0) \ ; \ \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2}$

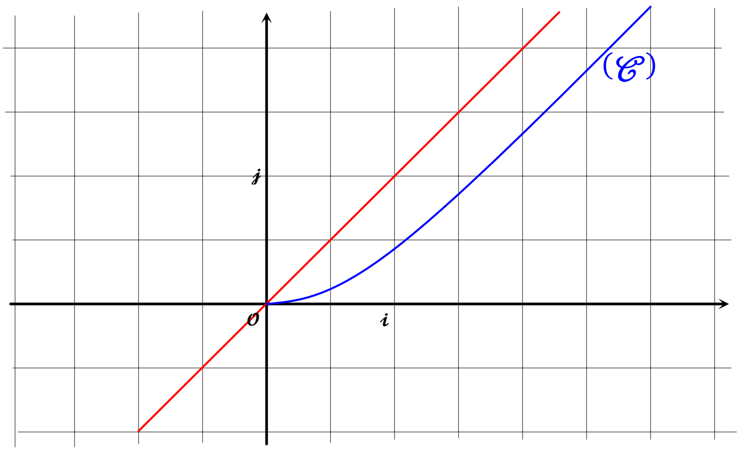
بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}\right) = 0$

فإن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0}$ (1)

و لدينا حسب السؤال (2)(أ) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

■ (I)(3)



■(II)①هـ

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{-2}{x}}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{2}{x}}\right)}$$
$$=0+\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0$$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.و لدينا : $(f_n)'_d(0)=0$

■(II)②

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$.

لدينا : $f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$

و منه : $f_n'(x)=\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\left(\frac{-2}{x}\right)'\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$
$$=\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$
$$=\left(1+\frac{2}{x^2}\left(x+\frac{2}{n}\right)\right)e^{\frac{-2}{x}}>0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

■(II)③أ

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $f_n(]0,+\infty[)$

و لدينا : $f_n(]0;+\infty[)=\left]\lim_{x\to0^+}f_n(x);\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\right[=]0;+\infty[$

نضع : $\varphi_n(x)=f_n(x)-\frac{2}{n}$

لدينا : φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

لأن $\varphi_n'(x)=f_n'(x)>0$

إذن φ_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال

$$\left]\varphi_n(0);\lim_{x\to+\infty}\varphi_n(x)\right[=]0;+\infty[$$

و من هذا التقابل نستنتج وجود عدد وحيد a_n من المجال $]0,+\infty[$

بحيث : $\varphi_n(a_n)=0$

يعني : $f_n(a_n)=\frac{2}{n}$

■(II)③ب

$$\left(f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\right)-\left(f_n(x)-\frac{2}{n}\right)$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}+e^{\frac{-2}{x}}\left(\frac{-2}{n(n+1)}\right)$$
$$=\frac{-2}{n(n+1)}\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)$$

و لدينا $x>0$ إذن $\frac{-2}{x}<0$

و منه : $e^{\frac{-2}{x}}<1$ يعني : $e^{\frac{-2}{x}}-1<0$

و بالتالي : $\frac{-2}{n(n+1)}\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)>0$

و منه :

$$(\forall x>0),(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$$

■(II)③ج

لدينا : $f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\left(f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\right)>\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-\frac{2}{n}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ 0-f_n(a_{n+1})>0-f_n(a_n)$$
$$\Leftrightarrow\ f_n(a_{n+1})<f_n(a_n)$$

و بما أن f دالة تزايدية قطعا فإن : $a_{n+1}<a_n$

و منه المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية . و بما أنها مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة.

■(II)③د

لدينا : $f_n(a_n)=\frac{2}{n}$

يعني : $\left(a_n+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{a_n}}=\frac{2}{n}$

يعني : $\frac{\left(a_n+\frac{2}{n}\right)}{e^{\frac{2}{a_n}}}=\frac{2}{n}$

و منه : $2e^{\frac{2}{a_n}}=n\left(a_n+\frac{2}{n}\right)$

أي : $2e^{\frac{2}{a_n}}=na_n+2$

و منه : $\boxed{2e^{\frac{2}{a_n}}-2=na_n}$

■ (II) ③

نفترض أن : $a \neq 0$

لدينا : $2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 = na_n$

و لدينا : $\lim_{n\infty} na_n = (+\infty) \times a = +\infty$

و $\lim_{n\infty}\left(2e^{\frac{2}{a_n}} - 2\right) = 2e^{\frac{2}{a}} - 2$

إذن : $2e^{\frac{2}{a}} - 2 = +\infty$

و هذا تناقض إذن : $a = 0$

■ (III) ① أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا بحيث : $x < 2x$

و ليكن t عددا حقيقيا بحيث : $x \leq t \leq 2x$

بما أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

فإن : $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$

و بما أن f متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

فإن : $\int_x^{2x} f(x)\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(2x)\,dt$

يعني : $f(x)[t]_x^{2x} \leq F(x) \leq f(2x)[t]_x^{2x}$

أي : $\boxed{xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)}$

■ (III) ① ب

لدينا : $F(x) \geq xf(x)$

و نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

■ (III) ② أ

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$

لدينا f دالة متصلة على $[0,+\infty[$

إذن f تقبل دالة أصلية ψ بحيث : $\psi'(x) = f(x)$

لدينا :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{2x} f(t)\,dt$$

$$= -\psi(x) + \psi(2x)$$

بما أن : $x \to 2x$ و $x \to \psi(x)$ قابلتين للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا كذلك : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$

يعني : $f(x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(2x)$

يعني : $f(x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq f(2x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(2x) = 0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) = 0$

و بالتالي : f قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و $F'_d(0) = 0$

■ (III) ② ب

لدينا حسب السؤال أ

$$F(x) = \psi(2x) - \psi(x)$$

إذن : $F'(x) = 2\psi'(2x) - \psi'(x)$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 2(2x+2)e^{\frac{-1}{x}} - (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left(2(2x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((4x+4)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2+3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}} + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right)$$

و لدينا كذلك حسب السؤال ② أ $F'_d(0) = 0$

■ (III) ③

بما أن : $x > 0$ فإن : $e^{\frac{1}{x}} - 1 > 0$

و $(3x+2) > 0$ و $(x+2) > 0$

و منه : $F'(x) > 0$

و بالتالي : F دالة تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

و لدينا : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xf(2x) = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
F	0 ↗	$+\infty$

التمرين الرابع : (4,5 ن)

■ ① أ

ننطلق من الكتابة : $f(iy) = iy$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{i(iy)-1}{(iy+1)^2} = iy$$

$$\Leftrightarrow \quad iy(iy+1)^2 = -y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad iy(-y^2+2iy+1) = -y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -iy^3 + iy - 2y^2 = -y-1$$

$$\Leftrightarrow \quad i(-y^3+y) + (1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(-y^3+y) = 0 \\ (1-y) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y(1-y)(1+y) = 0 \\ (1-y) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y = 0 \text{ أو } y = 1 \text{ أو } y = -1 \\ y = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = 1}$$

و بالتالي : $\boxed{f(i) = i}$

■ ① ب

ننطلق من الكتابة : $f(z) = z$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{iz-1}{z^2+2z+1} = z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + 2z^2 + z = iz - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 = 0$$

هذه المعادلة تقبل حلا خاصا و هو العدد 1 و ذلك حسب السؤال أ

ننجز القسمة الأقليدية للحدودية $z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1$
على الحدودية $(z-i)$ نحصل على :

$$(z-i)(z^2 + (2+i)z + i) = 0$$

بتعميل ثلاثية الحدود $z^2 + (2-i)z + i$ نحصل على :

لدينا : $\Delta = (2-i)^2 - 4i = 3$

إذن ثلاثية الحدود تقبل جذرين z_1 و z_2 :

$$z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

و بالتالي : المعادلة $f(z) = z$ تقبل ثلاثة حلول و هي : $z_0 = i$ و z_1 و z_2 .

■ ② أ

لدينا : $z_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$= e^{\frac{-i\pi}{6}}$$

و بما أن : $\frac{11\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{6} [2\pi]$

فإن : $\boxed{z_1 + 1 = e^{\frac{-\pi i}{6}} = e^{\frac{11\pi}{6}}}$ (1)

و لدينا كذلك :

$$z_2 + 1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = e^{\frac{-5i\pi}{6}}$$

و بما أن : $\dfrac{7\pi}{6} \equiv \dfrac{-5\pi}{6}[2\pi]$

فإن : $\boxed{z_2 + 1 = e^{\frac{-5i\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{6}}}$ (2)

■ 2 ب

ليكن $z_1 = re^{i\theta}$. لدينا حسب النتيجة (1) : $z_1 + 1 = e^{\frac{11\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 + 1 = e^{\frac{11i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad re^{i\theta} = e^{\frac{11i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (S_1) : \begin{cases} r\cos\theta = \cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) - 1 \\ r\sin\theta = sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) \end{cases}$$

<u>**لنحسب أولا r .**</u>

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \ r^2 = \cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 - 2\,cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ r^2 = 2\left(1 - cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

نحصل على :

$$\Leftrightarrow \ r^2 = 2\left(1 - 2cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \ r^2 = 4\left(1 - cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

ثم نستعين بعد ذلك بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

نحصل على : $r^2 = 4\sin^2\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

و منه : $r = \pm 2\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

إذن : $\boxed{r = 2\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)}$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة (S_1) نحصل على :

$$2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$

نحصل على :

$$\sin\theta = \left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \theta \equiv \frac{17\pi}{12}[2\pi]$$

و بالتالي : $\boxed{z_1 = 2\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)e^{\frac{17i\pi}{12}}}$

ليكن $z_2 = se^{i\varphi}$. لدينا حسب النتيجة (2) : $z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad se^{i\varphi} = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (S_2) : \begin{cases} s\cos\varphi = \cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) - 1 \\ s\sin\varphi = sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

بنفس الطريقة نحسب أولا s .

$$s^2 = 2\left(1 - cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \quad \underset{\text{بنفس الطريقة}}{\Leftrightarrow} \quad s = \pm 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

إذن : $\boxed{s = 2\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)}$

نعوض s بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة (S_2) نحصل على :

$$2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\right) \underset{\text{الطريقة}}{\overset{\text{بنفس}}{=\!=}} \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

و منه : $\Longrightarrow \quad \varphi \equiv \dfrac{13\pi}{12}[2\pi]$

و بالتالي : $\boxed{z_2 = 2\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)e^{\frac{13i\pi}{12}}}$

■ 3 أ

لدينا : $z = e^{i\alpha}$ إذن : $|z| = 1$ و منه : $z\bar{z} = 1$

لدينا :

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{iz-1}{(z+1)^2}\right)} = \frac{-i\bar{z}-1}{(\bar{z}+1)^2} = \frac{\bar{z}i(-1+iz)}{\bar{z}^2(1+z)^2}$$

$$= iz\left(\frac{-1+iz}{(1+z)^2}\right)$$

$$= izf(z)$$

■ 3 ب

ننطلق من الكتابة : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad f(z) + izf(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+iz)f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(1+iz) = 0 \\ f(z) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}1+iz = 0 \\ iz-1 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}z = i \\ z = -i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}e^{i\alpha} = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ e^{i\alpha} = e^{\frac{-i\pi}{2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

بما أن : $0 \leq \alpha \leq \pi$ إذن α تأخذ قيمة وحيدة و هي : $\frac{\pi}{2}$

و بالتالي : $\boxed{\alpha \equiv \frac{\pi}{2}}$

■ 3 ج

لدينا : $z = e^{i\alpha}$

في هذا السؤال يجب استحضار جميع قواعد الحساب المثلثي.

لدينا : $f(z) = f\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{ie^{i\alpha}-1}{(e^{i\alpha}+1)^2}$

و لدينا : $\left(e^{i\alpha}+1\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{i\alpha}+1\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^2$$

$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)^2$$

$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

$$= \left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)^2$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= \boxed{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}}$$

إذن : $f(z) = \frac{ie^{i\alpha}-1}{4\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}} = \left(\frac{1}{2\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)$

سنحاول الآن إيجاد الشكل المثلثي للتعبير : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)$

نضع : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right) = rcos(\varphi) + i\,rsin(\varphi)$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-i\alpha}\left(ie^{i\alpha}-1\right) = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad i - e^{-i\alpha} = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad i - cos(-\alpha) - i\,sin(-\alpha) = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad i - cos(\alpha) + i\,sin(\alpha) = 2r\,cos(\varphi) + 2i\,r\,sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad -cos(\alpha) + i\left(1 + sin(\alpha)\right) = 2rcos(\varphi) + i\left(2rsin(\varphi)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-cos(\alpha) = 2rcos(\varphi) \\ 1 + sin(\alpha) = 2rsin(\varphi)\end{cases}$$

لدينا : $(2r\,cos\varphi)^2 + (2r\,sin\varphi)^2 = 4r^2$

$$\Leftrightarrow \quad (-cos\varphi)^2 + \left(1 + sin(\alpha)\right)^2 = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1 + sin(\alpha)\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1 - cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1-2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(1-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r=\pm sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

بما أن معيار عدد عقدي يكون دائما عدد موجبا

و بما أن : $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}<\pi$

لأن : $0\le\alpha<\pi$

فإن : $\boxed{r=sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ (1)

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظمة نجد :

$$-cos(\alpha)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad cos(\pi-\alpha)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad sin\left(\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad sin\left(2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \; 2sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad cos(\varphi)=\frac{2sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

و لدينا : $sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

و منه : $cos(\varphi)=\frac{\cancel{2sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cancel{2sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$

$$=cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi\equiv\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)[2\pi]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)=sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{f(z)=\underbrace{\left(\frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)}_{\text{المعيار } r}e^{\underbrace{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{العمدة } \varphi}}}$

■ 4

بما أن $|z|=1$ فإن z يكتب على الشكل $e^{i\alpha}$.

لدينا : $\Re e\big(f(z)\big)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \Re e\left(\left(\frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\times\frac{\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{1}=1$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=1$$

$$\frac{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=2$$

$$\Leftrightarrow \; sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; 1-2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; 1=4cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1}{2} \quad \text{أو} \quad cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi] \quad \text{أو} \quad \frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \equiv \frac{4\pi}{3}[\pi] \quad \text{أو} \quad \alpha \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

$x \wedge y$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

$\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

① نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \;:\; (x+1)^2 = 9 + 5y$.

0,50 ن — Ⓐ ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) .

بين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

0,50 ن — Ⓑ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

0,75 ن — ② بين أن : $(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (K - 3) \wedge 8 \;;\; (\forall k \epsilon \mathbb{Z})$.

0,75 ن — ③ حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية :
$$\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر المنحنى $(\mathscr{C}_m)$ الذي معادلته هي :

$$\boxed{\frac{x^2}{(10-m)} + \frac{y^2}{(2-m)} = 1 \quad ; \quad m \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2; 10\}}$$

1,00 ن — (I) ① ناقش حسب قيم m طبيعة المنحنى $(\mathscr{C}_m)$.

1,00 ن — ② إذا كان $(\mathscr{C}_m)$ مخروطيا ، اعط عناصره المميزة (المركز و الرؤوس و البؤرتان و المقاربان إن وجدا)

0,25 ن — ③ أرسم $(\mathscr{C}_1)$.

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) \;:\; z^2 - (6\cos\alpha)z + 1 + 8\cos^2\alpha = 0 \qquad \text{حيث :} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

0,50 ن — ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) ; $(\mathfrak{Im}(z_1) > 0)$ و M_1 و M_2 النقطتان ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي.

0,25 ن — ② Ⓐ تحقق أن : $M_1 \epsilon (\mathscr{C}_1)$.

0,75 ن — Ⓑ بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من $(\mathscr{C}_1)$ حيث يكون فيهما المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_1)$ موازيا للمستقيم (OM_1) .

0,75 ن — Ⓙ تحقق أن : $OM_1{}^2 + OP_1{}^2 = OM_2{}^2 + OP_2{}^2$.

التمرين الثالث : (2,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n-10)$ كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس

نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة .نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \leq k \leq n)$.

0,50 ن | ① أحسب p_k بدلالة n و k .

② نضع : $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث : $k \epsilon \{0,1, \dots, (n-1)\}$.

0,50 ن | ⓐ بين أن : $u_k = \dfrac{(n-k)}{(k+1)} \times \dfrac{10}{(n-10)}$

0,50 ن | ⓑ بين أن : $\boxed{0 \leq k \leq 9 \iff u_k \geq 1}$ و $\boxed{10 \leq k \leq n-1 \iff u_k \leq 1}$

1,00 ن | ⓒ استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0,1, \dots, n\}$.

و بين أن : $M = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f(x) = (1+x)e^{-2x}}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,50 ن | (I) ① ⓐ أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

0,50 ن | ⓑ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن | ② أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

0,50 ن | ③ ⓐ أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن | ⓑ أنشئ $(\mathscr{C})$.

0,50 ن | ④ ⓐ بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$.

0,50 ن | ⓑ حدد الحل العام للمعادلة (E) .

(II) ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$ نرمز بـ A_n لمساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.

1,00 ن ① أحسب A_n بدلالة n .

0,50 ن ② أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $\boxed{u_n = \int_0^n [f(x)]^n\,dx}$

0,75 ن ① باستعمال تقنية تغيير المتغير $(xn = t)$ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$

0,50 ن ② أ) بين أن : $(\forall r\epsilon[1;2])\ ;\ 2-r \leq \frac{1}{r} \leq 1$

0,75 ن ب) استنتج : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\,,(\forall x\epsilon[0;n])\ ;\ x-\frac{x^2}{2n} \leq n\,ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq x$

0,50 ن ③ أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \leq \int_0^n e^{-x}\,dx$

0,75 ن ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x}\,dx \leq u_n$

0,75 ن ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

④ ليكن a عنصرا من المجال $]0,1[$.

0,50 ن أ) بين أن : $\int_a^1 n\,[f(x)]^n dx \leq n(1-a)[f(a)]^n$

0,50 ن ب) استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^1 n\,[f(x)]^n dx = 0$

0,50 ن ج) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n n\,[f(x)]^n dx$

التمرين الأول : (2,5 ن)

■ ① أ

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

هذا يعني أن : $(x+1)^2 = 9+5y$

و منه : $5/(x+1)^2-9$ أي : $5/(x+4)\,(x-2)$

و بما أن 5 عدد أولي :

فإن : $5/(x-2)$ أو $5/(x+4)$

و منه : $5/(x-2)$ أو $5/(x+4)-5$

يعني : $x\equiv 2[5]$ أو $x\equiv 1[5]$

■ ① ب

إذا كان : $x\equiv 1[5]$ فإن : $5/(x-1)$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x-1=5k$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x=5k+1$

و منه حسب المعادلة (E) : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (5k+1+1)^2=9+5y$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ 25k^2+4+20k=9+5y$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=5k^2+4k-1$

إذا كان $x\equiv 2[5]$ فإن $5/(x-2)$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x-2=5k$

أي : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ x=5k+2$

و منه حسب المعادلة (E) : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (5k+3)^2=9+5y$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ 25k^2+9+30k=9+5y$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=5k^2+6k$

و بالتالي : $\mathcal{S}$ مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S}=\{\,(5\mathrm{k}+1\,;5\mathrm{k}^2+4\mathrm{k}-1)\,;(5\mathrm{k}+2\,;5\mathrm{k}^2+6\mathrm{k})\ /\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ ②

أذَكِّرُ في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} c & d \end{array} \quad\Longrightarrow\quad a\wedge b=b\wedge c$$

لدينا :

$$\begin{array}{c|c} 5k^2+4k-1 & 5k+1 \\ \cline{2-2} 3k-1 & k \end{array}$$

إذن :

$$(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(5k+1)\wedge(3k-1) \quad (1)$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{c|c} 5k+1 & 3k-1 \\ \cline{2-2} 2k+2 & 1 \end{array}$$

إذن :

$$(5k+1)\wedge(3k-1)=(3k-1)\wedge(2k+2) \quad (2)$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{c|c} 3k-1 & 2k+2 \\ \cline{2-2} k-3 & 1 \end{array}$$

إذن :

$$(3k-1)\wedge(2k+2)=(2k+2)\wedge(k-3) \quad (3)$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{array}{c|c} 2k+2 & k-3 \\ \cline{2-2} 8 & 2 \end{array}$$

إذن :

$$(2k+2)\wedge(k-3)=(k-3)\wedge 8 \quad (4)$$

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8$$

■ ③

لنحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} \overline{121}^{(x)}=\overline{59}^{(y)} \\ x\wedge y=8 \\ x\equiv 1[5] \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)^2=9+5y \\ x\wedge y=8 \\ x\equiv 1[5] \end{cases}$$

نستنتج من هذه الكتابة الأخيرة أن (x,y) حل للمعادلة (E) و $x\equiv 1[5]$

إذن حسب نتيجة السؤال ب :

$$x=5k+1 \quad \text{و} \quad y=5k^2+4k-1$$

بما أن : $x\wedge y=8$ فإن : $(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=8$

و منه حسب السؤال ② : $(k-3)\wedge 8=8$

إذن : 8 تقسم العدد $(k-3)$.

$$\Longrightarrow\ (\exists n\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ k-3=8n$$

$$\Longrightarrow\ (\exists n\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ k=8n+3$$

و بالتالي :

$$\begin{cases} x=(5k+1)=40n+16 \\ y=5k^2+4k-1=320n^2+272n+56 \end{cases}$$

و بالتالي مجموعة حلول النظمة هي :

$$\mathcal{S}'=\{\,(40n+16\ \ ;\ \ 320n^2+272n+56)\ \ /\ \ n\epsilon\mathbb{Z}\}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

■ (I) ①

إذا كان : $2-m>0$ و $10-m>0$

يعني : $m<2$ و $m<10$

فإن : $(\mathscr{C}_m)\ :\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2-m}\right)^2}=1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ إهليلج.

إذا كان : $2<m<10$

فإن : $10-m>0$ و $m-2>0$

و منه : $(\mathscr{C}_m)\ :\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}=1$

إذن : $(\mathscr{C}_m)$ هذلول.

إذا كان : $m > 10$ فإن : $m-2>0$ و $10-m<0$

و منه : $(\mathscr{C}_m) : -\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{m-10}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}\right)=1$

نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{m-10}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}\right)$ موجبة إذن : $(\mathscr{C}_m)=\emptyset$

■ (I) (2)

في الحالة $m<2$ يعني : $m<10$

لدينا : $(\mathscr{C}_m) : \left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2-m}\right)^2}\right)=1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A\left(\sqrt{10-m},0\right)$ و $B\left(-\sqrt{10-m},0\right)$

و $A'\left(0,\sqrt{2-m}\right)$ و $A\left(0,-\sqrt{2-m}\right)$

نضع : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{2-m}$

لدينا : $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(2-m)-(10-m)}=2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الإهليلج $(\mathscr{C}_m)$ هما : $F\left(2\sqrt{2},0\right)$ و $F'\left(-2\sqrt{2},0\right)$

في الحالة : $2<m<10$

لدينا : $(\mathscr{C}_m) : \left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}\right)=1$

و منه : $(\mathscr{C}_m)$ هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأساه هما : $A\left(\sqrt{10-m},0\right)$ و $A'\left(-\sqrt{10-m},0\right)$

نضع : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{m-2}$

لدينا : $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(m-2)+(10-m)}=2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الهذلول $(\mathscr{C}_m)$ هما : $F\left(\sqrt{8},0\right)$ و $F'\left(-\sqrt{8},0\right)$

و لدينا كذلك : $(\mathscr{C}_m)$ يقبل مقاربين (Δ) و (Δ') معرفين بما يلي :

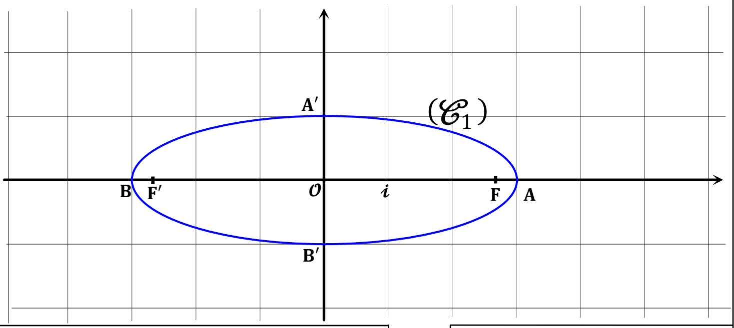
$$\begin{cases}(\Delta) : y=\frac{b}{a}x\\(\Delta') : y=-\frac{b}{a}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\Delta) : y=\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x\\(\Delta') : y=-\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x\end{cases}$$

■ (I) (3)

لدينا حسب ما سبق $(\mathscr{C}_1)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ و $A'(0,1)$ و $B'(0,-1)$

و بؤرتاه هما : $F\left(\sqrt{8},0\right)$ و $F'\left(-\sqrt{8},0\right)$



■ (II) (1)

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E)\ ;\ z^2-(6\cos\alpha)z+\left(1+8\cos^2\alpha\right)=0$$

لدينا : $\Delta=(6\cos\alpha)^2-4\left(1+8\cos^2\alpha\right)=(2i\sin\alpha)^2$

و منه (E) تقبل حلين عقديين مترافقين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$\begin{cases}z_1=\dfrac{6\cos\alpha+2i\sin\alpha}{2}=3\cos\alpha+i\sin\alpha\\[2mm] z_2=\dfrac{6\cos\alpha-2i\sin\alpha}{2}=3\cos\alpha-i\sin\alpha\end{cases}$$

■ (II) (2) أ

نضع : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

نعلم أن : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ و منه : $\frac{9\cos^2\alpha}{9}+\frac{\sin^2\alpha}{1}=1$

أي : $\frac{(3\cos\alpha)^2}{3^2}+\frac{\sin^2\alpha}{1}=1$

إذن الزوج $(3\cos\alpha\ ;\sin\alpha)$ يحقق معادلة الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$

و منه : $M_1\in(\mathscr{C}_1)$

■ (II) (2) ب

لتكن $P(x_0;y_0)$ نقطة من الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$ في P هي :

$$(T)\ :\ \frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{1}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad (T)\ :\ y=\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x+1$$

لدينا : M_1 هي صورة z_1 إذن : $M_1(3\cos\alpha\ ;\sin\alpha)$

و منه المعادلة الديكارتية المختصرة لـ (OM_1) تكتب على شكل :

$$(OM_1)\ :\ y=\left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

ننطلق من الكتابة : $(OM_1)\parallel(T)$

هذا يعني أن لهما نفس الميل أي : $\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)=\left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)$

و منه : $(*)\quad \boxed{x_0=-3y_0\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$

و بما أن : $P(x_0;y_0)\in(\mathscr{C}_1)$.

فإن : $\frac{x_0^2}{3^2}+\frac{y_0^2}{1^2}=1$

نعوض x_0 بقيمته حسب $(*)$ في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9}\left(-3y_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+y_0^2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2=\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0=\pm\cos\alpha$$

إذا كان $y_0=\cos\alpha$ فإن : $x_0=-3y_0\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-3\sin\alpha$

إذا كان $y_0=-\cos\alpha$ فإن : $x_0=-3y_0\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=3\sin\alpha$

و بالتالي : توجد نقطتان $\begin{cases}P_1(3\sin\alpha\ ;\ -\cos\alpha)\\P_2(-3\sin\alpha\ ;\ \cos\alpha)\end{cases}$

من الإهليلج $(\mathscr{C}_1)$: حيث المماس لـ $(\mathscr{C}_1)$ في كل منهما يوازي (OM_1)

■ (II) 2 ج

لدينا : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $P_1(3sin\alpha-icos\alpha)$
و $P_2(-3sin\alpha+icos\alpha)$

و منه : $OM_1^2+OP_1^2=|z_1|^2+|3sin\alpha-icos\alpha|^2$

$$\begin{aligned}&=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=\boxed{10}\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$OM_2^2+OP_2^2=|z_2|^2+|-3sin\alpha+icos\alpha|^2$$

$$\begin{aligned}&=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=\boxed{10}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{OM_1^2+OP_1^2=OM_2^2+OP_2^2}$

التمرين الثالث : (2,5 ن)

■ 1

تذكير : ليكن p احتمال وقوع حدث A في تجربة عشوائية E .

عند إعادة التجربة E n مرة متتالية فإن احتمال الحصول على الحدث A بالضبط k مرة هو : $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

في هذا التمرين : الحدث A هو الحصول على كرة بيضاء.

و لدينا : $p(A)=\frac{10}{n}$

نكرر التجربة n مرة.

إذن احتمال الحصول على الحدث A k مرة هو احتمال الحصول على k كرة بيضاء و يساوي : $p_k=C_n^k\big(p(A)\big)^k\big(1-p(A)\big)^{n-k}$

إذن : $p_k=C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

يمكن ترك هذه النتيجة على ما هي عليه و نكون بذلك قد أجبنا على السؤال باقتصاد تام . و يمكن إضافة بعض المراحل إن كنت من هواة الحساب الحرفي لكي تصل إلى النتيجة التالية :

$$p_k=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

■ 2 أ

نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$

لدينا : $$u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}$$

و لدينا :

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\times\frac{k!\,(n-k)!}{n!}=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)$$

و منه : $u_k=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\times\left(\frac{10}{n-10}\right)$

■ 2 ب

نفترض أن : $u_k\geq 1$

لدينا حسب المعطيات $k\geq 0$

يكفي إذن أن نبرهن على أن : $k\leq 9$

لدينا : $u_k\geq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\times\left(\frac{10}{n-10}\right)\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\geq 1$$

بما أن : $n\geq k$ فإن : $n-k\geq 0$

و منه العددان : $10(n-k)$ و $(n-10)(k+1)$ موجبان.

$$\Leftrightarrow\ 10(n-k)\ \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow\ 10n-10k\ \geq nk+n-10k-10$$

$$\Leftrightarrow\ 10n-n+\ 10 \geq k(n-10+10)$$

$$\Leftrightarrow\ k \leq \frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ k \leq 9+\frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ k \leq 9$$

و بالتالي : $0 \leq k \leq 9$

<u>الشطر الثاني من السؤال :</u>

ننطلق من : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $\boxed{10 \leq 10(n-k) \leq 10(n-10)}\quad (1)$

و لدينا كذلك : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $11(n-10) \leq (n-10)(K+1) \leq 10(n-1)$

و منه : $\boxed{\frac{1}{n(n-10)} \leq \frac{1}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{1}{11(n-10)}}\quad (2)$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)} \leq \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

و منه : $\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10}{11}$

أي : $\boxed{u_k \leq 1}$

■ ② ج

لدينا من أجل : $0 \leq k \leq 9$: $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$

يعني : $p_{k+1} \geq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تزايدية .

و لدينا كذلك : من أجل : $10 \leq k \leq n-1$: $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$

يعني : $p_{k+1} \leq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تناقصية.

نستنتج أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي : p_{10}

إذن : $M = p_{10} = C_n^{10}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n}$

$$\Leftrightarrow\ M = \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10!\,(n-10)! \times (n-10)^n \times n^n}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!}}$$

<u>التمرين الرابع : (10,5 ن)</u>

■ (I) ① أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m\to-\infty\\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m\to+\infty\\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) = \boxed{0}$$

■ (I) ① ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ حسب السؤال أ

إذن : $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل

و لدينا كذلك حسب السؤال أ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x} = 0$

و : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x} = +\infty$

إذن : $(\mathscr{C})$يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب

■ (I) ②

لدينا : $f(x) = (1+x)e^{-2x}$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و منه : $f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^{-2x} > 0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1+2x)$.

لدينا : $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{e}{2}$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{e}{2}$	↘ 0

■ (I)③(أ)

لدينا : $f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$

إذن : $f''(x) = -2e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = 4xe^{-2x}$$

إذا كان : $x = 0$ فإن : $f''(x) = 0$

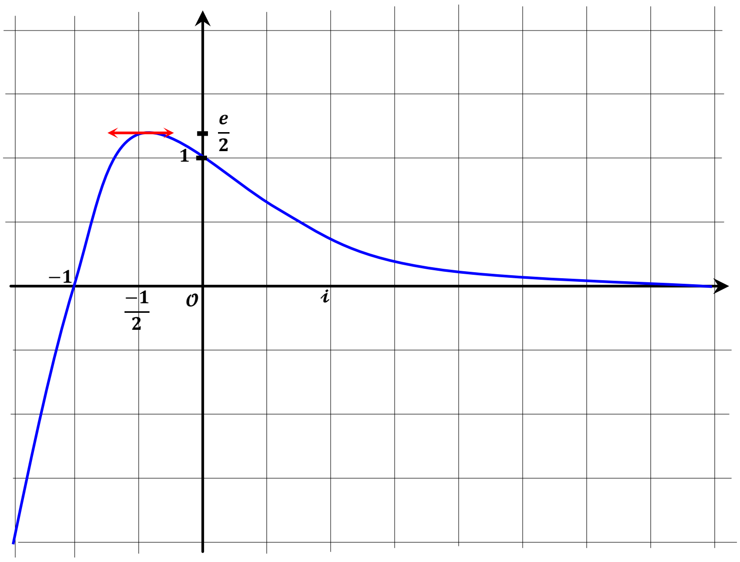
إذا كان : $x > 0$ فإن : $f''(x) > 0$

إذا كان : $x < 0$ فإن : $f''(x) < 0$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$(\mathscr{C})$	$(\mathscr{C})$ مُقَعَّر	$\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف	$(\mathscr{C})$ مُحَدَّب

■ (I)③(ب)



■ (I)④(أ)

لدينا : $\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases}$

إذن : $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)$

$$= 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x}$$
$$= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x}$$
$$= -e^{-2x}$$

إذن f حل خاص للمعادلة التفاضلية : (E)

$$\boxed{(E) : \quad y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}}$$

■ (I)④(ب)

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y = y_H + y_p$

بحيث y_p هو حل خاص للمعادلة (E) (نأخذه يساوي f)

و y_H هو حل المعادلة التفاضلية : $y'' + 3y' + 2y = 0 \;\; ; \;\; (E_H)$

و لحلها نحل أولا معادلتها المميزة : $r^2 + 3r + 2 = 0$

و التي تقبل حلين حقيقيين $r_1 = -1$ و $r_2 = -2$ و ذلك بعد حساب المميز $\Delta = 1$

إذن : $y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} \quad / \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يكتب على الشكل :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x)$$

بحيث : α و β عددين حقيقيين .

■ (II)①

يشير التكامل هندسيا إلى قياس طول أو مساحة أو حجم

إذن : $A_n = \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n (1+x)e^{-2x}\,dx$

نضع $u(x) = 1 + x$ و منه : $u'(x) = 1$

ثم نضع $v'(x) = e^{-2x}$ و منه : $v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

باستعمال مكاملة بالأجزاء نحصل على : $A_n = [uv] - \int u'v$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\int_0^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \left(\frac{-(1+n)e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = e^{-2n}\left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = e^{-2n}\left(\frac{-3-2n}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \frac{-e^{-2n}}{4}(2n+3) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A_n = \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}}$$

■ (II)②

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3)e^{-2n}=\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ m=2n+3}} e^3\times\dfrac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}=0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4}=\dfrac{3}{4}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\dfrac{3}{4}}$

■ (III)①

نضع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n=n\int_0^1[f(x)]^n\,dx$

ثم نضع : $t=nx$ و منه : $dt=ndx$

إذا كان $x=0$ فإن $t=0$

إذا كان $x=1$ فإن $t=n$

و بالتالي : $u_n=n\int_0^n\left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\dfrac{dt}{n}$

$$\Leftrightarrow\quad u_n=\frac{n}{n}\int_0^n\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{\frac{-2t}{n}}\right)^n dt$$

$$\Leftrightarrow\quad u_n=\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$$

■ (III)② أ

ليكن : $u\,\epsilon\,[1,2]$ يعني : $1\le u\le 2$

و منه : $\frac{1}{2}\le\frac{1}{u}\le 1$ إذن : $\boxed{\frac{1}{u}\le 1}$ (1)

و نعلم أن : $(\forall\, u\,\epsilon\,[1,2])\ ;\ (u-1)^2\ge 0$

إذن : $u^2-2u+1\ge 0$

و منه : $u^2+1\ge 2u$

نضرب الطرفين في العدد الموجب الغير المنعدم $\frac{1}{u}$ نحصل على :

$$\frac{u^2+1}{u}\ge 2$$

و منه : $u+\frac{1}{u}\ge 2$ أي : $\boxed{\frac{1}{u}\ge 2-u}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall u\epsilon[1,2])\ ;\ 2-u\le\frac{1}{u}\le 1$

■ (III)② ب

ليكن $x\epsilon[0,n]$ و $n\epsilon\mathbb{N}^*$

يعني : $0\le x\le n$ و منه : $0\le\frac{x}{n}\le 1$

نضع : $t=\frac{x}{n}$ إذن : $0\le t\le 1$

أي : $1\le t+1\le 2$

إذن حسب السؤال ② أ

$$2-(t+1)\le\frac{1}{t+1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-t\le\frac{1}{t+1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\quad \int(1-t)\,dt\le\int\left(\frac{1}{t+1}\right)dt\le\int 1\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad t-\frac{t^2}{2}\le\ln(1+t)\le t$$

نعوض t بالقيمة $\frac{x}{n}$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}\le\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\le\frac{x}{n}$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب الغير المنعدم n نحصل على :

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{x-\frac{x^2}{2n}\le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\le x}$$

■ (III)③ أ

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② ب

$$(\forall x\epsilon[0,n])\ ,(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\le x$$

و منه : $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le x$

و منه : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le e^x$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب e^{-2x} نجد :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\le e^{-x}$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx\le\int_0^n e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{u_n\le\int_0^n e^{-x}\,dx}\quad (*)$$

■ (III)③ ب

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② ب

$$x-\frac{x^2}{2n}\le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x-\frac{x^2}{2n}\le\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)}\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)}e^{-2x} \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \;\le \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \;\le u_n} \quad (1)$$

و لدينا : $1 \le n$ إذن : $1 \le n^2$

و منه : $n \le n^3$ إذن : $n^{\frac{1}{3}} \le n$

يعني أن : $$(2)\quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx \;\le \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx}$$

ليكن : $0 \le x \le n^{\frac{1}{3}}$ إذن : $x^2 \le n^{\frac{2}{3}}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \le \frac{2n}{2n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^{\frac{1}{3}} \le \frac{2n}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}} \le \frac{-x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \; -x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \le -x-\frac{x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \le e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}dx} \quad (3)$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}dx \le \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)} \le u_n$$

إذن : $$\boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le u_n} \quad (**)$$

■(III)3ج

من (*) و (**) و نستنتج أن :

$$(***)\quad \boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx \le u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx}$$

و لدينا : $\int_0^n e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^n = -e^{-n}+1$

و $$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx = e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}[-e^{-x}]_0^{n^{\frac{1}{3}}}$$

$$= e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}\left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}}+1\right)$$

و بالتالي : $$\boxed{\left(1-e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \le u_n \le (1-e^{-n})}$$

نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\underbrace{\left(1-e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}}_{\xrightarrow[n\infty]{}\boxed{1}} \le u_n \le \underbrace{(1-e^{-n})}_{\xrightarrow[n\infty]{}\boxed{1}}$$

و بالتالي : $(u_n)_n$ متتالية متقاربة و تؤول إلى 1 .

■(III)4أ

ليكن : $0 < a < 1$ و $a \le x \le 1$

لدينا f دالة تناقصية على المجال $[0,+\infty[$.

إذن : $f(1) \le f(x) \le f(a)$

$$\Leftrightarrow \quad 2e^{-2} \le f(x) \le f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < 2e^{-2} \le f(x) \le f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le n(f(x))^n \le n(f(a))^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \le \int_a^1 n(f(a))^n\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 \le \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \le n(1-a)(f(a))^n} \quad (\#)$$

■(III)④ب

لدينا : $0 < a < 1$ إذن : $f(1) < f(a) < f(0)$

أي : $2e^{-2} < f(a) < 1$ و منه : $\ln(f(a)) < \ln 1$

يعني : $\ln(f(a)) < 0$

و لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-a)(f(a))^n = \lim_{n\infty} n(1-a)e^{n\ln(f(a))}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\,ln(f(a))\,e^{n\ln(f(a))}\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right)$$

$$= \lim_{\substack{m\to-\infty \\ m=n\,ln(f(a))}} (me^m)\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right)$$

$$= 0\times\left(\frac{1-a}{ln(f(a))}\right) = \boxed{0}$$

إذن حسب التأطير (#)

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty}\boxed{0}} \leq \int_a^1 n(f(x))^n\,dx \leq \underbrace{n(1-a)(f(a))^n}_{\xrightarrow{n\infty}\boxed{0}}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n dx\right) = 0}$

■(III)④ج

لدينا حسب نتيجة السؤال ③ج $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

يعني : $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 n(f(x))^n dx\right) = 1$

و منه : $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n dx + \int_a^1 n(f(x))^n dx\right) = 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال ④ب $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n dx\right) = 0$

إذن :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n dx\right) = 1 \quad ; \quad (\forall a\epsilon]0,1[)}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2006

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

(I) لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل :

$$\boxed{M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \quad ; \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*}$$

0,25 ن ① بين أن G جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,75 ن ② بين أن $(G,\times)$ زمرة ، هل هي تبادلية ؟

0,50 ن ③ لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بين أن $\mathcal{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

0,50 ن ④ ليكن A عنصرا من G حيث : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

نضع $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

أحسب A^n بدلالة a و n بحيث : $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(II) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$(a,b) \top (x,y) = (a+bx\,,by) : \forall (x,y);(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

ليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \;:\; \varphi\left(M_{(a,b)}\right) = (a,b)}$

0,75 ن ① بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\top)$.

0,25 ن ② استنتج بنية المجموعة : $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\top)$.

0,50 ن ③ حدد مماثل : $\underbrace{(a,1) \top (a,1) \top \cdots \top (a,1)}_{n \text{ مرة}}$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\top)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة : $\boxed{(E) : \; x^2(x+y) = y^2(x-y)^2}$.

① ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

نضع $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

0,25 ن (أ) تحقق أن $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

0,75 ن (ب) استنتج أن $b = 1$.

0,50 ن (ج) بين أن $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$.

0,50 ن (د) استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$.

0,50 ن ② حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (5,0 ن)

نضع $(\forall z\in\mathbb{C}) : P(z) = z^2 - (2+6i)z$.

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، نعتبر $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M ذات اللحق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

0,50 ن ① بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

1,00 ن ② بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتي مقاربيه في $(\mathcal{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$.

0,50 ن ③ تحقق أن النقطة $\mathcal{O}$ ، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة $(\mathcal{H})$ ثم أكتب في المعلم $(\mathcal{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathcal{H})$ في $\mathcal{O}$.

0,75 ن ④ أنشىء $(\mathcal{H})$ في المعلم $(\mathcal{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$.

0,50 ن (II)① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.

② نضع $u = 1+5i$ و $v = 1+i$ و $\omega = 239 - i$ و $\alpha = Arctan(\frac{1}{5})$ و $\beta = Arctan(\frac{1}{239})$.

0,50 ن أ تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$.

0,75 ن ب حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω .

0,50 ن ج استنتج أن : $4Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

الجزء الأول في هذا الجزء : $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$.

نعتبر g_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g_n(x) = nx + 2\ln x$

0,50 ن ① ضع جدول تغيرات الدالة g_n .

0,50 ن ② بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*) , \sqrt{x} > \ln x$.

0,75 ن ③ أ بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$. و أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

0,25 ن ب استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

الجزء الثاني

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مع $(\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 3cm)$.

0,50 ن ① أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $\mathcal{O}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

0,50 ن ② أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

0,25 ن ③ أ بين أن : $(*) \; : \; (\forall x\in]0,+\infty[) \; ; \; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$

0,25 ن ب ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن ④ أنشىء $(\mathscr{C})$ نأخذ : $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$

(II) نضع : $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$.

0,50 ن | ① أ) بين أن : $f(I) = I$.

0,50 ن | ب) باستعمال العلاقة $(*)$ ، بين أن : $(\forall x \epsilon I) , |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

0,50 ن | ج) بين أن : $\left[\left(f(x) = x \text{ و } x > 0\right) \Leftrightarrow x = \alpha_3\right]$

حيث α_3 هو حل المعادلة : $g_3(x) = 0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول.

② لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{3}}$

0,25 ن | أ) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; u_n \epsilon I$

0,25 ن | ب) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

0,25 ن | ج) استنتج أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

0,50 ن | د) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة محددا نهايتها .

(III) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{F(x) = \int_x^{8x} f(t)dt}$

0,25 ن | ① أ) بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$.

0,75 ن | ب) أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F .

0,50 ن | ② أ) بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*) , 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

0,25 ن | ب) استنتج : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

0,25 ن | ج) ضع جدول تغيرات الدالة F .

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I) ①

في البداية نلاحظ أن : $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من G

إذن $b \neq 0$ و $d \neq 0$

و منه : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix}$

بما أن $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإن $bd \neq 0$

و منه : $(a+bc\,;bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

يعني : $M_{(a+bc\,,bd)} \in G$

و بالتالي G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (I) ②

لدينا $\times$ تجميعي في $(G,\times)$

لأن جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و لدينا كذلك $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن $I \in G$ فإن I هو نفسه العنصر المحايد لـ $\times$ في G ($I = M_{(0,1)}$)

ليكن $M_{(a,b)}$ عنصرا من G .

$M_{(a,b)}$ تقبل مماثلا (أو مقلوبا) في G بالنسبة لـ $\times$

إذا وفقط إذا كان : $det(M_{(a,b)}) \neq 0$

لدينا : $det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 0 = b$

و بما أن : $M_{(a,b)} \in G$ فإن : $b \neq 0$

و منه : $det(M_{(a,b)}) \neq 0$

إذن : $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و نُذَكِّرُ بالعلاقة المهمة التالية :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

إذن : $M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detM_{(a,b)}}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$$

و بما أن : $b \neq 0$ فإن : $\frac{1}{b} \neq 0$

ومنه : $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)} \in G$ أي : $M_{(a,b)}^{-1} \in G$

إذن : كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلا $M_{\left(\frac{-a}{b};\frac{1}{b}\right)}$ في G بالنسبة لـ $\times$

نختار المصفوفتين $M_{(1,1)}$ و $M_{(2,2)}$ من G لكي نبين أن $\times$ ليس تبادليا في G

لدينا : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

و $M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

نلاحظ أن : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$

إذن $\times$ ليس تبادليا في G .

خلاصة : $(G,\times)$ زمرة غير تبادلية.

■ (I) ③

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $\mathcal{H} = \{M_{(a,b)} \in G \quad / \quad b > 0\}$

لدينا حسب ما سبق $I = M_{(0,1)} \in G$

و بما أن $1 > 0$ فإن $M_{(0,1)} \in \mathcal{H}$

و منه : $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من G

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من $\mathcal{H}$

لدينا حسب ما سبق :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-c}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(a - \frac{bc}{d}\right) & \frac{b}{d} \end{pmatrix}$$

بما أن $d > 0$ و $b > 0$ فإن : $\frac{b}{d} > 0$

و منه :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(a - \frac{bc}{d}\right) & \frac{b}{d} \end{pmatrix} = M_{\left(\left(a - \frac{bc}{d}\right);\frac{b}{d}\right)} \in \mathcal{H}$$

و بالتالي نستنتج أن $(\mathcal{H},\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

■ (I) ④

ليكن a و b عددين حقيقيين.

لدينا : $\boxed{M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b\,;1)}}$ $(*)$

إذن باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$M_{(a_1,1)} \times M_{(a_2,1)} \times \cdots \times M_{(a_n,1)} = M_{((\sum_1^n a_i),1)}$$

و منه : $M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)} = M_{(na,1)}$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \left(M_{(a,1)}\right)^n = M_{(na,1)}$

يعني : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

و إن لم تكن هذه الطريقة مقنعة بما فيه الكفاية فعليك بالترجع :

■ (II) ①

لتكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

لدينا : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc\ ,bd)}$

و منه : $\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a+bc,bd)}\right) = (a+bc\ ,bd)$

و لدينا كذلك :

$$\varphi\left(M_{(a,b)}\right) \top \varphi\left(M_{(c,d)}\right) = (a,b) \top (c,d) = (a+bc\,;bd)$$

و بالتالي :

$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a,b)}\right) \top \varphi\left(M_{(c,d)}\right)$$

و منه φ تشاكل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

ليكن (c,d) عنصرا من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

لنحل المعادلة : $\varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$

التي تُكافئ : $(x,y) = (c,d)$

و منه : $x = c$ و $y = d$

إذن المعادلة : $\varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$ تقبل حلا وحيدا في G و هو المصفوفة $M_{(c,d)}$.

و منه : G تقابل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$

خلاصة : تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

■ (II) ②

رأينا أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$

و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

إذن نستنتج بنية $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ انطلاقا من بنية $(G,\times)$ عن طريق التطبيق φ

بما أن $(G,\times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو المصفوفة $M_{(0,1)}$ و أن كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلة $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$ في G بالقانون $\times$.

فإن : $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\top$ هو $\varphi\left(M_{(0,1)}\right)$ و أن كل زوج (c,d) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$ في G بالقانون $\top$.

إذن : $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد $(0,1)$ و كل عنصر (c,d) يقبل مماثلا و هو $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$.

■ (II) ③

باستعمال الأدوات التالية :
- φ تشاكل .
- تعريف التطبيق φ
- $\left(M_{(a,1)}\right)^n = M_{(na,1)}$
- $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$ هو مماثل (c,d) بالنسبة لـ $\top$

نبرهن بكل بساطة على أن : $(a,1) \top \cdots \top (a,1) = (-na,1)$

لدينا : $[(a,1) \top (a,1) \top \cdots \top (a,1)]'$

$$= \left[\varphi\left(M_{(a,1)}\right) \top \varphi\left(M_{(a,1)}\right) \top \cdots \top \varphi\left(M_{(a,1)}\right)\right]'$$

$$= \left[\varphi\left(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)}\right)\right]'$$

$$= \left[\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)^n\right)\right]'$$

$$= \left[\varphi\left(M_{(na,1)}\right)\right]'$$

$$= \left(\frac{-na}{1};\frac{1}{1}\right)$$

$$= (-na;1)$$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1 أ

لدينا : (x,y) حل للمعادلة (E)

يعني : $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$

يعني : $(ad)^2(ad+bd) = (bd)^2(ad-bd)^2$

يعني : $a^2d^3(a+b) = b^2d^3(a-b)^2d$

نختزل بالعدد d^3 لأن $d^3 \neq 0$

نحصل على : $a^2(a+b) = db^2(a-b)^2$

■ 1 ب

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات :

الأداة الأولى : $\boxed{a \wedge b = 1 \implies a^m \wedge b^n = 1 \;;\; \forall (m,n) \epsilon \mathbb{N}^2}$

الأداة الثانية : $(Gauss)$ $\boxed{\begin{cases} a/bc \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \implies a / b}$

الأداة الثالثة : $(Bezout)$

$$\boxed{a \wedge b = d \iff \exists (m,n) \epsilon \mathbb{Z}^2 \;;\; ma + nb = d}$$

الأداة الرابعة : $\boxed{\begin{cases} a / b \\ a / c \end{cases} \implies \forall (m,n) \epsilon \mathbb{Z} \;;\; a/(mb+nc)}$

ننطلق من كون (x,y) حل للمعادلة (E)

لدينا : $d = x \wedge y$

إذن حسب $(Bezout)$ المباشرة : $\exists (u,v) \epsilon \mathbb{Z}^2 \;;\; xu + yv = d$

و منه : $adu + bdv = d$

نختزل بالعدد الغير المنعدم d نحصل على : $au + bv = 1$

و منه حسب $(Bezout)$ العكسية : $a \wedge b = 1$

إذن حسب الأداة الأولى : $\boxed{a^2 \wedge b = 1}$ $(\star)$

بما أن الزوج (x,y) حل للمعادلة (E) فإنه حسب السؤال أ

$$db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$$

نضع : $k = bd(a-b)^2$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $(a+b)a^2 = kb$ و منه : $b / (a+b)a^2$

و بما أن : $a^2 \wedge b = 1$ حسب النتيجة $(\star)$ فإنه حسب $(Gauss)$: $b / (a+b)$

و نعلم أن $b / (-b)$ إذن حسب الأداة الرابعة :

يعني $b / (a+b-b)$: $\boxed{b / a}$ (1)

و نعلم حسب ما سبق أن : $\boxed{a \wedge b = 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\boxed{b = 1}$

■ 1 ج

نفترض أن : $a = 1$

لدينا : $b = 1$ إذن : $x = d$ و $y = d$.

بما أن (x,y) حل للمعادلة (E) فإن : $d^2(d+d) = d^2(d-d)^2$

يعني : $d = 0$ و هذا تناقض لأن $d = x \wedge y \neq 0$

و بالتالي : $\boxed{a \neq 1}$.

لدينا : $a - (a-1) = 1$

إذن : $(\exists\, u, v \,\epsilon \mathbb{Z}) \;;\; au + (a-1)v = 1$

و في هذه الحالة لدينا : $u = 1$ و $v = -1$

و منه حسب $(Bezout)$: $a \wedge (a-1) = 1$

إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن : $\boxed{a^2 \wedge (a-1) = 1}$ $(\star\star)$

لدينا من جهة أخرى $b = 1$ إذن حسب السؤال أ

$$(a+1)a^2 = d(a-1)^2$$

نضع : $k = d(a-1)$ بحيث : $k \epsilon \mathbb{Z}$

إذن : $(a+1)a^2 = k(a-1)$ و منه : $(a-1) / (a+1)a^2$

من العلاقة $(\star\star)$ نستنتج حسب $(Gauss)$: $(a-1) / (a+1)$

■ 1 د

لدينا : $(a-1) / (a+1)$ يعني : $\boxed{a \equiv -1[a-1]}$

و نعلم أن : $\boxed{a \equiv 1[a-1]}$ (لأن $(a-1) / (a-1)$)

إذن : $1 \equiv -1[a-1]$ يعني : $2 \equiv 0[a-1]$

و منه : $(a-1) / 2$

القواسم الصحيحة الطبيعية لـ 2 هي : 1 و 2

إذن : $a - 1 = 1$ أو $a - 1 = 2$

يعني : $a = 2$ أو $a = 3$

و نبرهن بكل بساطة على أنه :

إذا كان : $a = 2$ فإن : (x,y) يحقق المعادلة (E) .

و إذا كان : $a = 3$ فإن : (x,y) يحقق كذلك المعادلة (E) .

■ ②

لنحل المعادلة (E)

الحالة الأولى : إذا كان : $(a,b)=(2,1)$

إذن : $(x,y)=(2d,d)$

و منه : $(E)\ :\ (2d)^2(2d+d)=d^2d^2$

يعني : $(4d^2)(3d)=d^4$ أي : $\boxed{d=12}$

و بالتالي : $(x,y)=(24,12)$

الحالة الثانية : إذا كان : $(a,b)=(3,1)$

إذن : $(x,y)=(3d,d)$

و منه : $(E)\ :\ (3d)^2(3d+d)=d^2(2d)^2$

يعني : $36d^3=4d^4$ أي : $\boxed{d=9}$

و بالتالي : $(x,y)=(27,9)$

خلاصة : الزوجان $(24,12)$ و $(27,9)$ هما حلا المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (5,0 ن)

■ (I) ①

نضع : $z=x+iy$ و M هي صورة العدد العقدي z

بحيث : x و y عددين حقيقيين.

لدينا : $P(z)=z^2-(2+6i)z$

$$\Leftrightarrow\quad P(z)=(x+iy)^2-(2+6i)(x+iy)$$

$$\Leftrightarrow\quad P(z)=x^2-y^2+2ixy-(2x+2iy+6ix-6y)$$

$$\Leftrightarrow\quad P(z)=x^2-y^2+2ixy-2x-2iy-6ix+6y$$

$$\Leftrightarrow\quad P(z)=(x^2-y^2-2x+6y)+i(2xy-2y-6x)$$

و لدينا $P(z)$ عدد تخيلي صرف.

إذن : $\boxed{\Re e(P(z))=0}$

يعني : $x^2-y^2-2x+6y=0$

و منه : $x^2-y^2-2x+6y=0$ هي معادلة ديكارتية مميزة للنقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا.

■ (I) ②

في المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ المجموعة $(\mathcal{H})$ تتميز بالمعادلة :

$$(x^2-y^2-2x+6y)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x^2-2x)-(y^2-6y)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x^2-2x+1)-(y^2-6y+9)=-8$$

$$\Leftrightarrow\quad (x-1)^2-(y-3)^2=-8$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}-\frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2}=-1$$

إذن : $(\mathcal{H})$ هذلول مركزه النقطة $C(1,0)$ و رأساه هما $B(1\,;3+2\sqrt{2})$ و $\bar{B}(1\,;3-2\sqrt{2})$ و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي :

$(\Delta):y-3=x-1$ و $(\Delta'):y-3=1-x$

يعني : $(\Delta):y=x+2$ و $(\Delta'):y=4-x$

■ (I) ③

الزوج $(0,0)$ يحقق معادلة المجموعة $(\mathcal{H})$.

لأن : $0^2-0^2-2\times0+6\times0=0$ إذن : $O\epsilon(\mathcal{H})$

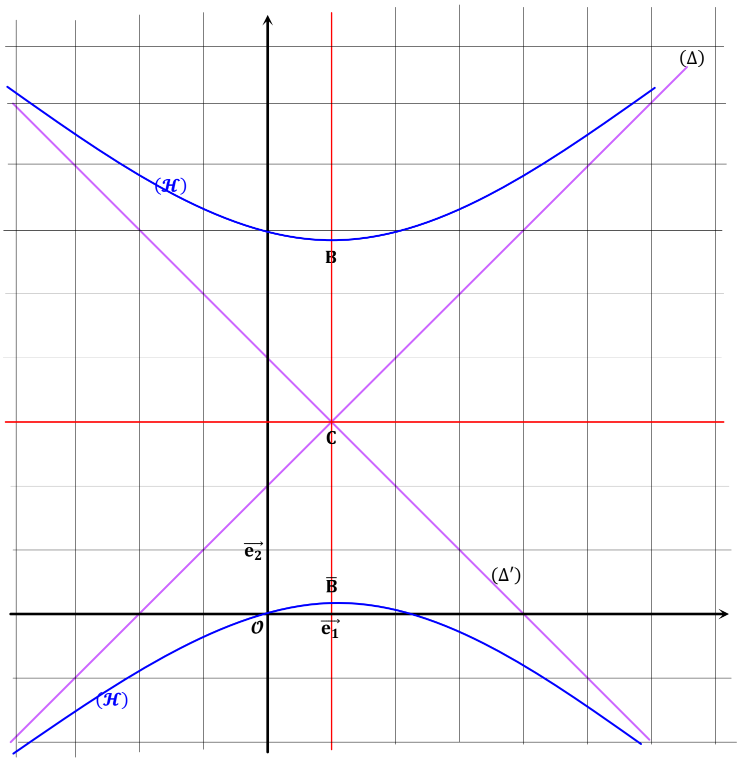
نعلم أن معادلة المماس (T_O) للهذلول $(\mathcal{H})$ في النقطة O تكتب على الشكل :

$$(T_O):\quad xx_0-yy_0=(x+x_0)-3(y+y_0)$$

حيث : $x_0=0$ و $y_0=0$

و منه : $\boxed{(T_O)\ :\ x-3y=0}$

■ (I) ④



■ (II) ①

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4-6i$

$$\Leftrightarrow \quad z^2-(2+6i)z+(6i-4)=0$$

لدينا : $\Delta = (2+6i)^2-4(6i-4)$

$$= (4i)^2$$

إذن : $z_1 = \dfrac{(2+6i)+4i}{2} = 1+5i$

و $z_2 = \dfrac{(2+6i)-4i}{2} = 1+i$

■ (II) ② أ

لدينا $u=1+5$ و $v=1+i$ و $\omega = 239-i$:

لدينا حسب مثلث $(Pascal)$:

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \end{matrix}$$

معاملات الحدودية : $(a+b)^4$

إذن :

$$u^4 = (1+5i)^4 = 1^4+4(5i)+6(5i)^2+4(5i)^3+(5i)^4$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 = 1+20i-150-500i+625$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4 = 476-480i$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4\times v = (476-480i)(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4\times v = 476+476i-480i+480$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4\times v = 956-4i$$

$$\Leftrightarrow \quad u^4\times v = 4(239-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{u^4\times v = 4\omega}$$

■ (II) ② ب

لدينا : $\alpha = Arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad tan(\alpha) = \frac{1}{5} \qquad \Leftrightarrow \quad 5 = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5i = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}i \qquad \Leftrightarrow \quad \boxed{1+5i = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}i+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \frac{sin(\alpha)+icos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \left(\frac{1}{sin(\alpha)}\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \left(\frac{1}{sin(\alpha)}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

لدينا : $sin(\alpha) \approx 0{,}19 \neq 0$

إذن : $arg(u) \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)[2\pi]$

بنفس الطريقة لدينا : $\beta = Arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad 239 = \frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 239-i = \frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}-i$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{cos(\beta)-isin(\beta)}{sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \left(\frac{1}{sin(\beta)}\right)\left(cos(-\beta)+isin(-\beta)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \left(\frac{1}{sin(\beta)}\right)e^{-\beta i}$$

$$\Leftrightarrow \quad arg(\omega) = -\beta[2\pi]$$

■ (II) ② ج

أشير في البداية إلى أن $(1+i) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \quad arg(v) = arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

و لدينا حسب السؤال أ $u^4\times v = \omega$

$$\Rightarrow \quad arg(u^4\times v) \equiv arg(\omega)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad 4arg(u)+arg(v) \equiv arg(\omega)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{\pi}{4} \equiv -\beta[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha-\beta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists k\epsilon\mathbb{Z}) \ ; \quad 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان .

لدينا : $\alpha \approx 0{,}2\, rad$ و $\beta \approx 0{,}004\, rad$

و نلاحظ أن : $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$

و من هذين التأطيرين نحصل على : $-1 < 4\alpha - \beta < 4$

أي : $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$

و منه : $-0{,}3 < k < 0{,}5$

إذن : $k = 0$

و بالتالي : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

أي : $\boxed{4Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}}$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ ①

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*) \ ; \ g_n(x) = nx + 2lnx$

g_n دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و هما $x \to nx$ و $x \to 2lnx$.

و لدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx+2}{x} > 0$

إذن g_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = -\infty$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$+$
g_n	$-\infty \nearrow +\infty$

■ ②

نضع : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*) \ ; \ h(x) = \sqrt{x} - lnx$

$$h'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - lnx\right)'$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad h'(x) = \frac{x-4}{2x\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

و لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^* \ ) \ ; \ \frac{1}{2x\left(\sqrt{x}+2\right)} > 0$

إذن إشارة $h'(x)$ متعلقة بإشارة $(x-4)$.

و لدينا : $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$

و : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

x	0	4	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty \searrow$	$2 - ln4$	$\nearrow +\infty$

انطلاقا من هذا الجدول نلاحظ أن $(2 - ln4)$ قيمة دنوية للدالة h على $\mathbb{R}_+^*$

يعني أن : $(\forall x > 0) \ ; \ h(x) > 2 - ln4$

لدينا : $2 - ln4 \approx 0{,}6 > 0$

إذن : $\forall x > 0 \ ; \ h(x) > 0$

و منه : $\boxed{\forall x > 0 \ ; \ \sqrt{x} > lnx}$

■ ③ أ

لدينا g_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

إذن g_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $g_n(]0,+\infty[)$

و لدينا : $g_n(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} g_n(x) ; \lim_{x\to+\infty} g_n(x)\right[$

$=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

من جهة أخرى لدينا : $\left]\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n}}\right[\subset \mathbb{R}_+^*$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$

و لدينا كذلك : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2ln(n)$

علما أن $n \geq 3$ نستنتج أن : $1 - 2ln(n) \leq 1 - 2ln3$

لدينا $1 - 2ln3 \approx -1{,}2$ إذن : $1 - 2ln(n) < 0$

و منه : $\boxed{g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0}$ (1)

و لدينا كذلك :

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 2ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + ln\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \sqrt{n} - ln(n)$$

بما أن $n > 0$ فإنه حسب السؤال 2 $\sqrt{n} > ln(n)$

يعني $\sqrt{n} - ln(n) > 0$ و منه : $\boxed{g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة لتطبيق مبرهنة القيم الوسيطية.

إذن : $\exists!\, \alpha_n \epsilon \left]\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n}}\right[\quad / \quad g_n(\alpha_n) = 0$

و منه : المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

■ 3 ب

لدينا : $\begin{cases} \dfrac{1}{n} < \alpha_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases}$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = 0}$

الجزء الثاني

■ (I) 1

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}e^{-x}}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}e^x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا رأسي موجها نحو الأعلى في الصفر.

■ (I) 2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}\right)\times\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

إذن :$(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل.

■ (I) 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}e^{-x} - e^{-x}x^{\frac{1}{3}}$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{3}x^{-1} - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{3x} - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)\left(\frac{1-3x}{3x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$$

■ (I) 3 ب

لدينا : $f'(x) = \left(\dfrac{1-3x}{3x}\right)f(x)$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $e^{-x} > 0$

و $3x > 0$ و $x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}lnx} > 0$; $(\forall x > 0)$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة بـ $(1-3x)$

إذا كان $x = \frac{1}{3}$ فإن : $f'(x) = 0$

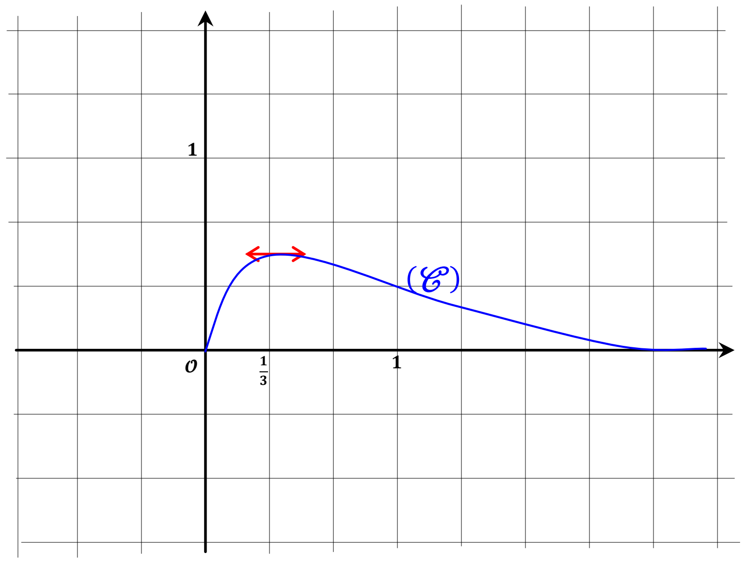
إذا كان $x > \frac{1}{3}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان $x < \frac{1}{3}$ فإن : $f'(x) > 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$0 \nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow 0$

■ (I) ④



■ (II) ① أ

لدينا : $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$

ليكن : $y \,\epsilon\, f(I)$

هذا يعني أن : $(\exists x \epsilon I)\ ;\ f(x) = y$

لدينا : $\frac{1}{3} \le x \le 1$ و f دالة تناقصية على I

إذن : $f\left(\frac{1}{3}\right) \ge f(x) \ge f(1)$

أي : $0,5 \ge y \ge 0,36$

و منه : $1 > 0,5 \ge y > 0,36 \ge \frac{1}{3}$

إذن : $1 \ge y \ge \frac{1}{3}$

و منه : $\boxed{y \,\epsilon\, I}$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي : $\boxed{y \,\epsilon\, f(I) \implies y \,\epsilon\, I}$

و بالتالي : $f(I) \subset I$

■ (II) ① ب

لدينا : $(\forall x > 0)\ :\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

ليكن x عنصرا من $I = \left[\frac{1}{3};1\right]$ إذن : $x \ge \frac{1}{3}$

و منه : $f(x) \le f\left(\frac{1}{3}\right)$ لأن f تناقصية على المجال $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

يعني : $f(x) \le 0,5 < 1$

و منه : $f(x) < 1$

إذن : $\boxed{|f(x)| < 1}\ (1)$

لدينا : $x \,\epsilon \left[\frac{1}{3};1\right]$ أي : $x \ge \frac{1}{3}$

و منه : $x > \frac{1}{5}$ يعني : $5x > 1$

يعني : $3x + 2x > 1$

يعني : $2x > 1 - 3x$

يعني : $\boxed{2 > \frac{1-3x}{x}}\ (*)$

و لدينا : $x \,\epsilon \left[\frac{1}{3};1\right]$ أي : $x \le 1$

و منه : $1 - x \ge 0$ يعني : $1 - 3x + 2x \ge 0$

يعني : $1 - 3x \ge -2x$

يعني : $\boxed{\frac{1-3x}{x} \ge -2}\ (**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $-2 \le \frac{1-3x}{x} < 2$

أي : $\boxed{\left|\frac{1-3x}{x}\right| \le 2}\ (2)$

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

$$\iff f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-3x}{x}\right) f(x)$$

$$\implies |f'(x)| = \frac{1}{3}\left|\frac{1-3x}{x}\right| |f(x)|$$

من (1) و (2) نجد : $|f(x)| < 1$ و $\left|\frac{1-3x}{x}\right| \le 2$

و منه : $\boxed{|f'(x)| \le \frac{2}{3}}$

■ (II) ① ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا

لدينا : $f(x) = x$ يعني : $\sqrt[3]{x}e^{-x} = x$

إذن : $xe^{-3x} = x^3$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على : $e^{-3x} = x^2$

ندخل الدالة ln على هاتين الكميتين الموجبتين نحصل على : $-3x = 2lnx$

يعني : $3x + 2lnx = 0$ و منه : $g_3(x) = 0$

و نعلم حسب السؤال 3 أ من الجزء الأول أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

إذن : $x = \alpha_3$ بحيث : $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$

■ (II) 2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نبرهن بالترجع على أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; u_n \; \epsilon \; I$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{3} \; \epsilon \; \left[\frac{1}{3}; 1\right] = I$

إذن : $u_0 \; \epsilon \; I$

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; u_n \; \epsilon \; I$

بما أن f متصلة على المجال I .

فإن : $u_n \; \epsilon \; I \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \; \epsilon \; f(I)$

و نعلم أن : $f(I) \subset I$ و ذلك حسب السؤال 1 أ

إذن : $f(u_n) \; \epsilon \; f(I) \subset I$

و منه : $u_{n+1} \; \epsilon \; I$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; u_n \; \epsilon \; I}$

■ (II) 2 ب

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; \overset{(1)}{\boxed{u_n \; \epsilon \; I}}$

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال ج : $\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$

إذن : $\boxed{\alpha_3 \; \epsilon \; I} \; (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $[u_n; \alpha_3] \subset I$

و بما أن f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

فإن f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على : $[u_n; \alpha_3]$ كذلك

و منه : حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists \; c \; \epsilon \;]u_n, \alpha_3[\; ; \; \frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(c)$$

و منه : $|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq |f'(c)| \times |u_n - \alpha_3|$

و بما أن : $(\forall \; x \; \epsilon \; I) \; ; \; |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ حسب السؤال ب

فإن : $\forall \epsilon n \mathbb{N} \; ; \; |f'(c)||u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

يعني : : $|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

■ (II) 2 ج

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا حسب السؤال ب

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha_3| &\leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)|u_{n-2} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)|u_{n-3} - \alpha_3| \\ &\quad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_{n-n} - \alpha_3| \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|} \; (*)$

لدينا : $\alpha_3 \; \epsilon \; I$ يعني : $\frac{1}{3} \leq \alpha_3 \leq 1$

و منه : $\frac{-2}{3} \leq \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3}$ أي : $\left|\frac{1}{3} - \alpha_3\right| \leq \frac{2}{3}$

يعني : $|u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

و نعلم أن $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|$
و ذلك حسب : $(*)$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

■(II)②د

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$; $-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$

بما أن : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1 فإن :

$$\lim_{n\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

و منه : $\lim_{n\infty} \left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و $\lim_{n\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات : $\boxed{\lim_{n\infty} u_n = \alpha_3}$

■(III)①أ

لدينا f دالة متصلة على $[0, +\infty[$

إذن : f متصلة على المجال $[0, x]$ كيفما كان x من $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : f تقبل دالة أصلية h على المجال $[0, x]$.

يعني : h قابلة للإشتقاق على $[0, x]$ بحيث : $h'(x) = f(x)$

و لدينا : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)\, dt$

$$= \int_x^{0} f(t)\, dt + \int_0^{8x} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{8x} f(t)\, dt - \int_0^{x} f(t)\, dt$$

$$= h(8x) - h(0) - h(x) + h(0)$$

$$= h(8x) - h(x))$$

لدينا : $x > 0$ يعني : $8x > 0$

و منه : $x \to h(8x)$ قابلة للإشتقاق على : $]0, +\infty[$

لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على : $]0, +\infty[$

و بالتالي : F قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

■(III)①ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا : $F(x) = h(8x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 8h'(8x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 8\sqrt[3]{8x}\; e^{-8x} - \sqrt[3]{x}\; e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = (16e^{-7x} - 1)f(x)$$

و بما أن $\forall\, x \,\epsilon\, [0, +\infty[\; ;\; f(x) \geq 0$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(16e^{-7x} - 1)$

إذا كان : $x = \frac{ln16}{7}$ فإن : $F'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{ln16}{7}$ فإن : $F'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{ln16}{7}$ فإن : $F'(x) > 0$

و بالتالي : F دالة تزايدية على $\left[0, \frac{ln16}{7}\right]$ و تناقصية على $\left[\frac{ln16}{7}, +\infty\right[$

■(III)②أ

ليكن x و t عددين حقيقيين موجبين بحيث : $x \leq t \leq 8x$

بما أن f دالة موجبة على : $[0, +\infty[$

فإن F دالة موجبة كذلك لأنها تكامل لدالة موجبة f .

و منه : $\boxed{F(x) \geq 0}$ (1)

ننطلق من الكتابة $t \leq 8x$ إذن : $t^{\frac{1}{3}} \leq (8x)^{\frac{1}{3}}$

نضرب طرفي المتفاوتة الأخيرة في العدد الموجب و الغير المنعدم e^{-t}

نحصل على : $e^{-t}\, t^{\frac{1}{3}} \leq e^{-t}(8x)^{\frac{1}{3}}$

بإدخال التكامل على طرفي هذه المتفاوتة نحصل على :

$$\boxed{\int_x^{8x} e^{-t} t^{\frac{1}{3}}\, dt \leq \int_x^{8x} e^{-t}(8x)^{\frac{1}{3}}\, dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}} \int_x^{8x} e^{-t}\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} [-e^{-t}]_x^{8x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} (-e^{-8x} + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} e^{-x} (1 - e^{-7x})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})} \ (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 0) \ ; \ 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})}$$

■ (III) 2 ب

ننطلق من التأطير : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 \qquad (Evidente)$

و لدينا حسب جدول تغيرات f $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0$

و بالتالي : $\underbrace{0}_{\substack{+\infty \\ \searrow \\ 0}} \leq \underbrace{F(x)}_{\substack{+\infty \\ \searrow \\ 0}} \leq \underbrace{2f(x)(1 - e^{-7x})}_{\substack{+\infty \\ \searrow \\ 0}}$

أي : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

■ (III) 2 ج

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة F في الجدول التالي :

x	0	$\frac{ln16}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
F	$0 \nearrow$	$F\left(\frac{ln16}{7}\right)$	$\searrow 0$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F ،(كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

0,50 ن ① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,50 ن ② أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

1,00 ن ③ أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$f(z)=\frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z+2\bar{z}\right)$$

0,50 ن **(I)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$.

(II) نضع $z_0=1$ و $z_{n+1}=f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

0,50 ن ① أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0\leq u_{n+1}\leq\frac{2}{3}u_n$

0,50 ن ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

② لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $\mathcal{S}_n=\sum_{k=0}^{n}OM_k=OM_1+\cdots+OM_n$

و لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k .

0,50 ن أ) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \mathcal{S}_n\leq 3$.

0,50 ن ب) بين أن المتتالية $(\mathcal{S}_n)_{n\geq0}$ متقاربة (حساب نهاية $(\mathcal{S}_n)_{n\geq0}$ غير مطلوب)

(III) نضع $z=re^{i\theta}$ حيث $\theta]-\pi,\pi]$ و $r\epsilon\mathbb{R}_+^*$.

1,00 ن ① بين أن : $f(z)=\frac{2}{3}r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{i\pi}{6}}$

0,50 ن ② بين أن النقط M_1 و M_2 و ..... و M_n مستقيمية $(n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2-4y-7x=0$.

0,75 ن — (I) ① بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه.

0,25 ن — ② أنشيء المنحنى (Γ) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ :\ 2(y-1)^2=7x+2$.

1,00 ن — ① أ) بين أن : $y\equiv 0[7]$ أو $y\equiv 2[7]$.

0,50 ن — ب) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(14K^2-4k\ ;\ 7k)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}\cup\{(14k^2+4k\ ;\ 7k+2)\ /\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

1,00 ن — ② حدد النقط $M(x,y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2$ و $x\wedge y=9$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

0,25 ن — ① بين أن : $(\forall t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \dfrac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}=\dfrac{t}{(1+t^2)}-\dfrac{t}{(3+t^2)}+\dfrac{1}{(3+t^2)}$

0,50 ن — ② بين أن : $(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \displaystyle\int_0^\alpha\frac{1}{(3+t^2)}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$

③ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي : $\boxed{F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du}$

0,50 ن — أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0,\pi]$.

0,50 ن — ب) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=\tan\left(\frac{u}{2}\right)$ بين أن :

$$(\forall x\epsilon[0,\pi[)\ ;\ F(x)=2\int_0^{\tan\frac{\pi}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

نذكر أن : $\cos u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u=\dfrac{2t}{1+t^2}$ حيث : $t=\tan\dfrac{u}{2}$ و $u\epsilon[0,\pi[$

0,75 ن — ج) باستعمال السؤالين ① و ② بين أن:

$$(\forall x\epsilon[0,\pi[)\ ;\ F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

0,50 ن — د) باستعمال اتصال الدالة F بين أن : $\displaystyle\int_0^\pi\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du=\ln 3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

في هذا التمرين x يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}}$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن ① (أ) أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

0,75 ن (ب) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$.

0,75 ن ② أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

0,50 ن ③ (أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

0,25 ن (ب) بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

0,75 ن (ج) بين أن $e^x \geq x + 1$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$ ثم استنتج أن $f_n(1) > 0$.

0,50 ن (د) بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

0,50 ن ④ أنشىء المنحنى $(\mathscr{C}_2)$ (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0{,}6$)

0,50 ن ⑤ (أ) بين أن $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$ بحيث $n \geq 2$ لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$

0,50 ن (ب) استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\})$

0,75 ن (ج) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,50 ن ⑥ (أ) باستعمال السؤال ③ بين أن : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^* - \{1\})$

0,50 ن (ب) استنتج أن : $\frac{2\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{\ln n}{n}$; $(\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$

0,25 ن (ج) حدد : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

التمرين الأول : (2,0 ن)

■ ①

توزيع أربع كرات مرقمة على 6 أشخاص يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم نعطي الشخص الثاني الكرات الثلاث المتبقية.

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين.

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين.

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص كرة واحدة .

في الطريقة الأولى لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الأربع .

في الطريقة الثانية لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه كرة واحدة
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيها إياه
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الثلاث المتبقية.

في الطريقة الثالثة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرتين
- و C_4^2 إمكانية لاختيار الكرتين.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الآخر صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثالثة.
- و C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- C_3^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الرابعة.
- و C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

التطبيق العددي :

الطريقة :	ط 1	ط 2	ط 3	ط 4	ط 5
عدد الإمكانيات	6	120	180	1440	8640

و بالتالي : عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$6 + 120 + 180 + 1440 + 8640 = \boxed{10386}$$

■ ②

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ C_4^1 إمكانية.
- أو يحصل على كرتين بـ C_4^2 إمكانية.
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ C_4^3 إمكانية.
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$\boxed{C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15}$$

و منه : احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{10386} \approx 0,0015 \equiv 0,15\%$$

■ ③

إذا حصل الشخص C على كرة واحدة رقمها m و حصل الشخص B على كرة واحدة رقمها n فإن الشخص A سيحصل على $(m+n)$ كرة و لدينا :

$$m + n + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad m + n = 2$$

نعلم أن $m \neq n$ إذن هذه المعادلة لا تقبل حلولا في المجموعة $\{1\ ,2\ ,3\ ,4\} \times \{1\ ,2\ ,3\ ,4\}$

و بالتالي نحن بصدد حدث مستحيل و احتمال وقوعه 0

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■(I)

نضع : $z = x + iy$ ثم ننطلق من الكتابة : $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x(1 + i\sqrt{3})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ في $\mathbb{C}$ تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{ \ x(1 + i\sqrt{3}) \ / \ x \epsilon \mathbb{R} \}$$

■(II)①أ

لدينا : $f(z) = \dfrac{1}{6}\Big((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}\Big)$

$$\Leftrightarrow \quad f(z_n) = \frac{1}{6}\Big((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| = \left|\frac{1}{6}\Big((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n}\Big)\right|$$

نعلم أن : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ و $|z| = |\bar{z}|$.

إذن : $\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \dfrac{1}{6}\left|(1 + i\sqrt{3})z_n\right| + \dfrac{1}{6}|2\overline{z_n}|$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \left(\frac{1}{6}\right)2|z_n| + \left(\frac{2}{6}\right)|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad |f(z_n)| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$

و نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما موجبا.

إذن : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}u_n}$

■(II)①ب

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}u_n$

من أجل $(n-1)$ نحصل على : $0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{3}u_{n-1}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-2}$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}$$

و بالتالي : $\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n u_0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1

و بالتالي : $(u_n)_n$ متقاربة و تؤول إلى الصفر

يعني : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(u_n) = 0}$

■(II)②أ

لدينا : $\mathcal{S}_n = \mathcal{O}M_0 + \mathcal{O}M_1 + \cdots + \mathcal{O}M_n$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

و نعلم أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{3}u_{n-1}$

إذن : $\begin{cases} u_0 \leq 1 \\ u_1 \leq \left(\dfrac{2}{3}\right) \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

و منه : $$u_0+u_1+\cdots+u_n \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n \le \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S_n \le 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}$$

و لدينا : $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \ge 0$ إذن : $-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \le 0$

و منه : $$\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \le 1$$

يعني : $$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \le 3$$

و بالتالي : $$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \ : \ S_n \le 3}$$

■ (II) ② ب

لدينا : $$S_n = OM_0+OM_1+\cdots+OM_n$$

نلاحظ أن :

$$(OM_0+\cdots+OM_n)+OM_{n+1} > (OM_0+\cdots+OM_n)$$

إذن : $$S_{n+1} > S_n$$

إذن $(S_n)_n$ متتالية تزايدية

و بما أنها مكبورة بالعدد 3 (يعني : $S_n \le 3$) فإنها متقاربة.

■ (III) ①

لدينا : $$f(z)=\frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z+2\bar{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{1}{6}\left(r(1+i\sqrt{3})e^{i\theta}+2re^{-i\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{i\theta}+\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\frac{\cos\theta}{4}+i\frac{\sin\theta}{4}+i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}+\frac{\cos\theta}{2}-i\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{2r}{3}\left(\frac{3\cos\theta}{4}+i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}-i\frac{\sin\theta}{4}\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\left(\frac{3\cos\theta}{4}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}\right)+\left(i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4}-i\frac{\sin\theta}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{i}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad f(z)=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}$$

■ (III) ②

لدينا : $f(z_{k-1})$ هو لحق النقطة M_k بحيث : $k\epsilon\{1,\dots,n\}$

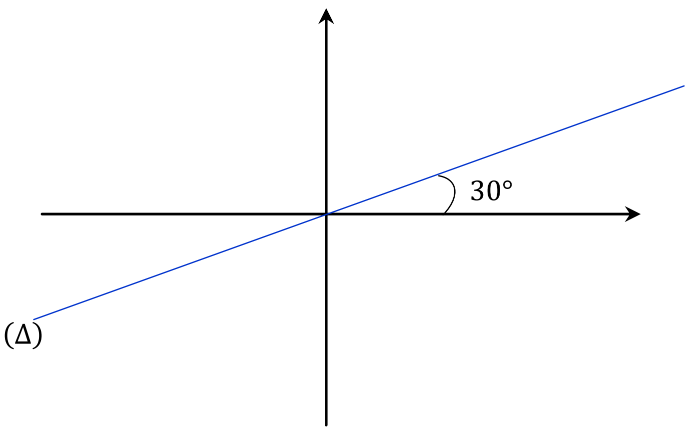
و لدينا : $$f(z)=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad f(z_{k-1})=\frac{2r}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad arg(f(z_{k-1})) \equiv arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

و بالتالي النقط M_1 و M_2 و $\cdots$ و M_n تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ) المبين في الشكل التالي :



التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ (I) ①

$$2y^2-4y-7x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y^2-2y)=7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y-1)^2=7x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2=\frac{7}{2}x+1$$

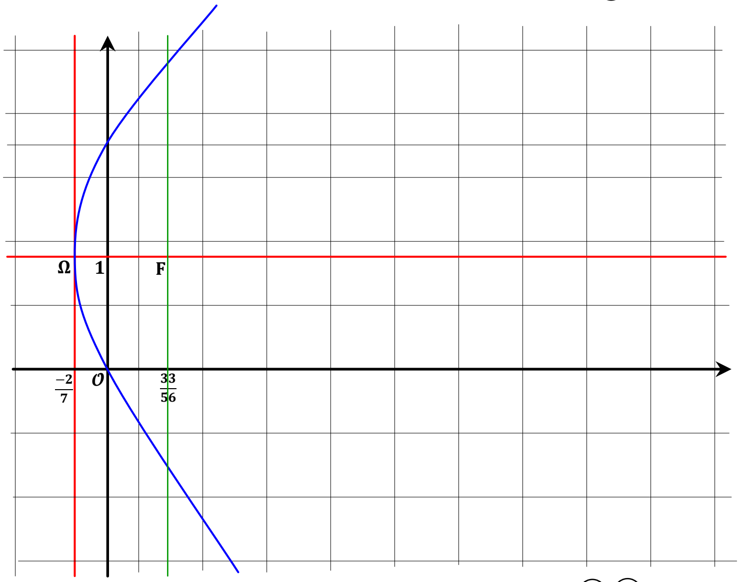
$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2=\frac{7}{2}\left(x+\frac{2}{7}\right)$$

إذن (Γ) شلجم رأسه : $\Omega\left(\frac{-2}{7};1\right)$

و بؤرته : $F\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{7};0+1\right)$

يعني : $F\left(\frac{33}{56};1\right)$

■ (I) ②



■(II) ① (أ)

لدينا : $2(y-1)^2=7x+2$

$$\Leftrightarrow \quad 2(y^2-2y+1)=7x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y(y-2)=7x$$

$$\Leftrightarrow \quad 7\ /\ 2y(y-2)$$

و بما أن العدد 7 أولي فإن :

$\Leftrightarrow \quad 7/2$ أو $7/y$ أو $7\ /\ (y-2)$

$\Leftrightarrow \quad y\equiv 0[7]$ أو $y\equiv 2[7]$

■ (II) ① (ب)

في حالة : $y\equiv 0[7]$.

لدينا : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=7k$

و لدينا : $2y(y-2)=7x$

يعني : $2(7k)(7k-2)=7x$

إذن : $x=14k^2-4k$

و في حالة : $y\equiv 2[7]$.

لدينا : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=7k+2$

و لدينا : $2y(y-2)=7x$

يعني : $2(7k+2)(7k)=7x$

إذن : $x=14k^2+4k$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\mathcal{S}=\{(14k^2-4k\ ;\ 7k),(14k^2+4k\ ;\ 7k+2)\quad/\quad k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ (II) ②

لدينا : $x\wedge y=9$

<u>في حالة : $x=14k^2-4k$ و $y=7k$</u>

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$14k^2-4k$	$7k$
$-4k$	$2k$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$\boxed{(14k^2-4k)\ \wedge\ (7k)=(7k)\ \wedge\ (-4k)\ =\ k}$$

<u>لأن : $7\wedge(-4)=1$</u>

و منه : $x\wedge y=k=9$

و منه نحصل على النقطة : $M_1(1098\,;63)$.

في حالة : $x = 14k^2 + 4k$ و $y = 7k + 2$

لدينا : $14k^2 + 4k = 2k(7k+2)$

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن :

$$(14k^2 + 4k) \wedge (7k+2) = (7k+2)$$

و منه : $x \wedge y = 7k + 2 = 9$

يعني : $k = 1$

و منه نحصل على النقطة : $M_2(18\,;9)$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ ①

لدينا :
$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2}$$
$$= \frac{t(3+t^2) + (1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$= \frac{t^2+2t+1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$
$$= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

ملاحظة : المسار العكسي لهذه المتساوية ستتم دراسته بتفاصيله في السنة الأولى من الأقسام التحضيرية أو الأسدس الثاني من الجامعة أو السنة الأولى من (BTS) . و هذه العملية تسمى :

< la décomposition d'une fraction rationnel en éléments simples >

مثال : $\boxed{\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}}$

■ ②

لدينا :
$$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}}\right)dt$$

نضع : $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ إذن : $dt = \sqrt{3}du$

و منه :
$$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+u^2}\right)dt$$
$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{\sqrt{3}}{3}[Arctan\, u]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)}$$

■ ③ أ

لدينا : $u \to \frac{1+\sin u}{2+\cos u}$

دالة متصلة على المجال $[0,\pi[$ لأنها خارج معرَّف لدالتين متصلتين على $[0,\pi[$ بحيث : $2 + \cos u \neq 0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية F على المجال $[0,\pi[$.

يعني : F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,\pi[$.

و لدينا : $F'(x) = \frac{1+sin\,x}{2+cos\,x}$

■ ③ ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0,\pi[$

لدينا : $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1+sin\,u}{2+cos\,u}\right)du$

نضع : $t = tan\left(\frac{u}{2}\right)$ إذن : $\frac{dt}{du} = \frac{1+t^2}{2}$

و منه :
$$F(x) = \int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\right)\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt$$
$$F(x) = 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$

■ ③ ج

$$F(x) = 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$
$$= 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}\right)dt$$
$$= 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)dt - 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{3+t^2}\right)dt + 2\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{3+t^2}\right)dt$$
$$= [\ln(1+t^2)]_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} - [ln(3+t^2)]_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \ln\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - ln\left(3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \boxed{ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}$$

■ ③ د

لدينا F متصلة على يسار π إذن : $\lim_{x\to\pi^-} F(x) = F(\pi)$

إذن : $(*)$

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-}\left(ln3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right) = \int_0^\pi \left(\frac{1+sin\,u}{2+cos\,u}\right)du}$$

و لدينا :

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-} ln\left(\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}} ln\left(\frac{1+\frac{1}{u}}{1+\frac{3}{u}}\right) = ln1 = 0}$$

و لدينا كذلك:

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan("+\infty") = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

نعوض هاتين النهايتين في المتساوية $(*)$ نحصل على :

$$\boxed{ln3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_0^\pi \left(\frac{1+sin\,u}{2+cos\,u}\right)du}$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

■ ① أ

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right)$$

$$= (-\infty)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{0^-}\right)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

■ ① ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = \frac{1}{n}$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x) - \frac{1}{n}x\right) = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-nx}) = 0$

كما نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

إذن من هذه النتائج نستنتج أن المستقيم $y = \frac{1}{n}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = +\infty$

و نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$

إذن $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل.

■ ②

$$f_n'(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

■ ③ أ

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n .

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

بما أن : $0\epsilon\mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α_n من $\mathbb{R}$ بالتقابل f_n .

و بالتالي : $(\exists!\,\alpha_n\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

■ 3 ب

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}\right)$$

بما أن : $n \geq 2$ فإن : $n^2 \geq 4$.

أي : $n^2 \geq 4 > e$ و منه : $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$

يعني : $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0}$

■ 3 ج

نضع : $\varphi(x) = e^x - x - 1$ إذن : $\varphi'(x) = e^x - 1$

و منه : نستنتج جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

بما أن φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية حسب الجدول هي 0

فإنه : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \varphi(x) \geq 0$

يعني : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x \geq x + 1}$

و من هذه المتفاوتة نستنتج : : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ e^n \geq n + 1$

و منه : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ e^n \geq n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{n} - e^{-n} > 0} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

■ 3 د

لدينا f_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي متصلة على $\left[\frac{1}{n}\ ;1\right]$ بحيث : $n \geq 2$.

و لدينا : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ و $f_n(1) > 0$

إذن : $f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

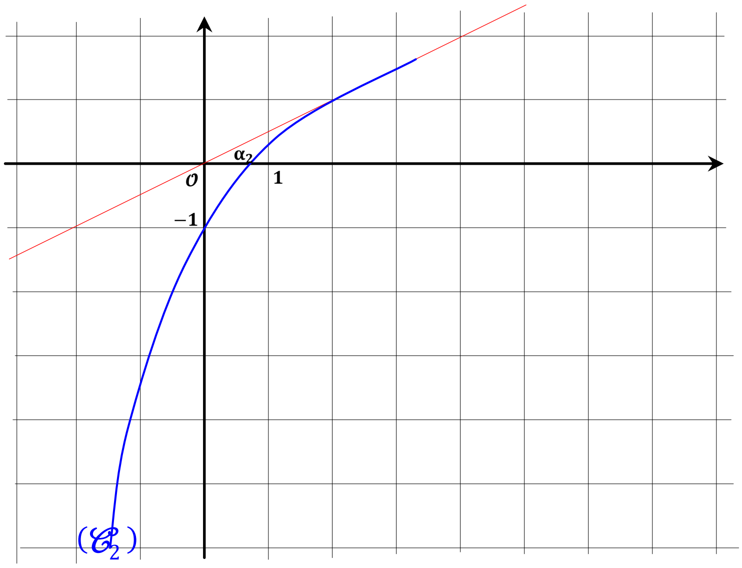
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية :

$$\exists\, c \in \left]\frac{1}{n}\,, 1\right[\ ;\ f_n(c) = 0$$

و بما أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا و هو α_n .

فإن $\alpha_n = c$ و منه : $\boxed{\frac{1}{n} < \alpha_n < 1}$

■ 4



■ 5 أ

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n - ne^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(\frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$ إذن : $e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n}) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n \cdot \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = e^{\alpha_n}$$

و بالتالي : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n}\right)}$

■ 5 ب

لدينا حسب السؤال : 3 ج $\boxed{e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1}$ (#)

و لدينا حسب السؤال : 3 د $\alpha_n > \dfrac{1}{n}$

إذن : $\boxed{\alpha_n + 1 > \dfrac{1}{n} + 1}$ (##)

من (#) و (##) نستنتج أن : $e^{\alpha_n} \geq \dfrac{1}{n} + 1$

يعني : $e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1 \geq 0$

و بالتالي : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0}$

لأن الكمية $\dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$ موجبة دائما .

■ 5 ج

لدينا : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0}$ $(\star)$

لأن f_{n+1} حل للمعادلة : $f_{n+1}(x) = 0$.

و لدينا : $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0}$ $(\star\star)$

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نستنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

فإن : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

و بالتالي : $\boxed{(\alpha_n)_n \text{ تناقصية .}}$ (1)

و لدينا : $\dfrac{1}{n} > 0$ و $\dfrac{1}{n} < \alpha_n$

إذن : $\alpha_n > 0$

يعني : $\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ مصغورة بالعدد } 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.
و سوف نحدد نهايتها فيما بعد.

■ 6 أ

ليكن $n \geq 2$.

لدينا : $f_n(\alpha_n) = 0$ إذن : $\boxed{e^{-n\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n}{n}}$

و نعلم أن : $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$ إذن : $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\alpha_n}{n} < \dfrac{1}{n}$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \dfrac{1}{n}}$

■ 6 ب

لدينا : $\dfrac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \dfrac{1}{n}$

إذن : $\ln\left(\dfrac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$

لأن الدالة ln تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_*^+$.

و منه : $-2\ln(n) < -n\alpha_n < -\ln(n)$

إذن : $\ln(n) < n\alpha_n < 2\ln(n)$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \dfrac{2\ln(n)}{n}}$

■ 6 ج

من التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه نستنتج أن :

$\boxed{\lim_{n\infty}(\alpha_n) = 0}$

لأن : $\lim_{n\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = \lim_{n\infty}\left(\dfrac{2\ln n}{n}\right) = 0$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

مادة الرياضيات **مسلك العلوم الرياضية أ و ب** **المعامل 10** **مدة الإنجاز : أربع ساعات**	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات	**الإمتحان الوطني الموحد** **لنيل شهادة البكالوريا** **الدورة العادية 2007**

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

0,25 ن ① (أ) تحقق أن لكل زوج (a,b) من $\mathbb{E}^2$: $a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

0,25 ن (ب) استنتج ان $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

0,50 ن ② بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

(II) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها : $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $a\epsilon E$; $\mathrm{M}(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

0,50 ن ① (أ) نضع : $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2=-2A$ و أن : $M(a)=1+\frac{a}{\sqrt{2}}A$.

0,50 ن (ب) بين أن F جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

② نعتبر التطبيق :
$$\begin{array}{rl}\varphi:(\mathrm{E},\perp)&\longrightarrow(\mathrm{F},\times)\\ a&\longrightarrow\varphi(a)=\mathrm{M}(a)\end{array}$$

0,50 ن (أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن (ب) استنتج بنية $(F,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

0,25 ن (I) ① (أ) تحقق أن العدد العقدي $u=a+i$ حل للمعادلة $(E):\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$.

0,25 ن (ب) حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) .

② نفترض أن $|a|=1$.

0,25 ن (أ) بين أن : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$

0,25 ن (ب) تحقق أن : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

0,50 ن (ج) استنتج أن : $arg(u)=\frac{1}{2}arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

0,50 ن ③ بين أن $|u|+|v|\geq 2$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :

$$|u|+|v|=m$$

0,50 ن ① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم O .

② نضع : $a=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

0,25 ن ⓐ بين أن : $x^2+\left(1-\dfrac{4}{m^2}\right)y^2=\dfrac{m^2}{4}-1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) .

0,25 ن ⓑ أنشىء الإهليلج (E_4) .

0,50 ن ③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رَأْسَيْ الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث : (3,0 ن) نعتبر المعادلة : $(E)\ :195x-232y=1$.

0,50 ن ① ⓐ حدد $132\wedge 195$.

0,50 ن ⓑ بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\mathcal{S}=\{(163+232k\,;137+195k)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$

0,25 ن ⓒ أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\le d\le 232$ و $195d\equiv 1[232]$.

0,25 ن ② بين أن العدد 233 عدد أولي.

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $a^{232}\equiv 1[233]$: $\forall a\epsilon A\setminus\{0\}$.

0,50 ن ⓐ بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن : $a=b$.

0,50 ن ⓑ ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a)=b$. حدد a بدلالة b .

0,50 ن ⓒ استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع : (10,5 ن) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

0,50 ن (I) ① بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\ge 0$.

0,25 ن ② بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x)=0$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x+1} & ;\ \forall x\neq 0\\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن ① أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$

0,25 ن ② بين أن الدالة f متصلة في 0.

0,50 ن ③ ⓐ أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن ⓑ إستنتج تغيرات الدالة f .

④ نعتبر التكامل : $J(x)=\displaystyle\int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي .

0,50 ن ⓐ باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^x-1-x)$.

1,00 ن ⓑ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$

0,50 ن ج بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$

0,75 ن د استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

0,50 ن ⑤ أ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)}(e^x(x-1)+2+x)$

0,50 ن ب أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

0,25 ن ج استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.

0,50 ن د أنشىء $(\mathscr{C})$

(III) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \quad \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,25 ن ① بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

0,50 ن ② أ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

0,50 ن ب بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

0,50 ن ج استنتج أن المتتالية : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

(IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt \ ; \quad \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

0,50 ن ① أ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

0,25 ن ب بين أن الدالة F متصلة في 0.

0,50 ن ج بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.

0,50 ن ② أ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$

0,25 ن ب أدرس تغيرات الدالة F .

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (I) ① أ

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}-\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(b\sqrt{2}-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}-\left(ab\sqrt{2}-a-b+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= a+b-ab\sqrt{2}$$

$$= a\perp b$$

■ (I) ① ب

يكفي أن نبين أن : $\forall(a,b)\epsilon E^2\ ;\ a\perp b\ \epsilon\ E$

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

يعني : $b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

و منه : $b\sqrt{2}-1\neq 0$ و $a\sqrt{2}-1\neq 0$

و منه : $(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)\neq 0$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)\neq 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : $a\perp b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

أي : $a\perp b\ \epsilon\ \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

أي : $a\perp b\ \epsilon\ E$

و بالتالي $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

■ (I) ②

لكي تكون $(E,\perp)$ زمرة تبادلية يكفي أن يكون $\perp$ تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في E وأن يقبل كل عنصر من E مماثلا من E .

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

$$a\perp b = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\perp b = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(b\sqrt{2}-1)(a\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\perp b = b\perp a$$

و منه : $\perp$ تبادلي في E .

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E

يعني : $(\forall x\epsilon E)\ ;\ x\perp e = e\perp x = x$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x\epsilon E)\ ;\ x+e-xe\sqrt{2}=x$$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x\epsilon E)\ ;\ e(1-x\sqrt{2})=0$$

و بما أن : $x\ \epsilon\ E$ فإن : $x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

يعني : $1-x\sqrt{2}$ و بالتالي : $e=0$

و بما أن : $0\ \epsilon\ E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E .

ليكن x عنصرا من E .

و ليكن y مماثل x في E بالنسبة لـ $\perp$

$$x\perp y = y\perp x = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x+y-xy\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y(1-x\sqrt{2})=-x$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{-x}{(1-x\sqrt{2})}=\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)}$$

و للتأكد من أن : $\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

نفترض التساوي إذن : $x\sqrt{2}=x\sqrt{2}-1$

و منه : $-1=0$ وهذا تناقض واضح.

و من تم فإن : $\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)}\ \epsilon\ E$

يعني أن كل عنصر x من E يقبل مماثلا و هو : $\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)}$ من E بالنسبة للقانون $\perp$

خلاصة : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية.

■ (II) ① أ

لدينا : $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

إذن : $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad A^2=-2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-2A$$

و لدينا كذلك :
$$M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-a & a\\ a & -a\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A}$$

■ (II) ① ب

يكفي أن نبين أن :

$$(\forall M(a)\epsilon F),(\forall M(b)\epsilon F)\ ;\ M(a)\times M(b)\ \epsilon\ F$$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية

إذن المجموعة F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ عنصرين من F بحيث : $(a,b)\ \epsilon\ E^2$

لدينا : $M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A-\frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=I+\frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=M(a\perp b)$$

لكي تكون المصفوفة $M(a\perp b)$ عنصرا من F يكفي أن يكون $a\perp b$ عنصرا من E

و بالفعل $a\perp b\ \epsilon\ E$ لأن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و $a\epsilon E$ و $b\epsilon E$.

إذن نحصل على : $M(a)\times M(b)\ \epsilon\ F$

و بالتالي F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (II) ② أ

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$ يكفي أن نتأكد من أن : $\forall\ (a,b)\ \epsilon\ E^2\ ;\ \varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a\perp b)$

و لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا .

ليكن a و b عنصرين من E .

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=M(a)\times M(b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A-\frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=I+\frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=M(a\perp b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a\perp b)$$

لتكن S مصفوفة من F .إذن حسب تعريف المجموعة F :

$$(\exists\ a\ \epsilon\ E)\ ;\ S=M(a)$$

و منه حسب تعريف التطبيق φ : $(\exists\ a\ \epsilon\ E)\ ;\ S=\varphi(a)$

و بالتالي φ تطبيق **شمولي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

ليكن a و b عنصرين من E بحيث : $\varphi(a)=\varphi(b)$

إذن حسب تعريف التطبيق φ : $M(a)=M(b)$

يعني : $\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)=\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

و منه : $\boxed{a=b}$

و بالتالي : φ تطبيق **تبايني** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

خلاصة : φ تشاكل **تقابلي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

■ (II) ② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

و بما أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\perp$ هو 0 و كل عنصر x من E يقبل مماثلا $\left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$

فإن $(F,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$ و كل عنصر y من F يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$

و لدينا : $\varphi(0)=I+\frac{0}{\sqrt{2}}A=I$

$$\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=I+\frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A=I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} & \frac{y}{2y-\sqrt{2}}\\ \frac{y}{2y-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y}\end{pmatrix}=M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$

و للتأكد :

$$M(y)\times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=\left(I+\frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right)$$

$$=\ I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A+\frac{y^2}{\sqrt{2}\left(2y-\sqrt{2}\right)}A^2$$

$$=\ I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}y-1\right)}A-\frac{2y^2}{2\left(\sqrt{2}y-1\right)}A$$

$$=\ I+\left(\frac{2\left(\sqrt{2}y-1\right)y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2\left(\sqrt{2}y-1\right)\sqrt{2}}\right)A$$

$$=\ I+\left(\frac{\cancel{2\sqrt{2}y^2}-\cancel{2y}+\cancel{2y}-\cancel{2\sqrt{2}y^2}}{2\left(\sqrt{2}y-1\right)\sqrt{2}}\right)A$$

$$=\ I+0$$

$$=\ I$$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■(I)①(أ)

يكفي أن نبين أن :

$$(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+i(1+a^2)=0$$

و للوصول إلى ذلك ننشر أو نعمل. نختار تقنية التعميل.

لدينا : $(a+i)^2+i(1+a^2)=(a+i)^2+i(a^2-i^2)$

$$=(a+i)(a+i)+i(a-i)(a+i)$$
$$=(a+i)(a+i)+(ai+1)(a+i)$$
$$=(a+i)(a+i+ai+1)$$
$$=(a+i)(a+1)(i+1)$$

و منه : $(a+i)$ حل للمعادلة (E) .

■(I)①(ب)

تذكير : إذا كان u و v هما حلا المعادلة : $ax^2+bx+c=0$

فإن : $uv=\frac{c}{a}$ و $u+v=\frac{-b}{a}$

لدينا u و v هما حلا المعادلة (E) .

إذن : $u+v=\dfrac{(1+a)(1+i)}{1}$

نعوض u بقيمته نحصل على : $(i+a)+v=(1+a)(1+i)$

و منه : $v=(1+a)(1+i)-(i+a)$

$$\Leftrightarrow\quad v=1+i+a+ai-i-a$$
$$\Leftrightarrow\quad v=1+ai$$

■(I)②(أ)

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي .

لدينا : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)}=\dfrac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}}$

بما أن : $|a|=1$ فإن : $|a|=\sqrt{a\bar{a}}=1$

إذن : $\bar{a}=\dfrac{1}{a}$

و منه : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\dfrac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i}=\dfrac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i}=\dfrac{1-ai}{a-i}$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي i نحصل على :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{1-ai}{a-i}=\frac{a+i}{ai+1}=\frac{u}{v}$$

إذن نستنتج مما سبق أن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\dfrac{u}{v}$

يعني أن العدد $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي.

■(I)②(ب)

لدينا : $u^2=(a+i)^2=a^2+2ai-1$

$$\Leftrightarrow\quad u^2=a\left(a+2i-\frac{1}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2=a(a+2i-\bar{a})$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$$

■(I)②(ج)

بصفة عامة، إذا كان : $z=\Re e(z)+i\Im m(z)$ فإن $z-\bar{z}=2i\Im m(z)$

لدينا حسب السؤال(ب) : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

إذن عمدة الطرف الأيمن يوافق عمدة الطرف الثاني بترديد 2π

إي : $2Arg(u)\equiv Arg\left(a\left((a-\bar{a})+2i\right)\right)[2\pi]$

يعني : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+Arg\left((a-\bar{a})+2i\right)[2\pi]$

لدينا : $a-\bar{a}+2i=2i\Im m(a)+2i=2i(\Im m(a)+1)$

و منه : $Arg(\,a-\bar{a}+2i)\equiv Arg(2i)+Arg(\Im m(a)+1)$

لدينا $2i$ عدد تخيلي صرف. إذن : $Arg(2i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و لدينا كذلك $(\Im m(a)+1)$ عدد حقيقي. إذن : $Arg(\Im m(a)+1)\equiv 0[2\pi]$

و بالتالي : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه : $Arg(u)\equiv\dfrac{1}{2}Arg(a)+\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

■ (II) ①

لتكن H صورة العدد العقدي i

و لتكن $\overline{H}$ صورة العدد العقدي $-i$

و لتكن M صورة العدد العقدي a

لدينا : $|u|+|v|=m$ يعني : $|a+i|+|ai+1|=m$

لنبين أن : $|ai+1|=|a-i|$

لدينا : $ai+1=i(a-i)$

و منه : $|ai+1|=|i(a-i)|$

يعني : $|ai+1|=|i||a-i|$

أي : $|ai+1|=1|a-i|=|a-i|$

إذن : $|a+i|+|a-i|=m$

و منه : $|a-(-i)|+|a-i|=m$

أي : $\overline{H}M+HM=m$

لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\overline{H}H\leq m$

لدينا : $\overline{H}H=|i-(-i)|=|2i|=2$

و لدينا حسب المعطيات : $m\geq 2$ إذن : $m\geq \overline{H}H$

و بالتالي (E_m) إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[\overline{H}H]$ أي النقطة O

■ (II) ② أ

بما أن (E_m) إهليلج.

فإن معادلته الديكارتية تكتب على الشكل : $(E_m)\ :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

لنحدد الآن قيمتي العددين a و b .

لدينا $2b=m$ إذن $b=\frac{m}{2}$

و منه : $b^2=\dfrac{m^2}{4}$

و نعلم كذلك أن : $c=\frac{\overline{H}H}{2}=1$ و $c^2=b^2-a^2$

إذن : $a^2=b^2-c^2$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للإهليلج (E_m) هي :

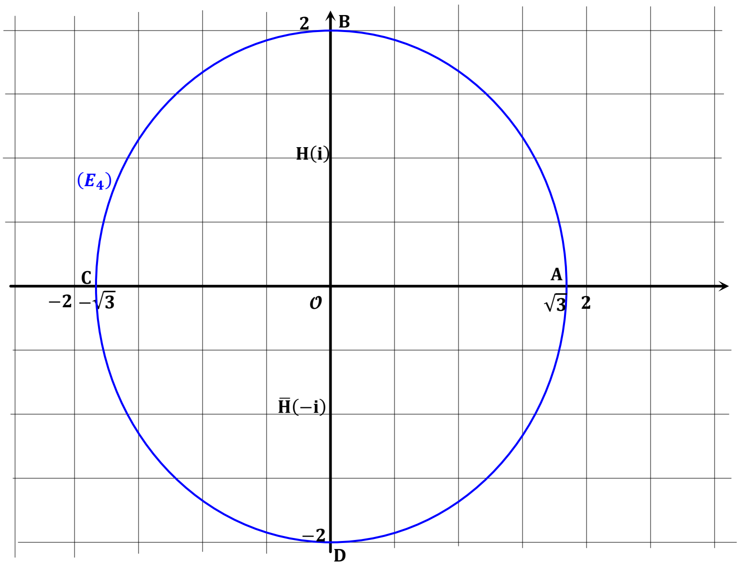
$$(E_m)\ :\ \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)}=1$$

يعني : $$\boxed{(E_m)\ :\ x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}$$

■ (II) ② ب

(E_4) إهليلج يتميز بالعناصر التالية :

- مركزه O
- رؤوسه : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(-\sqrt{3},0)$ و $C(0,2)$ و $D(0,-2)$
- بؤرتاه : $H(0,1)$ و $\overline{H}(0,-1)$.
- تباعده المركزي : $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$



■ (II) ③

في المجموعة $\mathbb{C}$ لدينا : $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$

إذن في المجموعة $\mathbb{R}^2$ لدينا : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$

لنحدد معادلة المستقيم (AB) و التي تكتب في شكلها المختصر كالتالي :

$$\boxed{(AB)\ :\ y=px+q}$$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل.

$$p=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2}{-\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

إذن : $(AB)\ :\ y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}x+q$

و لدينا : $B(0,2)$ نقطة من (AB) .

إذن : $2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\times 0+b$ و منه : $b=2$

و بالتالي : $$\boxed{(AB)\ :\ y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2}$$

لكي يكون (AB) مماسا للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يكفي أن نحدد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في تلك النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB) .

على بركة الله، لدينا حسب السؤال ②(أ) :

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) \; : \; x^2 + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right) y^2 = \left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4} - 1\right)$$

أي : $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) \; : \; x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$

لتحديد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في المعادلة $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحصل على :

$$x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2\right)^2 = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x\right) = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{3}x = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3}x + \frac{27}{28} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (7x)^2 - 2(7x)(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 3\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{3\sqrt{3}}{7}}$$

نعوض x في معادلة (AB) نجد :

$$\boxed{y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{7} + 2 = \frac{8}{7}}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$

تكتب على شكل : $xx_0 + \frac{9}{16}yy_0 = \frac{9}{7}$

بحيث : $x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{7}$ و $y_0 = \frac{8}{7}$

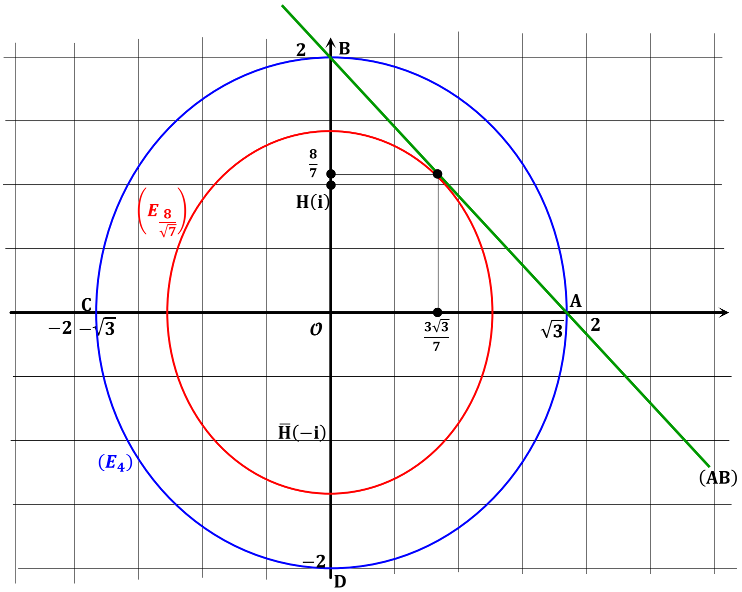
إذن معادلة المماس هي : $\frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{16}y\frac{8}{7} = \frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{14}y = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم (AB) .

و بالتالي (AB) هو المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة : $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$.



التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ①(أ)

نُدِير خوارزمية أقليدس و نوقف محركاتها فور الحصول على باقي منعدم.

المرحلة الأولى :

232	195
	1
37	

37 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الثانية :

195	37
	5
10	

10 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الثالثة :

37	10
	3
7	

7 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الرابعة :

10	7
3	1

3 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الخامسة :

7	3
1	2

1 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة السادسة :

3	1
0	3

0 منعدم إذن **توقف.**

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 232 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي : 1

و بالتالي : $\boxed{195 \wedge 232 = 1}$

■ 1 ب

في البداية يجب علينا أن نبحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص) لـ (E) .

لدينا حسب خوارزمية أقليدس الواردة في السؤال السابق :

المرحلة الأولى : $37 = 232 - 1 \times 195$

المرحلة الثانية : $10 = 195 - 5 \times 37$

المرحلة الثالثة : $7 = 37 - 3 \times 10$

المرحلة الرابعة : $3 = 10 - 1 \times 7$

المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

الطريقة هي كالتالي :

ننطلق من المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

- ثم نعوض 3 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 7 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 10 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 37 بقيمتها ثم نبسط

إلى العمل : لدينا $\boxed{1 = 7 - 2 \times 3}$

نعوض 3 في هذا التعبير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 7 - 2 \times 10}$$

نعوض 7 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 37 - 11 \times 10}$$

نعوض 10 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times 37 - 11 \times 195}$$

نعوض 37 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times \mathbf{232} - 69 \times \mathbf{195}}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج : $(-69, -58)$

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E)

يعني : $195x - 232y = 1$

و لدينا : $195(-69) - 232(-58) = 1$

ننجز عملية الفرق بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

يعني : $\boxed{195(x + 69) = 232(y + 58)}$ $(*)$

إذن : $195 \,/\, 232(y + 58)$

إذن حسب $(Gauss)$: $195 \,/\, (y + 58)$ لأن : $195 \wedge 232 = 1$

و منه : $(\exists k' \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y + 58 = 195k'$

يعني : $\boxed{y = 195k' - 58}$

لإيجاد قيمة x نعوض y في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$195(x + 69) = 232(195k')$$

يعني : $\boxed{x = 232k' - 69}$

بما أن k' عدد نسبي فإن : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ k' = k + 1$

و منه : $x = 232(k + 1) - 69$

أي : $\boxed{x = 232k + 163}$

و لدينا كذلك : $y = 195k' - 58$

أي : $y = 195(k + 1) - 58$

و منه : $\boxed{y = 195k + 137}$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(232k + 163\,;195k + 137)\ \ /\ \ k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ 1 ج

ننطلق من الشرط : $195d \equiv 1[232]$

الذي يعني : $232 \,/\, (195d - 1)$

و منه : $(\exists b \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ 232b = 195d - 1$

أي : $195d - 232b = 1$

و منه : (d, b) حل للمعادلة (E) .

إذن (d, b) عنصر من $(\mathcal{S})$.

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ \begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases}$

لدينا الشرط الآخر $0 \leq d \leq 232$

يعني : $0 \leq 163 + 232k \leq 232$

و منه : $0{,}7 \leq k \leq 0{,}2$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و 0,7 هو 0

إذن : $\boxed{d = 163 + 232 \times 0 = 163}$

■ (2)

يكفي : أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي $\sqrt{233}$ لا تقسم العدد 233 .

و تلك الأعداد الأولية هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

■ (3) (أ)

ليكن a و b عنصرين من $A \setminus \{0\}$ بحيث : $f(a) = f(b)$.

لدينا : $\begin{cases} a^{195} \equiv f(a)[233] \\ b^{195} \equiv f(b)[233] \end{cases}$

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن : $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و منه : $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و لدينا : $195d \equiv 1[232]$ يعني : $195d = 232k + 1$

إذن : $\boxed{a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]}$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة فيرما : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $a^{232k} \equiv 1[233]$ و منه : $\boxed{a^{232k+1} \equiv a[233]}$ (1)

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{b^{232k+1} \equiv b[233]}$ (2)

بما أن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$ فإن : $a \equiv b[233]$

و ذلك باستعمال النتيجتين (1) و (2)

و منه : 233 يقسم $|a - b|$.

لدينا : $a\epsilon A$ و $b\epsilon A$

يعني : $0 < a \leq 232$ و $0 < b \leq 232$

و منه : $|a - b| \leq 232$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a - b|$ إذن : $|a - b| = 0$

و بالتالي : $a = b$

■ (3) (ب)

ليكن a و b عنصرين من A بحيث: $f(a) = b$

لدينا : $a^{195} \equiv f(a)[233]$

و بما أن : $f(a) = b$ فإن : $a^{195} \equiv b[233]$

و منه : $\boxed{a^{195d} \equiv b^d[233]}$ (3)

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة $(Fermat)$: $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $\boxed{a^{-232k} \equiv 1[233]}$ (4)

نضرب المتوافقتين (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$a^{195d-232k} \equiv b^d[233]$

و منه : $a^1 \equiv b^{163}[233]$ لأن $d = 163$ هو العدد الوحيد الذي يحقق الشرطين $195d \equiv 1[232]$ و $d\epsilon A$

و منه : $a \equiv b^{163}[233]$ هو الجواب الأخير.

كما يمكن إظافة ما يلي : $233 \,/\, (a - b^{163})$

يعني : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z}) \;;\; (a - b^{163}) = 233k$

أي : $\boxed{a = b^{163} + 233k \;;\; k\epsilon\mathbb{Z}}$

■ (3) (ج)

نستنتج من نتيجة السؤال (3) (أ):

$\boxed{\text{أن } f \text{ تطبيق تبايني من } A \text{ نحو } A}$

كما نستنتج من نتيجة السؤال (3) (ب) :

$\boxed{\text{أن التطبيق } f \text{ شمولي من } A \text{ نحو } A}$

إذن f تقابل من A نحو A و تقابله العكسي f^{-1} نستنتجه من جواب السؤال (ب):

$$\boxed{\begin{array}{l} f : A \to A \\ \quad a \to f(a) \equiv a^{195}[233] \end{array}}$$

و

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : A \to A \\ \quad b \to f^{-1}(b) \equiv b^{163}[233] \end{array}}$$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

■ (I) 1

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x > 0$

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن القيمة الدنوية للدالة g هي 0

و g دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; g(x) \geq 0$

■ (I) 2

لدينا g دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty, 0]$

إذن : $(\forall x < 0) \; ; \; g(x) > 0$

و لدينا g دالة تزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$

إذن : $(\forall x > 0) \; ; \; g(x) > 0$

و لدينا العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g منعدمة هو 0 . إذن : $\boxed{g(0) = 0}$

■ (II) 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}}\right) = \frac{1}{(+\infty) - 0} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

■ (II) 2

لدينا : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}}\right)$

بما أن : $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}\right) = e^0 = 1$

فإن : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1 = f(0)$

و منه f دالة متصلة في الصفر.

■ (II) 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{-1 - e^x(x - 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

■ (II) 3 ب

لدينا حسب السؤال أ $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$

بما أن $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*) \; ; \; 0 < (e^x - 1)^2$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

لدينا g تنعدم في نقطة واحدة أفصولها 0 و ذلك حسب السؤال (I) 2

إذن $f'(x)$ تنعدم إذا كان $x = 0$

و لدينا كذلك حسب السؤال (I) 1 $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; g(x) \geq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*) \; ; \; f'(x) \leq 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right) = \dfrac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$

و لدينا كذلك حسب السؤال (II) 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

و من هذه الدراسة نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

■(II)④(أ)

لدينا : $J(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt$

نضع : $u(t) = t$ إذن : $u'(t) = 1$

و نضع : $v'(t) = e^{-t}$ إذن : $v(t) = -e^{-t}$

و منه : $J(x) = [uv]_0^x - \int_0^x u'v\,dt$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = [t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t})\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = [-te^{-t}]_0^x + [-e^{-t}]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad J(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{J(x) = e^{-x}(e^x - x - 1)}$$

■(II)④(ب)

ليكن x عددا حقيقيا . نفصل بين ثلاث حالات :

<u>الحالة الأولى</u> : إذا كان x موجب فإن : $|x| = x$

و منه : $|x| + x = 2x$ و $x - |x| = 0$

ليكن $0 \le t \le x$ إذن $e^{-x} \le e^{-t} \le e^0$

و منه : $te^{-x} \le te^{-t} \le t$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_0^x te^{-x}\,dt \le \int_0^x te^{-t}\,dt \le \int_0^x t\,dt$$

يعني : $e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le J(x) \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه : $\frac{x^2}{2}e^{-x} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

<u>الحالة الثانية</u> : إذا كان x سالب فإن : $|x| = -x$

و منه : $|x| + x = 0$ و $x - |x| = 2x$

ليكن $x \le t \le 0$ إذن $e^0 \le e^{-t} \le e^{-x}$

و منه : $te^{-x} \le te^{-t} \le t$ (تغير الترتيب لأن t عدد سالب)

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_x^0 te^{-x}\,dt \le \int_x^0 te^{-t}\,dt \le \int_x^0 t\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 \le -J(x) \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2}{2}e^{-x} \le -J(x) \le \frac{-x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

<u>الحالة الثالثة</u> : إذا كان x منعدم فإن : $J(0) = 0$

و منه : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

لأن : $0 \le 0 \le 0$

<u>خلاصة</u> :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$$

■(II)④(ج)

لدينا حسب السؤال(ب)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و منه حسب السؤال(أ)

$$\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le e^{-x}(e^x - 1 - x) \le \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نفترض أن $x \neq 0$ ثم نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب $\frac{e^x}{x^2}$

علما أن هذا الترتيب سوف لن يتغير نحصل على :

$$\frac{1}{2}e^x e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \le \frac{1}{2}e^x e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط طرف اليمين و طرف اليسار نحصل على :

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \le \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \le \frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}$$

■(II)④(د)

لدينا حسب نتيجة السؤال(ج)

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}} \le \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \le \underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}}}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}}$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right)$$

نحاول إظهار الكمية $\left(\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\right)$ نحصل على :

$$\lim_{x\to 0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)f(x)$$

لدينا حسب السؤال (II) 2 : f متصلة في 0

إذن : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$

و بالتالي نستنتج أن : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\dfrac{-1}{2}\times 1=\boxed{\dfrac{-1}{2}}$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0)=\dfrac{-1}{2}$

■ (II) 5 أ

لدينا : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$

$$\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{-g'(x)(e^x-1)^2+g(x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+(1+(x-1)e^x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+2(e^x-1)e^x+2(x-1)(e^x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)+2e^x+2(x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(-xe^x+x+2+2xe^x-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(xe^x+x+2-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x\left(e^x(x-2)+(x+2)\right)}{(e^x-1)^3}$$

■ (II) 5 ب

نضع : $\varphi(x)=e^x(x-2)+2+x$

لدينا : $\varphi'(x)=(xe^x-2e^x+2+x)'$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=xe^x+e^x-2e^x+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=xe^x-e^x+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=e^x(x-1)+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=g(x)$$

و نعلم حسب السؤال (I) 1 : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x)\geq 0$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \varphi'(x)\geq 0$

أي φ دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $\varphi(0)=0$ و f دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x\geq 0$ فإن : $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$

إذا كان $x\leq 0$ فإن : $\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$

■ (II) 5 ج

لدينا : $f''(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2)+(x+2)\right)$

$$f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\times\frac{\varphi(x)}{(e^x-1)}$$

لدينا : $(e^x-1)^2>0$ و $e^x>0$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة $\varphi(x)$ و (e^x-1)

إذا كان $x>0$ فإن : $\varphi(x)>0$ و $e^x>e^0$

إذن : $\boxed{f''(x)>0}$

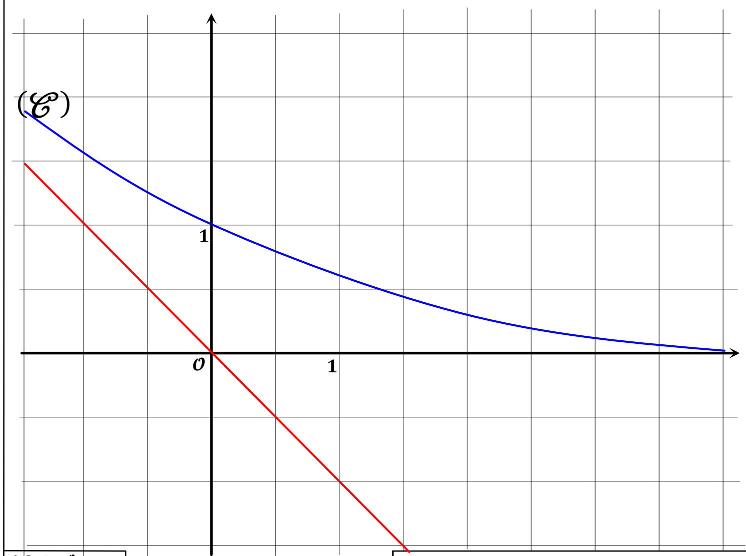
إذا كان $x<0$ فإن $\varphi(x)<0$ و $e^x<e^0$

إذن : $f''(x)>0$

و في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f''(x)>0$

و هذا يعني أن منحنى الدالة f محدب

■ (II) 5 د



■ (III) ①

لنحل المعادلة : $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{e^x - 1} = x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = xe^x - x$$
$$\Leftrightarrow \quad e^x = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x = ln\, 2$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

■ (III) ② أ

يكفي أن نبين أن : $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

لدينا حسب السؤال (II) ⑤ ج $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ f''(x) > 0$

إذن f' دالة تزايدية على $\mathbb{R}^*$

إذا كان $x > 0$ فإن : $f'(x) \geq f'(0)$

يعني : $\boxed{f'(x) \geq \frac{-1}{2}}$ (1)

لدينا من جهة أخرى : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0$

و ذلك لأن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

إذن من الكتابة $f'(x) \leq 0$ نستنتج أن : $f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

و منه : $\boxed{f'(x) \leq \frac{1}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ \frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

■ (III) ② ب

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$. نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n .

إذن يوجد عدد c محصور بين $\ln 2$ و u_n بحيث :

$$\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$$
$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2}\right| = |f'(c)|$$
$$\Longrightarrow \quad |f(u_n) - f(\ln 2)| = |f'(c)||u_n - \ln 2|$$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن : $f'(c) \leq \frac{1}{2}$ و منه : $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$

و بالتالي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|}$$

■ (III) ② ج

لدينا حسب السؤال ب

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$
$$\Leftrightarrow \quad |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \ln 2|$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - \ln 2|$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-3} - \ln 2|$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \ln 2|$$

نستنتج إذن أن :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محصور بين 1 و -1

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} |u_n - \ln 2| = 0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \ln 2$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى $\ln 2$.

■ (IV) ① أ

باستعمال البرهان بفصل الحالات نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : إذا كان</u> $x > 0$.

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$

مع العلم أن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ و ذلك حسب السؤال (II) ③ ب

ليكن : $x \leq t \leq 2x$

يعني : $f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$

و منه : $\dfrac{x}{e^x-1} \geq \dfrac{t}{e^t-1} \geq \dfrac{2x}{e^{2x}-1}$

ندخل التكامل على هذا الترتيب نحصل على :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dt \geq \int_x^{2x}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)dt \geq \int_x^{2x}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)dt$$

و منه : $\boxed{\left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right) \geq F(x) \geq \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right)}$

الحالة الثانية : إذا كان $x<0$.

ليكن : $2x \leq t \leq x$

يعني : $f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$

$$\int_{2x}^{x} f(2x)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(x)\,dt$$

$$-\int_{x}^{2x} f(2x)\,dt \geq -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \geq -\int_{x}^{2x} f(x)\,dt$$

$$-xf(2x) \geq -F(x) \geq -xf(x)$$

$$xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$$

$$\boxed{\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)}$$

خلاصة : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)}$

■(IV)①ب

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

و لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\frac{e^{2x}-e^0}{2x-0}}\right) = \left(\frac{0}{e^0}\right) = 0$

و لدينا كذلك: $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\frac{e^{x}-e^0}{x-0}}\right) = \left(\frac{0}{e^0}\right) = 0$

و بالتالي : $\displaystyle\lim_{x\to0} F(x) = 0 = F(0)$

أي F دالة متصلة في 0

■(IV)①ج

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)}_{\xrightarrow{x\to0}\ 1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}_{\xrightarrow{x\to0}\ 1}$$

و منه : $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = 1 = F'(0)$

■(IV)②أ

لدينا الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[x,2x]$ مع $x\in\mathbb{R}^*$

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث : $F(x)=h(2x)-h(x)$

لدينا $x\to h(x)$ و $x\to 2x$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن $x\to h(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $F(x)=h(2x)-h(x)$

إذن : $F'(x)=2h'(2x)-h'(x)$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x)=2f(2x)-f(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x)=2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)-\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

و بما أنك تلميذ من السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

فإنك تستطيع الوصول إلى النتيجة انطلاقا من التعبير أعلاه.

و منه : $\Leftrightarrow\ \boxed{F'(x)=\left(\dfrac{3-e^x}{e^x+1}\right)f(x)}$

■(IV)②ب

لدينا حسب جدول إشارة f في السؤال(II)③ب

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)>0}$$

و ذلك لأن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي : 0

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(3-e^x)$.

لأن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x+1>0$

نستنتج إذن جدول تغيرات F كما يلي :

x	$-\infty$	0		$\ln 3$	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	1	$+$	0	$-$
F	$-\infty$ ↗	0	↗	$F(\ln 3)$	↘ 0

■ و الحمد لله رب العالمين ■

مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 10 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الامتحانات	الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة الاستدراكية 2007

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S})$ التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

0,50 ن ① (أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$.

0,50 ن (ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ② ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S})$ ، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

0,50 ن ③ ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ④ استنتج مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن ⑤ حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين الثاني : (2,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k بحيث : $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $(n-k)$ كرة سوداء.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة .

0,50 ن ① أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

0,75 ن ② أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0,75 ن ③ أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي .

التمرين الثالث : (2,0 ن)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

0,25 ن ① (أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن (ب) بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 ن (ج) أنشىء $(\mathcal{H})$.

② $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من $(\mathcal{H})$. نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.

0,50 ن (أ) بين أن : $M(\varphi(a,b)) \in (\mathcal{H})$

0,50 ن (ب) تحقق أن $\varphi(a,1) = 1$ و أن $\varphi(a,\bar{a}) = 1$.

1,00 ن ③ نزود $(\mathcal{H})$ بقانون التركيب الداخلي $(*)$ حيث لكل $M(a)$ و $M(b)$ من $(\mathcal{H})$: $M(a) * M(b) = M(\varphi(a,b))$.

بين أن : $((\mathcal{H}), *)$ زمرة تبادلية .

التمرين الرابع : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية : $\mathcal{F}=\left\{\mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

و هي مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(\cdot)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$.

نضع : $I=\mathcal{M}(1,0)$ و $J=\mathcal{M}(0,1)$ و $O=\mathcal{M}(0,0)$

0,50 ن ① (أ) بين أن : $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

0,50 ن (ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\cdot)$ و اعط بعده .

0,50 ن ② ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ، بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

③ نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي : $\psi(z)=\mathcal{M}(m,n)$.

بحيث : $z=m+\alpha n$ و $m\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{R}$ و $z\in\mathbb{C}$.

0,50 ن (أ) تحقق أن $J^2=-2(I+J)$ و $\psi(\alpha)=J$

0,50 ن (ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلها التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن ④ نأخذ : $\alpha=-1+i$. أكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس : (9,0 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+x-e^{-x}$.

0,50 ن ① (أ) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0,50 ن (ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن (ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

0,50 ن ② لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن (أ) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)$

0,25 ن (ب) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

0,50 ن (ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن (د) أنشىء $(\mathscr{C})$.

0,50 ن ③ (أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0,+\infty[$.

0,50 ن (ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية و أنها متقاربة .

0,50 ن (ج) أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty} x_n=0$

0,25 ن | (II) ① أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^x = x$

0,50 ن | ب) بين أن المعادلة $e^x = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ بحيث : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

② تعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$: $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$

0,50 ن | أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0,50 ن | ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) :\ |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|$

0,50 ن | ج) استنتج أن : $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها .

(III) لتكن $\mathcal{F}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\mathcal{F}(0) = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{و} \quad (\forall x > 0) :\ \mathcal{F}(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

0,25 ن | ① أ) بين أن —— $(\forall t > 0) :\ \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$

0,50 ن | ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{F}(x)$

0,50 ن | ② أ) بين أن : —— $(\forall t \geq 0) :\ 1 - t \leq e^{-1} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

0,50 ن | ب) بين أن لكل t من المجال $]0,4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

0,25 ن | ج) استنتج أن $\mathcal{F}$ متصلة على اليمين في 0

0,50 ن | ③ أ) بين أن $\mathcal{F}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أحسب $\mathcal{F}'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,25 ن | ب) أدرس تغيرات الدالة $\mathcal{F}$ على $\mathbb{R}_+$.

■ ① أ

لدينا : $p \wedge q = 1$

إذن حسب مبرهنة $Bezout$:

$$(\exists\, u_0, v_0 \in \mathbb{Z}) \ : \ pu_0 + qv_0 = 1$$

■ ① ب

ليكن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا حسب السؤال ① أ $qv_0 = 1 - pu_0$

إذن : $x_0 = bpu_0 + a(1 - pu_0)$

يعني : $x_0 = bpu_0 + a - apu_0$

و منه : $x_0 = p(bu_0 - au_0) + a$

إذن : $x_0 - a = p(bu_0 - au_0)$

يعني : $p \,/\, (x_0 - a)$ و بالتالي : $\boxed{x_0 \equiv a\,[p]}$ (1)

و لدينا كذلك حسب السؤال ① أ $pu_0 = 1 - qv_0$

إذن:

$$\begin{aligned} x_0 &= b(1 - qv_0) + v_0 a \\ &= b - bqv_0 + qv_0 a \\ &= q(v_0 a - bv_0) + b \end{aligned}$$

و منه : $x_0 - b = q(v_0 a - bv_0)$

يعني : $q \,/\, (x_0 - b)$ و بالتالي : $\boxed{x_0 \equiv b\,[q]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

■ ②

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى خاصية قوية في الحسابيات و هي :

$$\boxed{\begin{cases} m / a \\ n / a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad mn \,/\, a}$$

لنبرهن أولا على صحة هذه الخاصية

لدينا : $m \,/\, a$ إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) \,; \overset{(*)}{\boxed{a = mk}}$

و لدينا كذلك : $n \,/\, a$ إذن حسب $(*)$: $n \,/\, mk$

و بما أن $m \wedge n = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $n \,/\, k$

يعني : $(\exists k' \in \mathbb{Z}) \,; \overset{(**)}{\boxed{k = nk'}}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $a = mnk'$

إذن : $\boxed{mn \,/\, a}$

نعود إلى التمرين لاستغلال الخاصية المبرهن عليها :

ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S})$.

نريد أن نبين أن $pq \,/\, (x - x_0)$.

لدينا : x_0 و x حلين للنظمة $(\mathcal{S})$.

إذن :

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \\ x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

و منه :

$$\begin{cases} (x - a) = k_1 p \\ (x - b) = k_2 q \\ (x_0 - a) = k_3 p \\ (x_0 - b) = k_4 q \end{cases} ; \quad (\exists\, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z})$$

لدينا :

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - a) - (x_0 - a) \\ &= k_1 p - k_3 p \\ &= (k_1 - k_3)p \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{p \,/\, (x - x_0)}$ (1)

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - b) - (x_0 - b) \\ &= k_2 q - k_4 q \\ &= (k_2 - k_4)q \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{q \,/\, (x - x_0)}$ (2)

حصلنا لحد الآن على :

$$\begin{cases} p \,/\, (x - x_0) \\ q \,/\, (x - x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

من هذه الأشياء نستنتج حسب الخاصية أن : $pq \,/\, (x - x_0)$.

■ ③

ننطلق من : $pq \,/\, (x - x_0)$

و نريد أن نبين أن :

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$$

لدينا x_0 حل للنظمة $(\mathcal{S})$ يعني :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

و منه :

$$\begin{cases} x_0 = k_1 p + a & (1) \\ x_0 = k_2 q + b & (2) \end{cases} ; \quad (\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

و لدينا حسب الإنطلاقة : $pq \,/\, (x - x_0)$

إذن : $(\exists k_3 \in \mathbb{Z}) \,; \overset{(3)}{\boxed{(x - x_0) = k_3 pq}}$

من (1) و (3) نستنتج أن : $x - (k_1 p + a) = k_3 pq$

يعني : $x - a = p(k_3 q + k_1)$ أي: $p \,/\, (x - a)$

و بالتالي : $\boxed{x \equiv a[p]}$ (4)

من (2) و (3) نستنتج أن : $x-(k_2q+b)=k_3pq$

إذن : $(x-b)=q(k_3p+k_2)$

و منه : $q\ /\ (x-b)$ يعني : $\boxed{x\equiv b[q]}$ (5)

من (4) و (5) نستنتج أن x حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

■ ④

من السؤالين (2) و (3) نستنتج التكافؤ التالي :

$$pq\ /\ (x-x_0) \quad\Leftrightarrow\quad x \text{ حل للنظمة } (\mathcal{S})$$

إذن : $x\equiv x_0[pq] \quad\Leftrightarrow\quad x$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$

إذن مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ هي : $\overline{x_0}$

نشير إلى أن $\overline{x_0}$ عنصر من الفضاء المتجهي : $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$

<u>بتعبير آخر</u> : مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ هي جميع الأعداد النسبية التي يكون باقي قسمتها على pq مساويا لـ x_0 .

■ ⑤

نريد أن نحل في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S}_0)$ التالية : $(\mathcal{S}_0):\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 3[13]\end{cases}$

الأسئلة السابقة تعتبر دراسة نظرية لحلول النظمة : $\begin{cases} x\equiv a[p] \\ x\equiv b[q]\end{cases}$

مع : $p\wedge q=1$

و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج تلك الدراسة

ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S}_0)$.

هذا يعني : $x\equiv x_0[8\times 13]$

لنحسب الآن x_0 . نضع : $p=8$ و $q=13$

<u>لدينا</u> :

13	8	1	5	$\longmapsto \boxed{5=13-8}$ (1)
8	5	1	3	$\longmapsto \boxed{3=8-5}$ (2)
5	3	1	2	$\longmapsto \boxed{2=5-3}$ (3)
3	2	1	1	$\longmapsto \boxed{1=3-2}$ (4)

ننطلق من النتيجة (4) .

$\boxed{1=3-2}$ (4) $\overset{\text{حسب (3)}}{\Longrightarrow}$ $1=3-(5-3)$

يعني : $1=2\times3-5$

$\overset{\text{حسب (2)}}{\Longrightarrow}$ $1=2(8-5)-5$

يعني : $1=2\times8-3\times5$

$\overset{\text{حسب (1)}}{\Longrightarrow}$ $1=2\times8-3(13-8)$

يعني : $\boxed{1=5\times8-3\times13}$

من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن : $\boxed{u_0=5}$ و $\boxed{v_0=-3}$

و منه :
$$\begin{aligned} x_0 &= 3pu_0+qv_0 \\ &= (3\times8\times5)-(13\times3) \\ &= 81 \end{aligned}$$

إذن نستنتج التكافؤ التالي :

$$x\equiv 81[104] \quad\Leftrightarrow\quad x \text{ حل النظمة } (\mathcal{S}_0)$$

و بالتالي : $\boxed{x=104k+81 \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

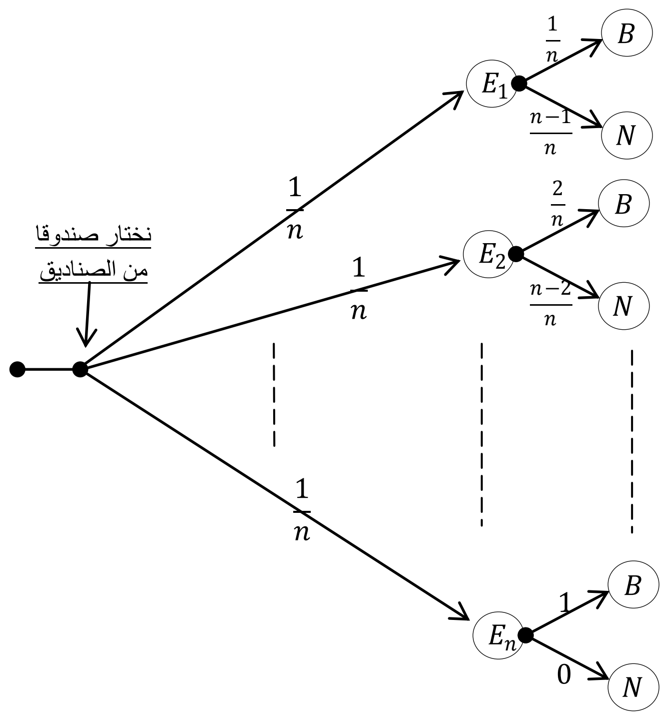
<u>**التمرين الثاني : (2,0 ن)**</u>

■ ①

في جل مراحل هذا التمرين، نشتغل بـ : $1\le i\le n$

نضع :
$E_i=$ " اختيار الصندوق رقم i "
$B=$ " سحب كرة بيضاء "
$N=$ " سحب كرة سوداء "

نحول التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



انطلاقا من هذه الشجرة نستنتج أن :

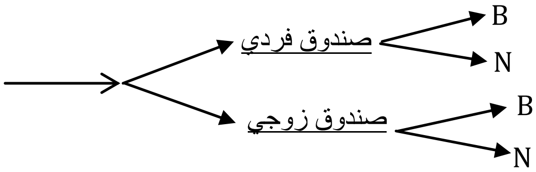
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap E_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i}{n}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$
$$\boxed{=\frac{(n+1)}{2n}}$$

■ ②

في هذا السؤال لا يهمنا لون الكرة و يمكن إعادة صياغة السؤال بالطريقة التالية :

" ما هو احتمال اختيار صندوق فردي من بين n صندوق "

و هذه التجربة يمكن نمذجتها بالشجرة التالية :



من جهة أخرى لدينا n عدد فردي

إذن في المجموعة $\{1;2;3\;\cdots;n\}$ يوجد $\frac{(n+1)}{2}$ عدد فردي.

إذن :
$$p(\text{صندوق فردي})=\frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{عدد الصناديق}}=\frac{\frac{(n+1)}{2}}{n}=\boxed{\frac{(n+1)}{2n}}$$

■ ③

$B_I=$ " الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي "

بالعودة إلى شجرة الإحتمالات السابقة نكتب :

$$P(B_I)=\sum_{\substack{i=1\\ i\text{ فردي}}}^{n}P(B\cap E_i)=\sum_{\substack{i=1\\ i\text{ فردي}}}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1\\ i=2k+1}}^{n}i$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1)=\frac{1}{n^2}\left(2\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}k\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{n-1}{2n^2}=\frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{2(n-1)}{4n^2}$$
$$=\frac{n^2+2n-3}{4n^2}$$
$$\boxed{=\frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا : $(H):\ \{M(z)/z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1\}$

نضع : $z=x+iy$

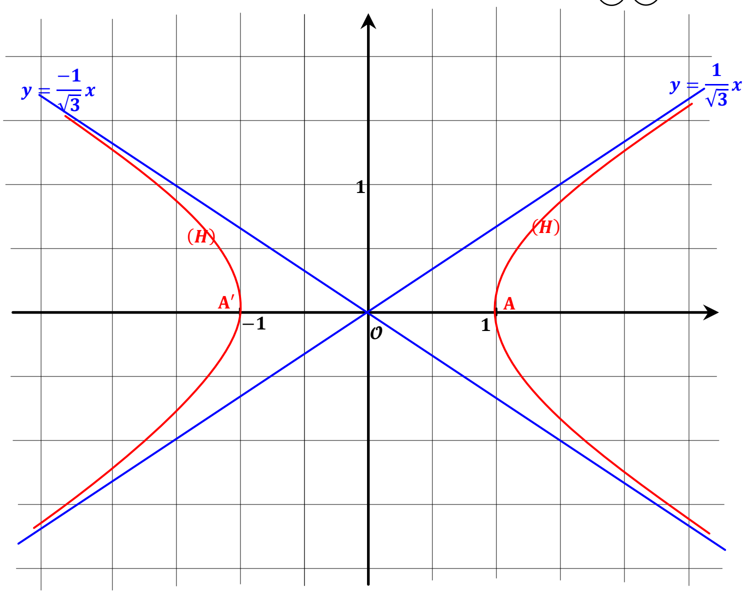
$$M(z)\epsilon\,(H)\iff (x+iy)^2+(x-iy)^2-(x^2+y^2)=1$$
$$\iff x^2-3y^2=1$$
$$\iff \boxed{\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1}$$

إذن (H) هذلول مركزه : $O(0,0)$

و رأساه : $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$

و مقاربله : $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ و $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

■ ① ج



■ ② أ

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ نقطتين من (H)

نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$

من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتا : $\varphi(a,b) = \varphi$

لدينا : $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) .

إذن : $\begin{cases} a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1 \\ b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2 = 1 \end{cases}$

نضرب المتساويتين طرفا بطرف نحصل على :

$$(a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2)(b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2) = 1$$

يعني :

$$\left((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2\right) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) = 1 - \left((ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2\right) - |ab|^2$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi\bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab})(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= 3|ab|^2 + \left((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2\right) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 3|ab|^2 + 1 - \left((ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2\right) - |ab|^2 \end{aligned}$$

إذن : $(*)$ $\boxed{\varphi\bar{\varphi} = 2|ab|^2 + 1 - \left((ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2\right)}$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi - \bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \overline{ab} \end{aligned}$$

إذن : $(**)$ $\boxed{\varphi - \bar{\varphi} = ab - \overline{ab}}$

و منه :

$$\begin{aligned} (\varphi - \bar{\varphi})^2 &= \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

يعني :

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} &= (\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - \varphi\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

و منه :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi} + \left((ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2 - 2|ab|^2\right)$$

باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 2|ab|^2 - \left((ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2\right) + 1 + (ab)^2 + \left(\overline{ab}\right)^2 - 2|ab|^2 = 1$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية $\boxed{\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 1}$

أو باستعمال الترميز الأصلي

$$\boxed{\left(\varphi(a,b)\right)^2 + \overline{\left(\varphi(a,b)\right)}^2 - \left|\left(\varphi(a,b)\right)\right|^2 = 1}$$

و بالتالي : $M\left(\varphi(a,b)\right)$ نقطة من (H) .

■ ② ب

$$\varphi(z,1) = z + \bar{z} - \bar{z} = z$$

$$\begin{aligned} \varphi(z,\bar{z}) &= zz + \bar{z}\bar{z} - \overline{z\bar{z}} \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - \bar{z}z \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■ ③

نريد أن نبين أن $*$ تجميعي و تبادلي و يقبل عنصرا محايدا و كل عنصر يمتلك مماثلا في (H) بالقانون $*$.

نحتاج في البداية أن نبين الخاصيتين التاليتين و المتعلقتين بهذا التمرين فقط.

$$\overset{(1)}{\boxed{\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b}) = ab - \overline{ab}}} \quad \text{و} \quad \overset{(2)}{\boxed{\overline{\varphi(a,b)} = \varphi(\bar{a},\bar{b})}}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(a,b)} &= \overline{(\bar{a}b + a\bar{b} - \overline{ab})} \\ &= a\bar{b} + \bar{a}b - ab \\ &= \varphi(\bar{a},\bar{b}) \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} \varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b}) &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \overline{ab} \end{aligned}$$

الآن ليكن $M(a)$ و $M(b)$ و $M(c)$ ثلاثة عناصر من (H) .

لدينا :

$$\begin{aligned} \left(M(a) * M(b)\right) * M(c) &= M\left(\varphi(a,b)\right) * M(c) \\ &= M\left(\varphi(a,b)\right) * M(c) \\ &= M[\varphi(\varphi(a,b),c)] \end{aligned}$$

$$= c\overline{\varphi(a,b)} + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\overline{\varphi(a,b)}$$
$$= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\varphi(\bar{a},\bar{b})$$
$$= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\left(\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b})\right)$$
$$= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}(ab - \overline{ab})$$
$$= c(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) + \bar{c}ab - \overline{abc}$$
$$= \boxed{\bar{a}bc + ca\bar{b} - abc + \bar{c}ab - \overline{abc}} \quad (3)$$

بنفس الطريقة لدينا :

$$M(a) * \left(M(b) * M(c)\right) = M(a) * M\left(\varphi(b,c)\right)$$
$$= M\left(\varphi(a,\varphi(b,c))\right)$$
$$= \bar{a}\varphi(b,c) + a\varphi(\bar{b},\bar{c}) - \bar{a}\varphi(\bar{b},\bar{c})$$
$$= a\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}\left(\varphi(b,c) - \varphi(\bar{b},\bar{c})\right)$$
$$= a\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}(bc - \overline{bc})$$
$$= a(\bar{b}c + b\bar{c} - bc) + \bar{a}bc - \overline{abc}$$
$$(4) \quad \boxed{= \bar{b}ca + abc\bar{} - abc + \bar{a}bc - \overline{abc}}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\left(M(a) * M(b)\right) * M(c) = M(a) * \left(M(b) * M(c)\right)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في (H) .

التبادلية :

في البداية لدينا:
$$\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$$
$$= b\bar{a} + \bar{b}a - \overline{ba}$$
$$= \varphi(b,a)$$

إذن : $(5)\ \boxed{\varphi(a,b) = \varphi(b,a)}$

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا :
$$M(a) * M(b) = M\left(\varphi(a,b)\right)$$
$$= M\left(\varphi(b,a)\right)$$
$$= M(b) * M(a)$$

و بالتالي : $*$ قانون تبادلي في (H)

العنصر المحايد :

ننطلق من الكتابة : $M(a) * M(e) = M(a)$.

يعني : $M\left(\varphi(a,e)\right) = M\left(\varphi(a,1)\right)$

يعني : $\varphi(a,e) = \varphi(a,1)$

ومنه : $e = 1$

يعني : $M(a) * M(1) = M(a)$

و نشير هنا إلى أن : $M(1) \epsilon (H)$ لأن : $1^2 + \bar{1}^2 - |1|^2 = 1$

و بما أن القانون $*$ تبادلي فإن :

$$M(a) * M(e) = M(e) * M(a) = M(a)$$

إذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في (H) .

التماثل : ليكن : $M(a), M(x) \,\epsilon\, (H)$

ننطلق من الكتابة : $M(a) * M(x) = M(1)$

يعني : $M\left(\varphi(a,x)\right) = M\left(\varphi(a,\bar{a})\right)$

يعني : $\varphi(a,x) = \varphi(a,\bar{a})$

و منه : $x = \bar{a}$

بما أن $M(a) \,\epsilon\, (H)$ فإن $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

و منه : $\overline{a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2} = 1$ يعني : $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$.

و منه : $M(\bar{a}) \,\epsilon\, (H)$

و بالتالي : كل عنصر $M(a)$ من (H) يقبل مماثلا $M(\bar{a})$ من (H) بالقانون $*$.

خلاصة : $\boxed{((H),*) \text{ زمرة تبادلية .}}$

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا $\mathcal{F}$ جزء غير فارغ من المجموعة : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لأن : $\mathcal{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\epsilon\, \mathcal{F}$

و لدينا :

$$\mathcal{M}(a,b) - \mathcal{M}(c,d) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d \\ 5d & c-3d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a-c)-(b+d) & -b-d \\ 5(b-d) & (a-c)-3(b+d) \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{M}\left((a-c),(b-d)\right) \,\epsilon\, \mathcal{F}$$

إذن : $\boxed{(\mathcal{F},+) \text{ زمرة جزئية من } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)}$

ليكن : $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{M}(a,b) \in \mathcal{F}$.

$$\lambda\mathcal{M}(a,b) = \lambda\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a+\lambda b & -\lambda b \\ 5\lambda b & \lambda a-3\lambda b \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{M}(\lambda a, \lambda b) \in (\mathcal{F})$$

إذن $\mathcal{F}$ جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي $(\cdot)$.

و نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و $\mathcal{F}$ جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن الخاصيات التالية الخاصة بالمجموعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة للمجموعة $\mathcal{F}$.

و منه :

$$(\forall\, M, M' \in \mathcal{F}), (\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \; ; \begin{cases} \alpha(M+M') = \alpha M + \alpha M' \\ (\alpha+\beta)M = \alpha M + \beta M \\ (\alpha\beta)M = \alpha(\beta . M) \\ I.M = M \end{cases}$$

إذن : $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

■ 1 ب

يكفي أن تكون الأسرة (I,J) مولدة للفضاء $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ و أن تكون أسرة حرة.

لدينا : $(\forall \mathcal{M}(a,b) \in \mathcal{F}) \; : \; \mathcal{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}(a,b) = aI + bJ$$

و منه : الأسرة (I,J) مولدة للفضاء $\mathcal{F}$

ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث : $\alpha I + \beta J = 0$.

يعني : $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\beta \\ 5\beta & \alpha-3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

يعني : $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$ و منه : $\alpha = \beta = 0$

إذن الأسرة (I,J) حرة .

و بالتالي (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $\mathcal{F}$ و بُعدُهُ يساوي 2

■ 2

ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}), (\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^*) \; ; \; \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا .

نضع : $z = m_1 + m_2\alpha$

$$\Longrightarrow \quad z = m_1 + m_2(\alpha_1 + i\alpha_2)$$
$$\Longrightarrow \quad z = m_1 + m_2\alpha_1 + im_2\alpha_2$$

بما أن : $z = x + iy$ فإن : $\begin{cases} x = m_1 + m_2\alpha_1 \\ y = m_2\alpha_2 \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} m_1 = \left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}y\right) \in \mathbb{R} \\ m_2 = \left(\frac{y}{\alpha_2}\right) \in \mathbb{R} \end{cases}$

يعني : $(\forall z \in \mathbb{C}), (\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2) \; ; \; z = m_1 + m_2\alpha$

إذن $\{1;\alpha\}$ أسرة مولدة لـ $\mathbb{C}$. (8)

لتكن $x + \alpha y$ تأليفة خطية منعدمة لـ 1 و α يعني : $x + \alpha y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + y(\alpha_1 + i\alpha_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

إذن $\{1;\alpha\}$ أسرة حرة (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\alpha\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

■ 3 أ

نضع : $z = x + \alpha y$ بحيث : $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

نعتبر التطبيق ψ المعرف بما يلي :

$$\psi \; : \; \mathbb{C} \longrightarrow F$$
$$z \longrightarrow M(a,b)$$

لدينا : $\alpha = 0 + \alpha 1$ إذن : $\psi(\alpha) = M(0,1) = J$.

و لدينا : $J^2 + 2(I+J) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و منه : $J^2 + 2(\mathrm{I} + \mathrm{J}) = \Theta$ يعني : $J^2 = -2(I+J)$

■ 3 ب

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث : $z = x + \alpha y$ و $z' = c + \alpha d$

لكي يكون ψ تشاكلا يكفي أن يحقق : $\psi(zz') = \psi(z) \times \psi(z')$

يعني : $\psi\big((x+\alpha y) \times (c + \alpha d)\big) = \psi(x+\alpha y) \times \psi(c+\alpha d)$

لدينا : $\psi(x+\alpha y) \times \psi(c+\alpha d) = \mathcal{M}(x,y) \times \mathcal{M}(c,d)$

$$= (xI + yJ) \times (cI + dJ)$$
$$= xcI + xdJ + ycJ + ydJ^2$$
$$= xcI + xdJ + ycJ + yd\big(-2(I+J)\big)$$
$$= (xc - 2yd)I + (xd + yc - 2yd)J$$
$$= \mathcal{M}\big((xc-2yd); (xd+yc-2yd)\big)$$
$$= \psi\big((xc-2yd) + (xd+yc-2yd)\alpha\big)$$

$$= \psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big)$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يكفي أن يحقق :

$$\psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big) = \psi(xc+\alpha xd+\alpha yc+\alpha^2 yd)$$

يعني : $(xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha$

$$= xc+\alpha xd+\alpha yc+\alpha^2 yd$$

نرتب جيدا هذه المتساوية نحصل على :

$$(yd)\alpha^2+(2yd)\alpha+(2yd)=0$$

يعني : $\alpha^2+2\alpha+2=0$

نحل هذه المعادلة بالطريقة التقليدية نجد :

$\alpha=-1-i$ أو $\alpha=-1+i$

و نشير كذلك إلى أن لكل عنصر $\mathcal{M}(x,y)$ يوجد عدد عقدي وحيد $z=x+y\alpha$ بحيث : $\varphi(z)=\mathcal{M}(x,y)$

و ذلك لأن $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي العقدي $\mathbb{C}$

أو بتعبير آخر : كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل تأليفة خطية للعددين 1 و α .

<u>خلاصة</u> : من أجل $\alpha=i-1$ أو $\alpha=-1-i$

لدينا ψ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$.

■ ④

نأخذ : $\alpha=-1+i$

لدينا :
$$\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$$

ومنه : حسب $(Moivre)$:

$$\alpha^{2007}=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{2007\times 3\pi}{4}\right]$$
$$=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{6021\pi}{4}\right]$$

و بما أن : $\frac{6021\pi}{4}=2\times 752\times\pi+\frac{5\pi}{4}$

فإن : $\frac{6021\pi}{4}\equiv\frac{5\pi}{4}\,[2\pi]$

و منه : $\alpha^{2007}=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{5\pi}{4}\right]$

لنكتب الآن α^{2007} في الأساس $(1,\alpha)$.

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $\boxed{\alpha^{2007}=x\cdot 1+y\cdot\alpha}$ $(*)$

هدفنا هو تحديد x و y

لدينا :
$$x+\alpha y=[x,0]+\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]\times[y,0]$$
$$=[x,0]+\left[\sqrt{2}y,\frac{3\pi}{4}\right]$$

إذن بالإستعانة بالمتساوية $(*)$ نحصل على :

$$\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{5\pi}{4}\right]=[x,0]+\left[\sqrt{2}y,\frac{3\pi}{4}\right]$$

و منه : الجزءان الحقيقيان لطرفي هذه المتساوية متساويان. و الجزءان التخيليان متساويان كذلك. و من ثم نحصل على النظمة $(\mathcal{S})$ التالية :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=x+\sqrt{2}y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}^{2007}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\end{cases}$$

لدينا : $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

و لدينا كذلك: $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

إذن النظمة $(\mathcal{S})$ تصبح :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=x+\sqrt{2}y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\\ \sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أن : $y=-2^{1003}$

و لدينا حسب المعادلة الأولى :

$$x=-2^{1003}-(2^{1003}\times 2^0)=-2^{1004}$$

و بالتالي : $\boxed{\alpha^{2007}=(-2^{1003})+(-2^{1004})\alpha}$

بعد حصولنا على هذه الصيغة الثمينة تصبح التتمة سهلة و في المتناول

لدينا :
$$\begin{aligned} J^{2007} &= J\times J\times J\times\cdots\times J \\ &= \psi(\alpha)\times\psi(\alpha)\times\psi(\alpha)\times\cdots\times\psi(\alpha) \\ &= \psi(\alpha\times\alpha\times\alpha\times\cdots\times\alpha) \\ &= \psi(\alpha^{2007}) \\ &= \psi\big((-2^{1003})+(-2^{1004})\alpha\big) \\ &= \mathcal{M}\big((-2^{1003})\,;\,(-2^{1004})\big) \\ &= (-2^{1003})I+(-2^{1004})J \end{aligned}$$

و بالتالي :
$$\boxed{J^{2007}=(-2^{1003})I+(-2^{1004})J}$$

التمرين الخامس : (9,0 ن)

■(I)(1)(أ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x)=1+e^{-x}>0$

إذن : g دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

■(I)(1)(ب)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(1+x-e^{-x})=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x-e^{-x})=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
g	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

■(I)(1)(ج)

لدينا g دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $g(\mathbb{R})$.

و لدينا :
$$\begin{aligned} g(\mathbb{R})=g(]-\infty,+\infty[) &= \Big]\lim_{x\to-\infty} g(x)\,;\,\lim_{x\to-\infty} g(x)\Big[\\ &=]-\infty\,;\,+\infty[=\mathbb{R} \end{aligned}$$

لدينا : $0\epsilon\mathbb{R}$ إذن يوجد عدد وحيد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $g(x_0)=0$

و لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g : $g(0)=0$

إذن : 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

■(I)(2)(أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

■(I)(2)(ب)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}=\frac{-(1+e^{-x})^2}{(1+x-e^{-x})^2}$$

■(I)(2)(ج)

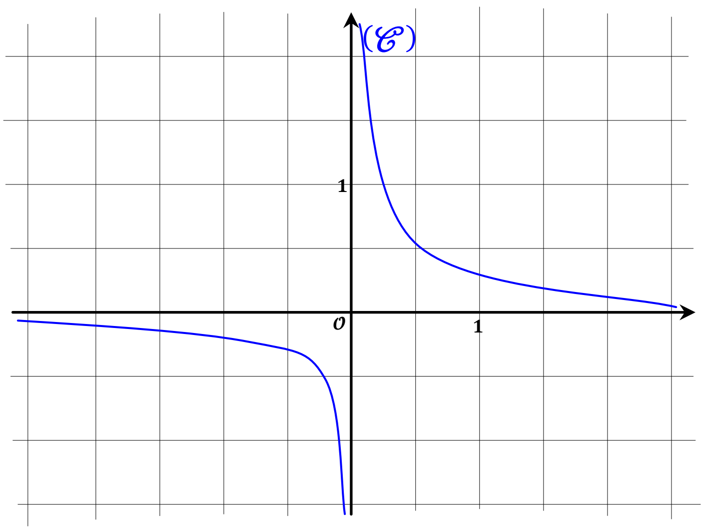
لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x)<0$

إذن : f دالة تناقصية على $\mathbb{R}^*$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
f	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

■(I)(2)(د)



■(I)③ⓐ

نضع : $h(x) = f(x) - n$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (f(x) - n) = +\infty$

و $\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - n) = -n$

و لدينا h دالة تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ لأن : $h'(x) = f'(x) < 0$

و بما أن f متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

فإن : h متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : h تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]-n, +\infty[$

و بالتالي : $(\exists!\, x_n \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ h(x_n) = 0$

أي : $\boxed{(\exists!\, x_n \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ f(x_n) = n}$ $(*)$

■(I)③ⓑ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

لدينا : $(n+1) > n$ و منه حسب $(*)$: $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

و بما أن f دالة تناقصية فإن : $x_{n+1} < x_n$

و منه : x_n متتالية تناقصية

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ x_n > 0$

فإنها متقاربة .

■(I)③ⓒ

لدينا حسب السؤال :③ⓐ $f(x_n) = n$

يعني : $\dfrac{1}{1 + x_n - e^{-x_n}} = n$

يعني : $(1 + x_n - e^{-x_n}) = \dfrac{1}{n}$

نجعل n يؤول إلى $(+\infty)$ نحصل على :

$$\lim_{n\to +\infty} (1 + x_n - e^{-x_n}) = \lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

يعني : $1 + \ell - e^{-\ell} = 0$ يعني : $(1 + \ell) = e^{-\ell}$

سنبرهن الآن بالخلف على أن : $\ell \neq 0$

نفترض إذن أن : $\ell > 0$.

إذن : $e^{-\ell} < 1$ و $1 + \ell > 0$

بما أن : $(1 + \ell) = e^{-\ell}$ فإن : $0 < (1 + \ell) < 1$.

يعني : $-1 < \ell < 0$

و هذا يتناقض مع كون $\ell > 0$

و بالتالي : $\boxed{\ell = \lim_{x\to +\infty} (x_n) = 0}$

■(II)①ⓐ

ننطلق من الكتابة : $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + x - e^{-x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + x - e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = x$$

■(II)①ⓑ

نضع : $\varphi(x) = e^{-x} - x$

لدينا φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها فرق دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$.

و منه : φ متصلة على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

و لدينا : $\varphi\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} - \dfrac{1}{e}$

و $\varphi(1) = e^{-1} - 1$

لنحدد الآن إشارة كل من $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\varphi(1)$

لدينا : $-1 < 0$ إذن $e^{-1} < 1$ يعني : $e^{-1} - 1 < 0$

و منه : $\boxed{\varphi(1) < 0}$ (1)

و لدينا $e > 1$ إذن $\frac{1}{e} < 1$

يعني : $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} < e$ و منه : $\dfrac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} > \dfrac{1}{e}$

إذن : $\boxed{\varphi\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\varphi(1) \times \varphi\left(\dfrac{1}{e}\right) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\boxed{\left(\exists \alpha \epsilon \left]\dfrac{1}{e}, 1\right[\right)\ :\ \varphi(\alpha) = 0}$

أو بتعبير آخر : $\boxed{\left(\exists \alpha \epsilon \left]\dfrac{1}{e}, 1\right[\right)\ :\ e^{-\alpha} = \alpha}$

■(II)(2)(أ)

لنبرهن على أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{e} \leq y_1 = 1 \leq 1$.

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $-1 \leq -y_n \leq -\frac{1}{e}$ و منه : $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$

إذن : $\boxed{\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}}}$ (3)

و لدينا $\frac{1}{e} > 0$ إذن $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} > 1$

و منه : $\boxed{\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} < 1}$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن : $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1}$

■(II)(2)(ب)

نضع : $\varphi(x) = e^{-x}$.

لدينا : φ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن : φ متصلة و قابلة للإشتقاق على $\overleftrightarrow{]\alpha \, , y_n[}$

لأن : $\overleftrightarrow{]\alpha \, , y_n[} \subset \mathbb{R}$

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\left(\exists ! \, c \in \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\right) \ : \ \frac{|\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)|}{|y_n - \alpha|} = |\varphi'(c)|$$

و منه : $\boxed{\left(\exists ! \, c \in \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\right) \ : \ |y_{n+1} - \alpha| = |\varphi'(c)||y_n - \alpha|}$ $(\star)$

لقد أدخلت الرمز $\overleftrightarrow{]\alpha \, , y_n[}$ لأننا لا نعلم من الأكبر هل α أم y_n

لدينا حسب السؤالين (1)(ب) و (2)(أ) : $\begin{cases} \frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \end{cases}$

بما أن : $c \in \overleftrightarrow{]\alpha \, , y_n[}$ فإن $\frac{1}{e} \leq c \leq 1$

و منه : $\boxed{-e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \leq -e^{-c} \leq -e^{-1}}$ (5)

نعلم أن العدد الموجب يكون دائما أكبر من العدد السالب .

إذن : $\boxed{-e^{-1} < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}}$ (6)

من (5) و (6) نستنتج أن : $-e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \leq -e^{-c} \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$.

يعني : $|\varphi'(c)| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|y_n - \alpha|$ نحصل على :

$$|y_n - \alpha||\varphi'(c)| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|$$

و منه حسب النتيجة $(\star)$:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|} \quad (\star\star)$$

■(II)(2)(ج)

انطلاقا من النتيجة $(\star\star)$ نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ |y_n - \alpha| \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-1} - \alpha|$$

و ذلك بتعويض n بـ $(n-1)$

إذن :
$$\begin{aligned} |y_n - \alpha| &\leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-1} - \alpha| \\ &\leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^3 |y_{n-3} - \alpha| \\ &\leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^4 |y_{n-4} - \alpha| \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |y_{n-(n-1)} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|y_n - \alpha| \leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$

يعني : $|y_n - \alpha| \leq \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha|$

لنحسب الآن نهاية المتتالية : $\left(\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha|\right)$

نعلم أن $\frac{1}{e} > 0$ إذن : $\frac{-1}{e} < 0$ و منه : $e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} < 1$

إذن $\left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1} = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} \left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha| = 0$

و بما أن : $|y_n-\alpha| \le \underbrace{\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1}|1-\alpha|}_{tend\ vers\ 0}$

فإن : $\lim_{n\infty}|y_n-\alpha| = 0$ يعني : $\lim_{n\infty} y_n = \alpha$

و بالتالي : $(y_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة و نهايتها هي α .

■(III)①أ

ليكن $t>0$ إذن : $e^{-t}<1$

يعني : $-e^{-t}>-1$

$$\Rightarrow (t+1)-e^{-t} > (t+1)-1$$
$$\Rightarrow t+1-e^{-t} > t$$
$$\Rightarrow \frac{1}{t+1-e^{-t}} < \frac{1}{t}$$
$$\Rightarrow \boxed{f(t) < \frac{1}{t}} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $-e^{-t}<0$

$$\Rightarrow (t+1)-e^{-t} < (t+1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{t+1-e^{-t}} > \frac{1}{t+1}$$
$$\Rightarrow \boxed{f(t) > \frac{1}{t+1}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t>0) : \frac{1}{t+1} < f(t) < \frac{1}{t}}$$

(III)①ب

ليكن : $x>0$

لدينا حسب السؤال أ $\boxed{(\forall t>0) : \frac{1}{t+1} < f(t) < \frac{1}{t}}$

ندخل التكامل على هذا التأطير نحصل على :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t+1}\right)dt < \int_x^{2x} f(t)\,dt < \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

$$\Rightarrow [\ln(1+t)]_x^{2x} < F(x) < [ln(t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \ln(1+2x)-\ln(1+x) < F(x) < ln(2x)-ln(x)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) < F(x) < ln(2)$$

و بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}\right) = \ln(2)$$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln(2)$

■(III)②أ

ليكن t عددا حقيقيا موجبا .

نضع : $\begin{cases}\varphi(t)=1-t\\ \psi(t)=1-t+\frac{t^2}{2}\\ h(t)=e^{-t}\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\varphi'(t)=-1\\ \psi'(t)=t-1\\ h'(t)=-e^{-t}\end{cases}$

لدينا $t\geq 0$ إذن $-t\leq 0$

و منه : $-e^{-t}\leq -1$ يعني : $h'(t)\leq \varphi'(t)$

و بما أن $h(0)=\varphi(0)=1$

فإن : $(\forall t\epsilon[0,+\infty[) : h(t)\leq\varphi(t)$

إذن : $(1)\ \boxed{(\forall t\epsilon[0,+\infty[) : e^{-t}\leq 1-t}$

من النتيجة (1) نستخلص : $-e^{-t}\geq t-1$

إذن : $h'(t)\geq\psi'(t)$

و بما أن : $h(0)=\psi(0)=1$ فإن : $h(t)\geq\psi(t)$

يعني : $(2)\ \boxed{(\forall t\epsilon[0,+\infty[) : e^{-t}\geq 1-t+\frac{t^2}{2}}$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t\geq 0) : \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\geq e^{-t}\geq(1-t)}$$

■(III)②ب

لدينا :

$$(\forall t\geq 0)\ ;\ 1-t\leq e^{-t}$$
$$\Rightarrow (\forall t\geq 0)\ ;\ t-1\geq -e^{-t}$$
$$\Rightarrow (\forall t\geq 0)\ ;\ (t+1)+(t-1)\geq(t+1)-e^{-t}$$
$$\Rightarrow (\forall t\geq 0)\ ;\ 2t\geq t+1-e^{-t}$$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t}\leq\frac{1}{t+1-e^{-t}}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{(\forall t\geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t}\leq f(t)}\ (*)$$

و لدينا كذلك : $(\forall t\geq 0)\ :\ \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\geq e^{-t}$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ -e^{-t}\geq -1+t-\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ (1+t)-e^{-t}\geq (1+t)-1+t-\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ (1+t)-e^{-t}\geq 2t-\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ (1+t)-e^{-t}\geq \frac{4t-t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ \frac{1}{1+t-e^{-t}}\leq\frac{2}{4t-t^2}$$

$$\Rightarrow\ (\forall t\geq 0)\ ;\ f(t)\leq\frac{2}{4t-t^2}$$

و لدينا : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)=\frac{2}{4t-t^2}$

إذن : $(**)\ \boxed{(\forall t\geq 0)\ ;\ f(t)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t\geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t}\leq f(t)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)}$$

■(III) 2 ج

ننطلق من نتيجة السؤال ب :

لدينا : $\frac{1}{2t}\leq f(t)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$

$$\Rightarrow\ \int_x^{2x}\frac{1}{2t}dt\ \leq\int_x^{2x}f(t)\,dt\ \leq\frac{1}{2}\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x}\leq F(x)\leq\frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x}+\frac{1}{2}[\ln(4-t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\ln 2}{2}\leq F(x)\leq\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)$$

و بما أن : $\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)=0$

فإن : $\lim_{x\to 0^+}F(x)=\frac{\ln 2}{2}$

و بالتالي F متصلة على يمين الصفر.

■(III) 3 أ

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$ إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بـ $\mathcal{T}$ بحيث : $\mathcal{T}'(x)=f(x)$.

لدينا : $F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt=[\mathcal{T}(t)]_x^{2x}=\mathcal{T}(2x)-\mathcal{T}(x)$

بما أن : $x\to 2x$ و $x\to\mathcal{T}(x)$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ فإن : $x\to\mathcal{T}(2x)-\mathcal{T}(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا : $F'(x)=2\mathcal{T}'(x)-\mathcal{T}'(x)$.

$$=2f(2x)-f(x)$$

$$=\frac{2}{g(2x)}-\frac{1}{g(x)}$$

$$=\frac{2g(x)-g(2x)}{g(2x)g(x)}$$

$$=\frac{2(1+x-e^{-x})-(1+2x-e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$=\frac{(1-2e^{-x}+e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$=\frac{(e^{2x}-2e^x+1)}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

$$\boxed{=\frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}g(2x)g(x)}}$$

■(III) 3 ب

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\ :\ g(x)>0$ و $g(2x)>0$

وبما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\ ;\ e^{2x}>0$ و $(e^x-1)^2\geq 0$

فإن : $F'(x)\geq 0$

و بالتالي : F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2008	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات	مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,25 ن)

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و $(\mathbb{R},+,\times)$ جسم تبادلي

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ و $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix} / (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\right\}$

0,75 ن — 1 أ) بين أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0,50 ن — ب) بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

2 نعتبر التطبيق : $\begin{array}{l} f\ :\ \mathbb{C}^*\to E^* \\ a+ib\to M(a,b)\end{array}$ حيث : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$.

0,25 ن — أ) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 ن — ب) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

0,50 ن — 3 بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

0,75 ن — 4 حل في E المعادلة : $J\times\mathcal{X}^3=I$ (حيث : $\mathcal{X}^3=\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}$).

التمرين الثاني : (3,75 ن)

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و $\bar{a}$ مرافق العدد a .

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(G)\ :\ iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$.

0,50 ن — 1 أ) تحقق أن مميز المعادلة (G) هو : $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$.

0,50 ن — ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : (G) .

0,50 ن — 2 بين أن a حل للمعادلة (G) إذا و فقط إذا كان $\Re e(a)=\Im m(a)$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نفترض أن $\Re e(a)\neq\Im m(a)$.
نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $(1+ia)$

1 نضع : $z=\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}$

0,50 ن — أ) تحقق أن : $\bar{z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

ب) بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان : $\mathfrak{Im}(a) = \frac{1}{2}$

2) نفترض في هذا السؤال أن : $\mathfrak{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$

نعتبر $\mathcal{R}_1$ الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{-\pi}{2}$ و $\mathcal{R}_2$ الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

نضع : $\mathcal{R}_1(B) = B'$ و $\mathcal{R}_2(C) = C'$.

لتكن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$.

أ) حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي	0,50 ن
ب) بين أن المستقيمين (AE) و $(B'C')$ متعامدان و أن $B'C' = 2\,AE$.	0,75 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ 35u - 96v = 1$.

1) تحقق أن الزوج $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .	0,25 ن
2) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .	0,50 ن

(II) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $(F)\ :\ x^{35} \equiv 2[97]$.

1) ليكن x حلا للمعادلة (F) .

أ) بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما .	0,50 ن
ب) بين أن : $x^{96} \equiv 1[97]$.	0,50 ن
ج) بين أن : $x \equiv 2^{11}[97]$.	0,50 ن
2) بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x \equiv 2^{11}[97]$ فإن x حل للمعادلة (F) .	0,25 ن
3) بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على الشكل $11 + 97k$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.	0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)	
	(I) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $\boxed{f(x) = 2x - e^{-x^2}}$.
	و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,50 ن	① أ) أحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .
0,50 ن	ب) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .
0,50 ن	ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$ و أن $0 < \alpha < 1$.
0,50 ن	د) أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$.
0,50 ن	② أنشىء المنحنى $(\mathscr{C})$. (نأخذ : $\alpha \approx 0,4$).
	(II) نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرف على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :
	$\boxed{\begin{cases}\varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \;;\; x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases}}$ و $\boxed{g(x) = x^2 - \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$
0,50 ن	① أ) بين أن : $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-c^2}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*),(\exists c\epsilon]0,x[)$
0,50 ن	ب) استنتج أن : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt < 1$
0,50 ن	② أ) بين أن : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,dt$
0,50 ن	ب) بين أن الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+)\;;\; g'(x) = f(x)$.
0,50 ن	ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha,1[$.
0,50 ن	③ أ) بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر .
0,50 ن	ب) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\;;\; \varphi(x) = e^{-x^2} + \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\,e^{-t^2}dt$
0,75 ن	ج) بين أن الدالة φ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\;;\; \varphi'(x) = \dfrac{-2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t^2\,e^{-t^2}dt$
0,50 ن	د) بين أن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$.
0,50 ن	④ أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+$ لدينا : $\displaystyle\int_0^x t^2\,e^{-t^2}dt \leq \dfrac{x^3}{3}$
0,50 ن	ب) بين أن : $(\forall x\epsilon]0,1[)\;;\; \lvert\varphi'(x)\rvert \leq \dfrac{2}{3}$
0,25 ن	ج) بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\;;\; \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$
	⑤ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\;;\; u_{n+1} = \varphi(u_n) \;\text{ و }\; u_0 = \dfrac{2}{3}}$
0,50 ن	أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\;;\; 0 \leq u_n \leq 1$
0,50 ن	ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\;;\; \lvert u_n - \beta\rvert \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
0,50 ن	ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الأول : (3,25 ن)

■ ① أ

لدينا E جزء غير فارغ من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ لأن : $M(0,0)\epsilon E$.

ليكن γ و β عددين حقيقيين و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\gamma M(a,b)+\beta M(c,d) = \gamma\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} c & \sqrt{3}d \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma a+\beta c & \sqrt{3}(\gamma b+\beta d) \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}(\gamma b+\beta d) & \gamma a+\beta c \end{pmatrix}$$

$$= M(\gamma a+\beta c\ ,\gamma b+\beta d)\ \epsilon\ E$$

إذن :

$$(\forall \gamma,\beta\epsilon\mathbb{R})\ ,(\forall M(a,b),M(c,d)\ :\ \gamma M(a,b)+\beta M(c,d)\ \epsilon\ E$$

إذن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

■ ① ب

من الواضح أن الأسرة (I,J) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

لأن : $(\forall M(a,b)\ \epsilon\ E\ )\ :\ M(a,b)=aI+bJ$.

لتكن $\alpha I+\beta J$ تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و J .

$$\Leftrightarrow\quad \alpha I+\beta J=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{3}\beta \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta=0$$

إذن (I,J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا)

و بالتالي (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

■ ② أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من الفضاء المتجهي E

لدينا :
$$M(a,b)\times M(c,d) = (aI+bJ)\times(cI+dJ)$$
$$= acI+adJ+bcJ+bdJ^2$$

و لدينا :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$M(a,b)\times M(c,d) = (ac-bd)I+(ad+bc)J$$

$$= M(\ ac-bd\ ,ad+bc\ )\ \epsilon\ E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ ② ب

ليكن $(a+ib)$ و $(c+id)$ عددين عقديين غير منعدمين.

لدينا :

$$f\big((a+ib)\times(c+id)\big) = f\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)$$

$$= M\big((ac-bd)\ ,(ad+bc)\big)$$

$$= M(a,b)\times M(c,d)$$

$$= f(a+ib)\times f(c+id)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* .

لنحل المعادلة : $f(x+iy)=M(a,b)$.

$$\Leftrightarrow\quad M(x,y)=M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}y \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$$

إذن المعادلة $f(x+iy)=M(a,b)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}^*$

إذن : f تقابل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

<u>خلاصة</u> : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

■ ③

نعلم أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

إذن : $(E,+)$ زمرة تبادلية (1)

و لدينا كذلك $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية .

إذن : $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية لأن f تشاكل تقابلي. (2)

بما أن الضرب $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

فإن $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في E (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

■ (4)

لنحل في E المعادلة : $J \times X^3 = I$.

$$\Leftrightarrow \quad -J \times J \times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow \quad -J^2 \times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow \quad X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(M(a,b)\right)^3 = M(0,-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(f(a+ib)\right)^3 = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad f((a+ib)^3) = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+ib)^3 = -i$$

لنحل إذن في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 = -i$.

نضع : $z = re^{i\theta}$ إذن : $r^3 e^{3i\theta} = e^{\frac{-\pi i}{2}}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{-\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

من أجل $k = 0$ لدينا : $z_0 = e^{\frac{-\pi}{6}i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k = 1$ فإن : $z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

إذن المصفوفة $M(0,1)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k = 2$ فإن : $z_2 = e^{\frac{7\pi}{6}i} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة $J \times X^3 = I$ في E تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J\right), (J), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J\right) \right\}$$

التمرين الثاني : (3,75 ن)

■ (I) (1) (أ)

بعد عملية النشر و التبسيط نحصل على :

$$\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$$

■ (I) (1) (ب)

لدينا : $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$

إذن : $z_1 = \dfrac{(i - a - \bar{a}) - (a - \bar{a} - i)}{2i} = 1 + ai$

و $z_2 = \dfrac{(i - a - \bar{a}) + (a - \bar{a} - i)}{2i} = \bar{a}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة (G) تكتب على شكل :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1 + ai \ , \bar{a}i\}}$$

■ (2)

لدينا المعادلة (G) تقبل الحلين : $\bar{a}i$ و $1 + ai$.

إذا كان a حلا للمعادلة (G) فإن : $a = \bar{a}i$ أو $a = 1 + ai$.

يعني : $\mathcal{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a) = \mathfrak{Im}(a) + i\,\mathcal{Re}(a)$

أو : $\left(1 - \mathfrak{Im}(a)\right) + i\,\mathcal{Re}(a) = \mathcal{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a)$

إذن في كلتا الحالتين نحصل على : $\mathfrak{Im}(a) = \mathcal{Re}(a)$.

عكسيا :

ليكن a عددا عقديا مكتوبا على شكل $a = r + ri$.

لدينا : $\bar{a}i = (r - ri)i = ri + r = a$.

إذن a حل للمعادلة (G) لأنه مكتوب على شكل $\bar{a}i$.

و بالتالي : $\mathfrak{Im}(a) = \mathcal{Re}(a) \quad \Leftrightarrow \quad a$ حل لـ (G) .

■ (II) (1) (أ)

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a}\right)} = \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{1 - i\bar{a} - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{1 - \bar{a}(i+1)}{-ia - \bar{a}}$$

نضرب البسط و المقام في العدد العقدي $(-i)$ نحصل على :

$$\boxed{\bar{z} = \frac{-i + \bar{a}(i-1)}{-a + \bar{a}i}}$$

■ ①ب

ننطلق من كون $A(a)$ و $B(i\bar{a})$ و $C(1+ai)$ نقط مستقيمية .

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\right)} = \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} = \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} = \frac{(i-a)-ai}{-\bar{a}-ai}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\bar{a}i)-\bar{a} = (i-a)-ai$$

$$\Leftrightarrow \quad i(a-\bar{a})+(a-\bar{a}) = (i-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-\bar{a}) = \frac{(i-1)}{(i+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\mathfrak{I}m(a))i = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathfrak{I}m(a) = \frac{1}{2}}$$

■ ②أ

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}_1(B) = B'$

$$\Leftrightarrow \quad (z_{B'} - z_A) = e^{\frac{-\pi}{2}i}(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b'-a) = -i(i\bar{a}-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad b' = \bar{a} + ia + a$$

بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}_2(C) = C'$

$$\Leftrightarrow \quad (z_{C'} - z_A) = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad (c'-a) = i(1+ai-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad c' = i(1-a)$$

■ ②ب

لدينا E هي منتصف القطعة $[BC]$.

إذن : $z_E = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{i\bar{a}+ai+1}{2}$

و لدينا :

$$\frac{z_{c'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = \frac{i(1-a)-(\bar{a}+ia+a)}{\frac{i\bar{a}+ai+1}{2}-a} = 2\left(\frac{i-2ai-\bar{a}-a}{i\bar{a}+ai+1-2a}\right) = 2i\left(\frac{1-2a+\bar{a}i+ai}{i\bar{a}+ai+1-2a}\right) = 2i$$

إذن : $(\#)\ \boxed{\dfrac{z_{c'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = 2i}$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z_{c'} - z_{B'}}{z_E - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{B'C'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad (AE) \perp (B'C')$$

و لدينا كذلك حسب النتيجة $(\#)$ $\left|\dfrac{z_{c'} - z_{B'}}{z_E - z_A}\right| = 2$

إذن : $|z_{c'} - z_{B'}| = 2|z_E - z_A|$

$$\Leftrightarrow \quad B'C' = 2AE$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (I)①

لدينا : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

إذن : $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

■ (I)②

لدينا حسب السؤال ① : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

إذن حسب مبرهنة $Bezout$: $35 \wedge 96 = 1$

ليكن (u,v) الحل العام للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases} 35u - 96v = 1 \\ 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{35(u-11) = 96(v-4)} \quad \otimes$$

إذن : $35 / 96(v-4)$

و بما أن : $35 \wedge 96 = 1$

فإنه حسب $Gauss$. $35 / (v-4)$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z}) \; : \; v = 35k+4$

نعوض v بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على :

$$35(u-11) = 96\times 35k$$

إذن : $u = 96k+11$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{(96k+11 \,;\, 35k+4) \;;\; k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ (II) ① أ

لدينا 2 و 3 و 5 و 7 هي الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 97 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 97

إذن : 97 عدد أولي .

ليكن : $x \wedge 97 = d$ إذن : $d / 97$

و بما أن 97 عدد أولي فإنه يمتلك قاسمين صحيحين طبيعيين فقط و هما 97 و 1 .

و منه : $d = 97$ أو $d = 1$.

نفترض أن : $d = 97$.

لدينا $x \wedge 97 = d$ و منه : d / x

و منه : $x \equiv 0[97]$ أي : $x^{35} \equiv 0[97]$

إذن : x ليس حلا للمعادلة (F) و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة.

و بالتالي : $d = 1$ و منه : $x \wedge 97 = 1$.

■ (II) ① ب

لدينا : $x \wedge 97 = 1$ و 97 عدد أولي

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$: $x^{97-1} \equiv 1[97]$

أي : $x^{96} \equiv 1[97]$.

■ (II) ① ج

نعلم أن $(11,4)$ حل للمعادلة (E) .

و نعلم كذلك أن : $35\times 11 - 96\times 4 = 1$.

لدينا x حل للمعادلة (F) .

إذن : $x^{35} \equiv 2[97]$ و منه : $\boxed{x^{35\times 11} \equiv 2^{11}[97]}$ (1)

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال : ① ب $x^{96} \equiv 1[97]$.

إذن : $\boxed{x^{-96\times 4} \equiv 1[97]}$. (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$x^{35\times 11 - 96\times 4} \equiv 2^{11}[97]$$

و بالتالي : $\boxed{x^{1} \equiv 2^{11}[97]}$.

■ (II) ②

لدينا : $x \equiv 2^{11}[97]$

$$\Rightarrow \quad x^{35} \equiv 2^{11\times 35}[97]$$
$$\Rightarrow \quad x^{35} \equiv 2^{96\times 4+1}[97]$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x^{35} \equiv 2^{96\times 4}\times 2[97]} \; (\circledast)$$

و نعلم أن 97 و 2 عددان أوليان :

إذن حسب $Fermat$: $2^{96} \equiv 1[97]$.

يعني : $2^{96\times 4} \equiv 1[97]$ أي : $2^{96\times 4}\times 2 \equiv 2[97]$

بالرجوع إلى المتوافقة $(\circledast)$ نحصل على : $x^{35} \equiv 2[97]$

و بالتالي : x حل للمعادلة (F) .

■ (II) ③

في الأسئلة السابقة تمكنا من إثبات التكافؤ التالي :

$$x^{35} \equiv 2[97] \iff x \equiv 2^{11}[97]$$

نستعين بالآلة الحاسبة للحصول على :

$2^{11} = 2048$ و منه كذلك : $2^{11} \equiv 11[97]$.

إذن : $x \equiv 11[97]$.

أي : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z}) \; : \; x = 97k+11$

و منه : مجموعة حلول المعادلة (F) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{\, 97k+11 \;;\; k\epsilon\mathbb{Z} \,\}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) ① أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - e^{-x^2} - 2x\right) = 0$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$

■ (I) ① ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+$.

لدينا : $f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2} > 0$.

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - e^{-x^2}\right) = +\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-1 \nearrow +\infty$

■ (I) (1) (ج)

لدينا : f تزايدية قطعا على : $[0,+\infty[$

إذن : f تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه : f تقابل من المجال $]0,1[$ نحو صورته $\left]-1\,,2-\frac{1}{e}\right[$

و لدينا : $2-\frac{1}{e}\approx 1,6$ إذن : $0\in\left]-1\,,2-\frac{1}{e}\right[$

و بالتالي : 0 يمتلك سابقا واحدا في المجال $]0,1[$ بالتقابل f

يعني : $\exists!\ \alpha\in\,]0,1[\ : f(\alpha)=0$

■ (I) (1) (د)

لدينا : $f(\alpha)=0$ و $\alpha\in\,]0,1[$

إذا كان $0<x<\alpha$ فإن : $f(x)<f(\alpha)$ لأن f تزايدية.

و منه : $f(x)<0$

إذا كان $\alpha<x<1$ فإن : $f(x)>f(\alpha)$ لأن f تزايدية.

و منه : $f(x)>0$

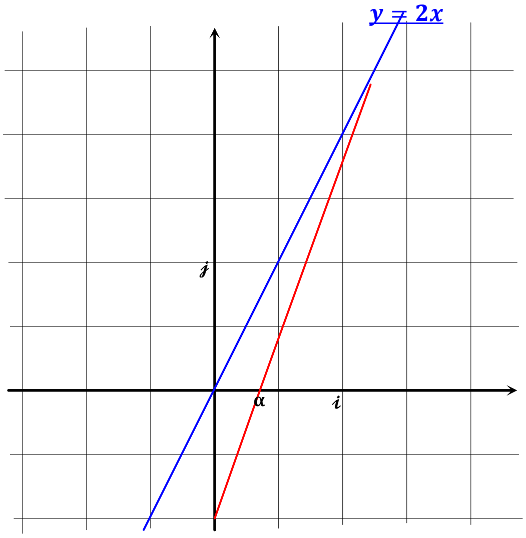
و بالتالي f موجبة قطعا على المجال $]\alpha,1[$

و f سالبة قطعا على المجال $]0,\alpha[$

و f تنعدم في α

■ (I) (1) (د)

إنشاء : $(\mathscr{C})$



■ (II) (1) (أ)

لدينا : $t\to e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[0,x]$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h على المجال $[0,x]$ بحيث : $h'(x)=e^{-x^2}$

و منه h متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0,x]$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$(\exists\, c\in\,]0,x[)\ :\ \frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(c)$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists\, c\in\,]0,x[)\ :\ \frac{1}{x}\big(h(x)-h(0)\big)=e^{-c^2}$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists\, c\in\,]0,x[)\ :\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$$

■ (II) (1) (ب)

لدينا : $0<c<x$ إذن : $-x^2<-c^2<0$

و منه : $e^{-x^2}<e^{-c^2}<1$

باستعمال نتيجة السؤال (1)(أ) نحصل على :

$$(\forall\, x>0)\ :\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt<1$$

و من أجل $x=1$ نحصل على : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$

■ (II) (2) (أ)

لدينا :

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(t)dt &= \int_0^\alpha \left(2t-e^{-t^2}\right)dt\\ &= 2\int_0^\alpha t dt-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\ &= \frac{2\alpha^2}{2}-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\ &= \alpha^2-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\ &= g(\alpha)\end{aligned}$$

■ (II) (2) (ب)

لدينا : $t\to e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[0,x]$ بحيث : $x>0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h على المجال $[0,x]$ بحيث : $h'(x)=e^{-x^2}$

لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$ لأنها فرق دالتين قابلتين للإشتقاق و هما h و $x\to x^2$.

و لدينا : $g(x)=x^2-h(x)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ g'(x) &= 2x-h'(x)\\ &= 2x-e^{-x^2}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

■ (II) ② ج

لدينا f موجبة على المجال $]\alpha,1[$

و منه : $(\forall x \in]\alpha,1[) \ : \ g'(x) = f(x) > 0$.

يعني : g دالة تزايدية قطعا على $]\alpha,1[$.

و منه g تقابل من المجال $]\alpha,1[$ نحو المجال $]g(\alpha),g(1)[$.

و لدينا كذلك f سالبة على المجال $[0,\alpha]$

إذن : $(\forall x \in [0,\alpha]) \ : \ g'(x) = f(x) < 0$.

يعني : g دالة تناقصية على المجال $[0,\alpha]$

و بما أن : $\alpha > 0$ فإن : $g(\alpha) < g(0)$

أي : $\boxed{g(\alpha) < 0}$ (1)

ومن السؤال (II) ① ب نستنتج أن : $1 - \int_1^1 e^{-t^2}\,dt > 0$

يعني : $\boxed{g(1) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $0 \in]g(\alpha),g(1)[$

إذن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\alpha,1[$ بالتقابل f .

أو بتعبير أنيق : $\boxed{(\exists!\,\beta \in]\alpha,1[) \ ; \ f(\beta) = 0}$

■ (II) ③ أ

لدينا حسب السؤال : (II) ① أ

$$(\forall\, x > 0) \quad (\exists\, c \in]0,x[) \ : \ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}$$

و لدينا كذلك : $0 < c < x$.

إذن : $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$.

$$\Leftrightarrow \ e^{-x^2} < \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt < 1 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ e^{-x^2} < \varphi(x) < 1 \quad ; \quad x > 0$$

بما أن : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

فإنه بالضرورة : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$

و بالتالي : φ دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■ (II) ③ ب

لدينا : $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-t^2}}_{v}\,dt \quad ; \quad x > 0$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x}\left([uv] - \int uv'\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\left[te^{-t^2}\right]_0^x + 2\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt\right) \\
&= e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt
\end{aligned}$$

■ (II) ③ ج

نضع : $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt$

لدينا : $\psi'(x) = x^2 e^{-x^2}$

ننطلق من : $\varphi(x) = e^{-x^2} + \dfrac{2\psi(x)}{x}$

إذن :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -2xe^{-x^2} + \frac{2x^3 e^{-x^2} - 2\psi(x)}{x^2} \\
&= -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2}\psi(x) \\
&= \frac{-2}{x^2}\psi(x) \\
&= \frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt
\end{aligned}$$

■ (II) ③ د

انطلاقا من تعبير $\varphi'(x)$ نستنتج أن : $(\forall x > 0) \ : \ \varphi'(x) < 0$

إذن φ تناقصية على $\mathbb{R}_*^+$.

و بالخصوص φ متصلة و تناقصية على المجال $[0,1]$

ليكن : $x \in [0,1]$ يعني : $0 \le x \le 1$.

$$\Longrightarrow \quad \varphi(0) \ge \varphi(x) \ge \varphi(1)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \ge \varphi(x) \ge \int_0^1 e^{-t^2}dt > 0$$

إذن : $\varphi(x) \in [0,1]$

و بالتالي : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

■(II)④(أ)

لدينا : $-t^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-t^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 e^{-t^2} \leq t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^x t^2\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \leq \frac{x^3}{3}$$

■(II)④(ب)

لدينا : $0 \leq \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \leq \frac{x^3}{3}$

إذن : $0 \leq \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\right| \leq \left|\frac{x^3}{3}\right|$

و منه : $\left|\frac{2}{x^2}\right| \times \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\right| \leq \left|\frac{x^3}{3}\right| \times \left|\frac{2}{x^2}\right|$

و نعلم أن : $|\varphi'(x)| = \left|\frac{2}{x^2}\right| \times \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\right|$

إذن : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}|x|$

و بما أن : $0 < x < 1$ فإن : $|x| < 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x \in]0,1[) \;;\; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}}$

■(II)④(ج)

ليكن $x > 0$

ننطلق من الكتابة : $\varphi(x) = x$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{g(x) = 0}$$

■(II)⑤(أ)

نستعمل في هذا السؤال البرهان بالترجع

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 1$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 0 \leq u_n \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \quad u_n \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(u_n) \in [0,1]$$

لأن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 0 \leq u_n \leq 1}$

■(II)⑤(ب)

لدينا حسب نتائج الأسئلة السابقة :

φ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن يمكن تطبيق TAF بالنسبة للدالة φ على أي مجال من $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ و $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

يوجد عدد حقيقي λ محصور بين β و u_n بحيث :

$$\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\beta)}{u_n - \beta} = \varphi'(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \quad |\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| = |\varphi'(\lambda)||u_n - \beta|$$

بما أن : $g(\beta) = 0$ فإنه حسب (II)④(ج) $\varphi(\beta) = \beta$

إذن : $|u_{n+1} - \beta| < |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta|$

لدينا حسب السؤال(II)④(ب)

$$(\forall x \in]0,1[) \;;\; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$$

و لدينا $\lambda \in]0,1[$ لأن β و u_n عنصرين من $]0,1[$

إذن : $|\varphi'(\lambda)| < \frac{2}{3}$

و منه : $|\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta| < \frac{2}{3}|u_n - \beta|$

و بالتالي : $\boxed{|u_{n+1} - \beta| < \frac{2}{3}|u_n - \beta|}$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$|u_n-\beta| \le \frac{2}{3}|u_{n-1}-\beta|$$

$$\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|u_{n-2}-\beta|$$

$$\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|u_{n-3}-\beta|$$

$$\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|u_{n-4}-\beta|$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\le \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-\beta|}$$

و بما أن : $0<\beta<1$

فإن : $\frac{-1}{3}<\frac{2}{3}-\beta<\frac{2}{3}$

إذن : $-1<\frac{2}{3}-\beta<1$

أي : $|u_0-\beta|<1$

و منه : $\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-\beta| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

■(II)⑤ⓙ

بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية تؤول إلى الصفر لأن أساسها عدد موجب أصغر من 1

إذن بالضرورة نستنتج أن : $\lim_{n\infty}(u_n-\beta)=0$

يعني : $\lim_{n\infty}(u_n)=\beta$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى β .

■ و الحمد لله رب العالمين ■

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث : $z_2 = -2z+3i$ و نضع $F = h\circ r$

1,00 ن ① حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و عناصر هما المميزة .

0,50 ن ② نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد i .

و نضع : $B=F(A)$ و $C=F(B)$ و $D=F(C)$

0,50 ن (أ) بين أنه إذا كانت النقطة $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ بالتطبيق F فإن : $z'-i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$

0,25 ن (ب) تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق : $F(\Omega)=\Omega$.

0,75 ن ③ (أ) حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d ألحاق النقط B و C و D على التوالي .

0,25 ن (ب) بين أن النقط Ω و A و D مستقيمية .

0,50 ن (ج) بين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.

0,25 ن (د) حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ;\ x*y = x+y-3xy$$

0,25 ن ① (أ) تحقق أن : $(\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ;\ (1-3x)(1-3y) = 1-3(x*y)$.

0,75 ن (ب) بين أن : $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية .

0,50 ن ② (أ) بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي

$\varphi(x) = 1-3x$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$.

0,25 ن (ب) بين أن : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

0,50 ن (ج) بين أن : $\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[,*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$

③ لكل x من المجموعة : $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $x^{(0)}=0$ و $x^{(n+1)} = x^{(n)}*x$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$.

0,25 ن (أ) بين أن : $\left(\forall x\epsilon\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$

0,50 ن (ب) استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

④ نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)\ ;\ x\top y = x+y-\frac{1}{3}$$

0,50 ن — (أ) بين أن : $(\mathbb{R},\top)$ زمرة تبادلية .

0,50 ن — (ب) بين أن : $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

يحتوي صندوق على أربع كرات : كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس.

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق.

نجري نفس التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون و نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت عندها التجربة .

1,00 ن — ① أحسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X=2]$ و $[X=3]$

② ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

0,75 ن — (أ) بين أن احتمال الحدث $[X=2]$ هو : $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0,75 ن — (ب) بين أن احتمال الحدث $[X=2k+1]$ هو : $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية المعرفة على المجال : $I=\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ بما يلي :

$$f(0)=2 \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x}\ ;\ x\neq 0$$

0,50 ن — ① و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

بين أن الدالة f متصلة في الصفر.

② لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي : $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$.

0,50 ن — (أ) أحسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

0,75 ن — (ب) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=-2$.

0,50 ن — ③ (أ) بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $I\setminus\{0\}$.

و أن : $(\forall x\epsilon I\setminus\{0\})\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

0,50 ن — (ب) بين أن : $(\forall x\epsilon I\setminus\{0\})\ ;\ g(x)<0$.

0,25 ن — (ج) استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

④ (أ) أحسب النهايتين : ——— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2} \\ x>\frac{-1}{2}}} f(x)$ ثم أول النتيجتين المحصل عليهما هندسيا .	0,50 ن
(ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$.	0,50 ن
(ج) أنشىء المنحنى $(\mathscr{C})$ (نأخذ : $\alpha \approx 1{,}3$) .	0,50 ن
(II) ① نضع : $J=[1;\alpha]$ و $\boxed{(\forall x\epsilon I)\ ;\ \varphi(x)=\ln(1+2x)}$.	
(أ) بين أن الدالة φ قابلة للإشتقاق على المجال I و أن : $(\forall x\geq 1)\ ;\ 0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$.	0,50 ن
(ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن $\varphi(J)\subset J$.	0,75 ن
② نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\boxed{u_0=1 \text{ و } (\forall n\geq 0)\ ;\ u_{n+1}=\ln(1+2u_n)}$.	
(أ) بين أن $(\forall n\geq 0)\ ;\ u_n\epsilon J$.	0,50 ن
(ب) بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ \lvert u_n-\alpha\rvert\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,50 ن
(ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.	0,50 ن
(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $\boxed{F(x)=\int_0^x f(t)\,dt}$	
① (أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$.	0,50 ن
(ب) استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال I	0,25 ن
② (أ) بين أن : $(\forall x\geq 1)\ ;\ F(x)\geq\int_1^x\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}dt$	0,50 ن
(ب) استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$	0,50 ن
③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $\frac{-1}{2}$ و نعتبر الدالة $\tilde{F}$ المعرفة على المجال $\left[\frac{-1}{2}\right.$ و $\left.+\infty\right[$ بما يلي : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ \tilde{F}(x)=F(x)$ و $\tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)=\ell$	
(أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ F(x)-\ell\geq\left(x+\frac{1}{2}\right)f(x)$	0,50 ن
(ب) استنتج أن الدالة $\tilde{F}$ غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $\frac{-1}{2}$	0,50 ن

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ 1

ننطلق من الكتابة : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z_1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{VM_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}\,\overrightarrow{VM}$$

و بالتالي : r دوران مركزه $V(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و لدينا كذلك : $h(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2z + 3i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2z + 2i + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = -2(z - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad (z_2 - i) = -2(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{VM_2} = -2\,\overrightarrow{VM}$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ و نسبته -2

■ 2 أ

ننطلق من الشكل التالي :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend left, "F = hor"] & M_1 \arrow[r, "h"] & M' \\ z \arrow[r] & z_1 \arrow[r] & z' \end{tikzcd}$$

لدينا : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow \quad (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $h(z_1) = z'$

$$\Leftrightarrow \quad (z' - i) = -2(z_1 - i)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad (z' - i) = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} -e^{i\frac{\pi}{3}} &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(z' - i) = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)}$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال أ

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad F \quad} & M' \\ z & \xrightarrow{\qquad} & z' = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i) + i \end{array}$$

لنحل المعادلة : $F(M) = M$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right) = 2ie^{\frac{4i\pi}{3}} - i$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right) = i\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = i$$

$$\Leftrightarrow \quad M \equiv \Omega$$

و بالتالي : Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(M) = M$

■ 3 أ

لدينا : $F(A) = B$

$$\Leftrightarrow \quad z_B - i = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z_A - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = 2\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(i - a) + i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_B = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3}i + i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_B = -\left(a + \sqrt{3}\right) + i\left(2 - a\sqrt{3}\right)}$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابتين $F(B) = C$ و $F(C) = D$

لنحصل على :

$$\boxed{z_C = 2(\sqrt{3} - a) + i(2a\sqrt{3} + 3)}$$

و $\boxed{z_D = 8a - 7i}$

■ ③ ب

لدينا : $\dfrac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{i - a}{8a - 7i - a} = \dfrac{-1}{7} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7}(z_D - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD}$$

و بالتالي : النقط A و Ω و D نقط مستقيمية .

■ ③ ج

لدينا : $\dfrac{4z_B + 2z_C + z_D}{7} = \dfrac{7i}{7} = z_\Omega$

نستنتج إذن أن : النقطة Ω هي مرجح النظمة المتزنة :

$\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

■ ③ د

ننطلق من كون D نقطة من المحور الحقيقي . و نضع : $a = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad z_D \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (8a - 7i) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (8y - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{7}{8}}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي. و معادلته : $y = \frac{7}{8}$

<u>التمرين الثاني : (4,0 ن)</u>

■ ① أ

$$1 - 3(x * y) = 1 - 3(x + y - 3xy)$$
$$= 1 - 3x - 3y + 9xy$$
$$= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x)$$
$$= (1 - 3x)(1 - 3y)$$

■ ① ب

لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad y \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3x) \neq 0 \quad \text{و} \quad (1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 3(x * y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x * y) \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x * y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

<u>التجميعية :</u> ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $x * (y * z) = x * (y + z - 3yz)$

$$= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz)$$
$$= \boxed{x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz}$$

و لدينا : $(x * y) * z = (x + y - 3xy) * z$

$$= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy)$$
$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

<u>التبادلية :</u> لدينا : $x * y = x + y - 3xy$

$$= y + x - 3yx$$
$$= y * x$$

إذن تبادلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

<u>العنصر المحايد :</u> ليكن e العنصر المحايد في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \; ; \; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x + e - 3xe = x$$

$$\Leftrightarrow \quad e(1 - 3x) = 0$$

بما أن $x \neq \frac{1}{3}$ فإن $(1 - 3x) \neq 0$

إذن : $e = 0$

مع : $e \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ لأن : $0 \neq \frac{1}{3}$

التماثل : ليكن x' مماثل x بالنسبة لـ $*$

$$\Leftrightarrow \quad x * x' = x' * x = e$$
$$\Leftrightarrow \quad x + x' - 3xx' = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x'(1-3x) = -x$$
$$\Leftrightarrow \quad x' = \frac{-x}{(1-3x)}$$

و لدينا : $1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad 1-3x \neq -3x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-3x} \neq \frac{-1}{3x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-3x} \neq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-3x} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

و منه : كل عنصر x من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-x}{1-3x}\right)$ في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ بالنسبة للقانون $*$.

خلاصة : $\boxed{\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right) \text{ زمرة تبادلية .}}$

■ 2 أ

لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & (\mathbb{R}^* ; \times) \\ x & \longrightarrow & 1-3x \end{array}}$$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $\varphi(x * y) = 1 - 3(x * y)$

و منه حسب السؤال 1 أ

$$\varphi(x * y) = (1-3x)(1-3y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ;*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^* ; \times)$

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^*$

المعادلة $\varphi(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا و هو : $x = \frac{1-y}{3}$

إذن φ تقابل من $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ;*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^* ; \times)$

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^* ; \times) & \xrightarrow{\quad \varphi^{-1} \quad} & \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right) \\ y & \longrightarrow & \dfrac{1-y}{3} \end{array}}$$

■ 2 ب

لدينا : $\varphi'(x) = -3 < 0$

إذن φ دالة تناقصية على $\mathbb{R}$

و منه : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \varphi^{-1}(]0;+\infty[)$

$$= \left] \lim_{y \to +\infty} \varphi^{-1}(y) \; ; \; \varphi^{-1}(0) \right[$$
$$= \left] \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{3}\right) \; ; \; \frac{1}{3} \right[$$
$$= \left] -\infty \; ; \; \frac{1}{3} \right[$$

■ 2 ج

لدينا : $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ جزء غير فارغ من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

يعني : $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

لدينا :

$$x * y' = x * \left(\frac{-y}{1-3y}\right)$$
$$= x - \frac{y}{1-3y} + \frac{3xy}{1-3y}$$
$$= \frac{x(1-3y) - y + 3xy}{1-3y}$$
$$= \frac{x-y}{1-3y}$$

و لدينا x و y عنصرين من $\left]-\infty \; ; \; \frac{1}{3}\right[$

إذن : $x < \frac{1}{3}$ و $y < \frac{1}{3}$

و منه : $3x < 1$ و $3y < 1$

إذن : $\underset{(1)}{\boxed{3x - 3y < 1 - 3y}}$ و $\underset{(2)}{\boxed{(1-3y) > 0}}$

نضرب طرفي المتفاوتة (1) في العدد الموجب : $\left(\frac{1}{1-3y}\right)$ نحصل على :

$$\frac{3x-3y}{1-3y} < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{1-3y} < \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{1-3y} \in \left]-\infty \; ; \; \frac{1}{3}\right[$$
$$\Leftrightarrow \quad x * y' \in \left]-\infty \; ; \; \frac{1}{3}\right[$$

و بالتالي : $\boxed{\left(\left]-\infty \; ; \; \frac{1}{3}\right[\; ; *\right) \text{ زمرة جزئية للزمرة } \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)}$

■ 3 أ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و n عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا : $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \varphi\left(\underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ مرة}}\right)$

$\Leftrightarrow\ \varphi\left(x^{(n)}\right) = \varphi(x)\times\varphi(x)\times\cdots\times\varphi(x)$

$\Leftrightarrow\ \varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$

■ 3 ب)

ننطلق من الكتابة : $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n$

$\Leftrightarrow\ 1-3x^{(n)} = (1-3x)^n$

$\Leftrightarrow\ \boxed{x^{(n)} = \dfrac{1-(1-3x)^n}{3}}$

■ 4 أ)

لدينا ⊺ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$

لأن : $\forall x,y \in \mathbb{R}\ ;\ x+y-\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

- ⊺ تبادلي في $\mathbb{R}$ لأن + تبادلي في $\mathbb{R}$.

و لدينا : $x \top (y \top z) = x \top \left(x+y-\frac{1}{3}\right)$

$= x + x + y - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}$

$= (x \top y) \top z$

- إذن ⊺ قانون تجميعي في $\mathbb{R}$

ليكن e العنصر المحايد لـ ⊺ في $\mathbb{R}$. $x \top e = e \top x = x$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x + e - \dfrac{1}{3} = x$

$\Leftrightarrow\ e = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و x' مماثله بالنسبة لـ ⊺

$\Leftrightarrow\ x \top x' = x' \top x = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\ x + x' - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\ x' = \left(\dfrac{2}{3} - x\right) \in \mathbb{R}$

- و بالتالي : $\boxed{(\mathbb{R},\top)\ \text{زمرة تبادلية.}}$

■ 4 ب)

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}$

لدينا : $x * (y \top z) = x * \left(y + z - \frac{1}{3}\right)$

$= \boxed{2x + y + z - 3(xy+xz) - \dfrac{1}{3}}$

و لدينا : $(x * y) \top (x * z) = (x + y - 3xy) \top (x + z - 3xz)$

$= \boxed{2x + y + z - 3(xy+xz) - \dfrac{1}{3}}$

نستنتج إذن أن : $x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$

إذن $\boxed{\text{القانون } * \text{ توزيعي على القانون } \top}$ (1)

و لدينا : $\boxed{(\mathbb{R},\top)\ \text{و}\ \left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)\ \text{زمرتان تبادليتان.}}$ (2)

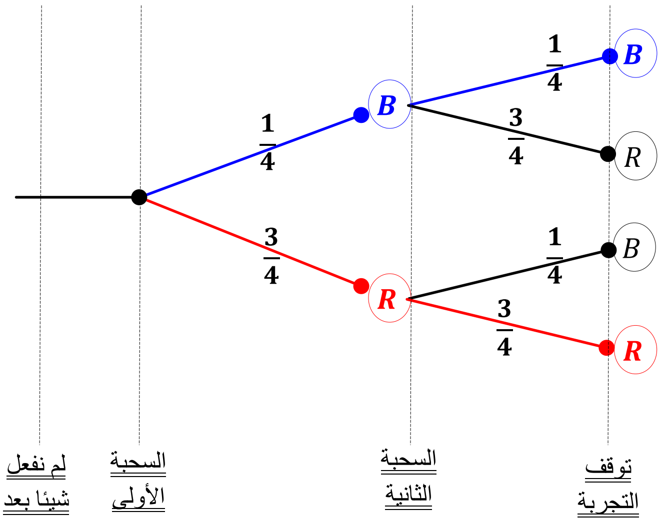
إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

■ 1)

$p[X=2]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :

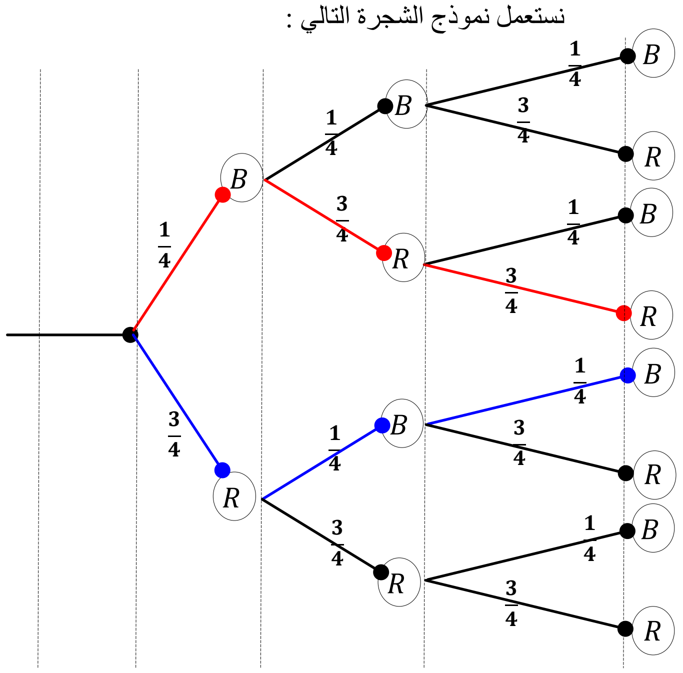


و منه احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p[X=2] = \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{5}{8}}$$

$p[X=3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :



إذن : $p[X=3]=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{16}}$

■ ② أ

$p[X=2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $2k$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{BR\ \ BR\ \cdots\cdots BR\ \ BR\ \ BR\ \ \mathbf{BB}}^{2k\ \text{كرة}}$$

1 2 . . . . k

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة بيضاء و $(k-1)$ كرة حمراء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{RB\ \ RB\ \cdots\cdots RB\ \ RB\ \ RB\ \ \mathbf{RR}}^{2k\ \text{كرة}}$$

1 2 . . . . k

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و $(k-1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $(2k)$ هو :

$$p[X=2k]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k]=\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}\times\left(\frac{5}{8}\right)$$

■ ② ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{RB\ \ RB\ \cdots\cdots RB\ \ RB\ \ R\mathbf{B}\ \ \mathbf{B}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

1 2 . . k

و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k+1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{BR\ \ BR\ \cdots\cdots BR\ \ BR\ \ B\mathbf{R}\ \ \mathbf{R}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

1 2 . . k

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k$ و $(2k+1)$ هو :

$$p[X=2k+1]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k+1]=\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p[X=2k+1]=\boxed{\left(\frac{3}{16}\right)^{k}}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I)(1)

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to1\\u=1+2x}}\left(\frac{2\ln u}{u-1}\right)$$

$$= 2\lim_{u\to1}\left(\frac{\ln u - \ln 1}{u-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 = \boxed{f(0)}$$

لأنه لدينا : $\boxed{(\forall x_0 > 0) \quad ; \quad \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}\right) = \frac{1}{x_0}}$

إذن f دالة متصلة في الصفر.

■ (I)(2)(أ)

$$h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a)a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)a^2 = 0$$

$$h_a(0) = -(\ln(1))a^2 = 0$$

و بما أن h_a دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0,a]$.

و $h_a(0) = h_a(a)$

فإنه حسب مبرهنة رول يوجد عنصر b من $]0,a[$ بحيث : $h_a'(b) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\ln(1+2a) - 2a)b = a^2\left(-2 + \frac{2}{1+2b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

■ (I)(2)(ب)

لدينا : $\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}\right)$

$$= \lim_{\substack{a\to0\\a=x}}\left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2}\right)$$

لدينا حسب السؤال (أ) يوجد b مرتبط بـ a بحيث : $a < b < 0$

و $\frac{ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر

و ذلك بسبب التأطير : $a < b < 0$

و بالتالي النهاية تصبح :

$$\lim_{a\to0}\left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2}\right) = \lim_{b\to0}\left(\frac{-2}{1+2b}\right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق في الصفر و $f'(0) = -2$

■ (I)(3)(أ)

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$.

و لدينا : $f'(x) = \left(\frac{\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \left(\frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}}$$

■ (I)(3)(ب)

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا كذلك $g'(x) = 2 - \left(2\ln(1+2x) + \frac{2(1+2x)}{(1+2x)}\right)$

$$= -2\ln(1+2x)$$

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

و لدينا : $\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

$$= -1 - \lim_{x\to\frac{-1}{2}^+}(1+2x)\,ln(1+2x)$$

$$= -1 - \lim_{\substack{u\to0^+\\u=1+2x}} u\,ln(u)$$

$$= -1 - 0$$

$$= \boxed{-1}$$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \left(\frac{1}{x} + 2\right)\ln(1+2x)\right)$$

$$= (+\infty)(-\infty)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي .

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوية

إذن : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ g(x) \leq 0$

و بالتالي : $\boxed{\forall\, x\, \epsilon\, I \setminus \{0\}\ ;\ g(x) < 0}$

■(I)③ج

لدينا : $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$

و هو ما نلخصه في الجدول التالي :

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	
$(1+2x)$	0	$+$	1	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

■(I)④أ

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{u\to 0^+\\ u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) = \frac{2(-\infty)}{(-1)} = +\infty$$

$\boxed{\text{إذن المستقيم ذو المعادلة } x = \frac{-1}{2} \text{ مقارب عمودي للمنحنى } (\mathscr{C})}$

لدينا كذلك : $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right)$$

$$= \lim_{u\to+\infty} 2\underbrace{\left(\frac{\ln u}{u}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} 0}\underbrace{\left(\frac{u}{u-1}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} 1} = 0$$

$\boxed{\text{إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى} (\mathscr{C}) \text{ بجوار } +\infty \text{ .}}$

■(I)④ب

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

إذن f متصلة و تناقصية قطعا على $[1;2]$ لأن : $[1;2] \subset \left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

و منه f تقابل من $[1;2]$ نحو صورته $[f(2);f(1)]$

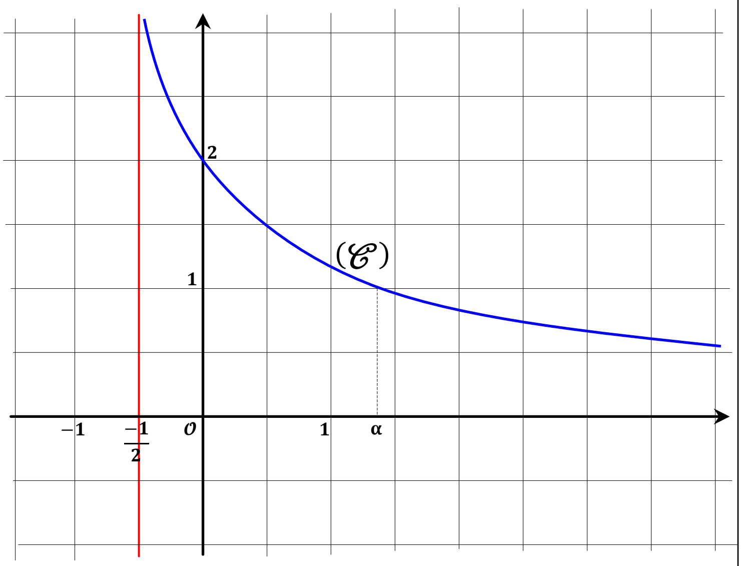
يعني f تقابل من $[1;2]$ نحو $[0{,}8\ ;\ 1{,}1]$

و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0{,}8\ ;\ 1{,}1]$

فإنه يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f من المجال $[1;2]$

أو بتعبير رياضياتي جميل : $\boxed{\exists!\ \alpha\ \epsilon\ [1;2]\ :\ f(\alpha) = 1}$

■(I)④ج



■(II)①أ

الدالة φ عبارة عن مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على I

إذن φ قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا : $$\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

لدينا من أجل : $x \geq 1$: $6 \leq 2+4x$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 2(1+2x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi'(x) \leq \frac{2}{3}}\ (1)$$

و لدينا كذلك : $x\epsilon I$ إذن : $x > \frac{-1}{2}$

و منه : $1+2x > 0$ إذن : $\frac{2}{1+2x} > 0$

يعني : $\boxed{\varphi'(x) > 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}}$$

■(II)①ب

لدينا حسب نتيجة السؤال■(I)④ب : $f(\alpha)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha$$
$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha)=\alpha$$

و لدينا : $\varphi'(x)=\frac{2}{1+2x}>0$ إذن : φ دالة تزايدية قطعا على I

و منه : $\varphi([1;\alpha])=[\varphi(1)\,;\,\varphi(\alpha)]=[\ln 3\,;\,\alpha]$

و لدينا : $[\ln 3\,;\,\alpha]\approx[1{,}1\,;\,\alpha]\subset[1;\alpha]$

إذن : $\boxed{\varphi(J)\subset J}$

■(II)②أ

باستعمال البرهان بالترجع

لدينا : من أجل $n=0$: $u_0=1\,\epsilon\,[1;\alpha]=J$

نفترض أنه : $(\forall n\geq 0)\,;\,u_n\,\epsilon\,J$

إذن : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,\varphi(J)$

و بما ان : $\varphi(J)\subset J$ فإن : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,J$

يعني : $\ln(1+2u_n)\,\epsilon\,J$ و منه : $u_{n+1}\,\epsilon\,J$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\geq 0)\,;\,u_n\,\epsilon\,J}$

■(II)②ب

لدينا الدالة φ قابلة للإستقاق على المجال I

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α .

إذن : يوجد c محصور بين u_n و α بحيث : $\boxed{\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}=\varphi'(c)}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|\varphi'(c)|$$
$$\Rightarrow |\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(c)||u_n-\alpha|$$

لدينا حسب السؤال : ■(II)①أ

$$\boxed{(\forall x\geq 1)\,;\,0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}}$$

و بما أن : $u_n\geq 1$ (لأن : $u_n\,\epsilon\,J$)

فإن : $c>u_n\geq 1$ يعني : $c\geq 1$

و منه : $0<\varphi'(c)\leq\frac{2}{3}$

يعني : $|\varphi'(c)|\leq\frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n-\alpha|$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow |\varphi'(c)||u_n-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$$
$$\Leftrightarrow |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$$

و من أجل $(n-1)$ نجد :

$$\Leftrightarrow |u_n-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_{n-1}-\alpha|$$
$$\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-2}-\alpha|$$
$$\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-3}-\alpha|$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|$$

إذن : $\boxed{|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|}$ (3)

من جهة أخرى لدينا : $\alpha>0$ يعني : $-\alpha<0$

أي : $1-\alpha<1$ و منه : $|1-\alpha|<1$

أي : $|u_0-\alpha|<1$

و منه : $\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n\geq 0)\,;\,|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

■(II)②ب

بما أن : $(\forall n\geq 0)\,;\,|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

و $\lim_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(لأنها متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1)

إذن : $\lim_{n\infty}|u_n-\alpha|=0$

أي : $\boxed{\lim_{n\infty}u_n=\alpha}$

■(III)①(أ)

لدينا حسب الأسئلة السابقة : f دالة متصلة على I .

إذن f متصلة على أي مجال على شكل $[0,x]$ بحيث : $x \in I$

و منه f تقبل دالة أصلية F بحيث : $F'(x) = f(x)$

و منه : F قابلة للإشتقاق على المجال I .

■(III)①(ب)

نعلم أن : $(\forall x \in I) \; ; \; f(x) > 0$

إذن : $(\forall x \in I) \; ; \; F'(x) > 0$

و منه F دالة تزايدية قطعا على I

■(III)②(أ)

لدينا : $$\boxed{(\forall\, t \geq 1) \; ; \; \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1}} \quad (*)$$

و لدينا : $(\forall t \geq 1) \; ; \; 2t+1 \geq 3 > 1$

إذن : $(\forall t \geq 1) \; ; \; \ln(2t+1) > 0$

نضرب طرفي المتفاوتة $(*)$ في العدد الموجب $\ln(2t+1)$ نحصل على :

$$\frac{\ln(2t+1)}{t} > \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t}\right) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x f(t)\, dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) - \int_1^x f(x)\, dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt} \quad (\star)$$

لدينا f متصلة على $[0;1]$

إذن التكامل : $\int_1^x f(x)\, dt$ يُعَبِّرُ عن قياس لمساحة موجبة

أي : $\int_1^x f(x)\, dt \geq 0$ و منه : $-\int_1^x f(x)\, dt \leq 0$

يعني : $$\boxed{F(x) - \int_1^x f(x)\, dt \leq F(x)} \quad (\star\star)$$

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x \geq 1) \; ; \; F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

■(III)②(ب)

لاحظ أن : $$[(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4\ln(1+2t)}{(1+2t)}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}[(\ln(1+2t))^2]_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)$$

و بما أن : $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)\right) = +\infty$$

فإنه بالضرورة لدينا : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

و ذلك بسبب المتفاوتة التالية :

$$\boxed{(\forall x \geq 1) \; ; \; F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

■(III)③(أ)

نعتبر المجال $\left[\frac{-1}{2} ; x\right]$ بحيث : $x \in I$

لدينا : $\tilde{F}$ دالة معرفة و متصلة على المجال $\left[\frac{-1}{2} ; x\right]$

لأن : F متصلة على I و F متصلة على اليمين في $\frac{-1}{2}$ حسب الإفتراض

و لدينا كذلك $\tilde{F}$ قابلة للإشتقاق على $\left]\frac{-1}{2} ; x\right[$ لأن : F قابلة للإشتقاق على I

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \left]\frac{-1}{2} ; x\right[\; ; \; \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \left]\frac{-1}{2} ; x\right[\; ; \; \frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} = f(c)$$

$$\boxed{\exists\, c \in \left]\frac{-1}{2} ; x\right[\; ; \; (F(x) - \ell) = f(c)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (\#)$$

و لدينا من جهة أخرى : $c \in \left]\frac{-1}{2} ; x\right[$ يعني : $x > c$

و منه : $f(x) < f(c)$ لأن f تناقصية .

إذن : $\left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) < \left(x + \frac{1}{2}\right) f(c)$

و منه باستعمال النتيجة $(\#)$ نحصل على :

$$\boxed{(F(x) - \ell) \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (\circledast)$$

■(III)③(ب)

المتفاوتة $(\circledast)$ تصبح : $$\left(\frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}}\right) \geq f(x)$$

و نعلم أن : $\lim_{x \to \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$

و بالتالي : F غير قابلة للإشتقاق على اليمين في : $\frac{-1}{2}$

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2009	**مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات**

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات $M(x,y)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

0,25 ن — ① (أ) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 ن — (ب) بين أن $(\mathcal{F},\times)$ زمرة غير تبادلية .

1,00 ن — ② لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من $\mathcal{F}$ حيث $x\epsilon\mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{F},\times)$.

0,50 ن — ③ ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\epsilon E)\ ;\ (\forall(a,b)\epsilon E)\ :\ (x,y)\perp(a,b)=\left(ax\,,bx+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi\ :\ &(\mathcal{F},\times)\to(E,\perp)\\ &M(x,y)\to\varphi\big(M(x,y)\big)=(x,y)\end{aligned}$$

0,25 ن — (أ) أحسب : $(1,1)\perp(2,3)$ و $(2,3)\perp(1,1)$.

0,50 ن — (ب) بين أن φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن — (ج) استنتج بنية $(E,\perp)$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1 .

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z . $(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$

0,25 ن — ① (أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$.

0,25 ن — (ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

0,50 ن ③ حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1

1,00 ن ② نضع $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.

(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي : m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.

0,50 ن ① حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية.

0,50 ن ② ⓐ بين أن التحويل $\mathcal{R}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$
هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.

0,50 ن ⓑ بين أن العدد العقدي : $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\mathfrak{Re}(m) + \mathfrak{Im}(m) = 1$

($\mathfrak{Re}(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\mathfrak{Im}(m)$ هو جزءه التخيلي)

0,50 ن ⓒ استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $\boxed{a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1}$.

0,25 ن ① ⓐ تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$.

0,50 ن ⓑ حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$.

② ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.

0,75 ن ⓐ بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,75 ن ⓑ بين أن p يقسم a_{p-2} .

0,50 ن ⓒ بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.

($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)

التمرين الرابع : (10 ن)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي .

$$\boxed{f_n(0) = 0 \quad \text{و} \quad (\forall x > 0)\ ;\ f_n(x) = x(1 - \ln x)^n}$$

(I) ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ن ① ⓐ بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$).

0,25 ن ⓑ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 .

1,00 ن ⓒ حدد النهايات التالية : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x)}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_2(x)}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}}$

② (أ) أدرس تغيرات الدالة f_1 .	0,50 ن
(ب) أدرس تغيرات الدالة f_2 .	0,50 ن
③ (أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$.	0,25 ن
(ب) أنشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_2)$) نأخذ : $\Vert\vec{i}\Vert = \Vert\vec{j}\Vert = 2cm$	0,50 ن
(II) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $\boxed{F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt}$	
① (أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$. وأن : $(\forall x < 0)\ ;\ F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$	0,50 ن
(ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال : $]-\infty, 0]$	0,25 ن
② (أ) بين أن : $\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \leq F(x) \leq \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt\ ;\ (\forall x < 0)$	0,25 ن
(ب) تحقق أن الدالة : $x \to x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$.	0,25 ن
(ج) بين أن : $\lim_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt = \frac{3}{4}$	0,25 ن
③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$	0,25 ن
(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $\boxed{u_n = \int_1^e f_n(x)dx}$	
① (أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_n \geq 0$.	0,50 ن
(ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$.	0,50 ن
(ج) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} \leq u_n$.	0,25 ن
(د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .	0,25 ن
② (أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$	0,50 ن
(ب) استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$.	0,50 ن
③ (أ) بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)}$	0,75 ن
(ب) حدد : $\lim_{x\to+\infty} u_n$ و $\lim_{x\to+\infty} nu_n$	0,50 ن
④ a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = \mathrm{a}$ و $v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}v_n\ ;\ (\forall n \geq 1)$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n = \lvert v_n - u_n\rvert$.	
(أ) بين أن : $(\forall n \geq 1)\ ;\ d_n = \frac{n!}{2^{(n-1)}}d_1$	0,25 ن
(ب) بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$	0,25 ن
(ج) بين أن : $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$	0,25 ن
(د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متباعدة.	0,25 ن

التمرين الأول : (4,5 ن)

■ ①أ

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ مصفوفتين من F

لدينا :
$$M(x,y)\times M(a,b)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa & xb+\frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa}\end{pmatrix}=M\left(xa\,;\,xb+\frac{y}{a}\right)$$

إذن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ ①ب

لدينا F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في F

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاثة عناصر من F

لدينا :
$$\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f)=M\left(ac\,,ad+\frac{b}{c}\right)\times M(e,f)=M\left(eac\,,acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$$

و لدينا كذلك :
$$M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)=M(a\,,b)\times M\left(ce,cf+\frac{d}{e}\right)=M\left(eac\,,acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$$

و بالتالي :
$$\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f)=M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)$$

يعني $\boxed{\times \text{ قانون تجميعي في } F .}$

ليكن $M(e_1;e_2)$ العنصر المحايد للضرب في F

$$\Leftrightarrow\quad \forall M(a,b)\in F\ ;\quad M(a,b)\times M(e_1;e_2)=M(e_1;e_2)\times M(a,b)=M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\quad M\left(ae_1\,;ae_2+\frac{b}{e_1}\right)=M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} ae_1=a \\ ae_2+\dfrac{b}{e_1}=b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} e_1=1\in\mathbb{R}^* \\ e_2=0\in\mathbb{R}\end{cases}$$

إذن $M(1,0)=I$ هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في F .

لتكن المصفوفة $M(x',y')$ مماثلة المصفوفة $M(x,y)$ بالنسب لـ$\times$ في F .

$$\Leftrightarrow\quad M(x,y)\times M(x',y')=M(x',y')\times M(x,y)=I$$

$$\Leftrightarrow\quad M\left(xx',xy'+\frac{y}{x'}\right)=M(1,0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x'=\dfrac{1}{x}\in\mathbb{R}^* \\ y'=-y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

إذن كل مصفوفة $M(x,y)$ تمتلك مصفوفة مماثلة $M\left(\frac{1}{x};-y\right)$ بالنسبة للضرب في F .

لدينا $\times$ ليس تبادليا لأن :

$$\begin{cases} M(x,y)\times M(y,x)=M(xy\,,x^2+1) \\ M(y,x)\times M(x,y)=M(xy,y^2+1)\end{cases}$$ و

نلاحظ إذن أن : $(\forall x\neq y\neq\pm1)\ ;\ \ x^2+1\neq y^2+1$

خلاصة : $\boxed{(F,\times) \text{ زمرة غير تبادلية.}}$

■ ②

لدينا G جزء غير فارغ من F لأنها تضم العنصر $M(1,0)$ على الأقل

لتكن $M(a,0)$ و $M(b,0)$ مصفوفتين من G

لدينا :
$$M(b,0)\times\big(M(a,0)\big)'=M(b,0)\times M\left(\frac{1}{a},0\right)=M\left(\frac{b}{a}\ ;\ 0\right)$$

لدينا $a\neq 0$ إذن $\frac{b}{a}\neq 0$ و منه : $M\left(\frac{b}{a},0\right)\in G$

و بالتالي : $(G,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

■ ③أ

$$(1,1)\perp(2,3)=\left(2\ ;\ 3+\frac{1}{2}\right)=\left(2\,;\,\frac{7}{2}\right)$$

$$(2,3)\perp(1,1)=\left(2\ ;\ 2+\frac{3}{1}\right)=(2\,,5)$$

■ ③ب

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من F

لدينا :
$$\varphi\big(M(c,d)\times M(a,b)\big)=\varphi\left(M\left(ac\,;bc+\frac{d}{a}\right)\right)=\left(ac\,;bc+\frac{d}{a}\right)=(c,d)\perp(a,b)=\varphi\big(M(c,d)\big)\perp\varphi\big(M(a,b)\big)$$

إذن φ تشاكل من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.

ليكن (a,b) عنصرا من E .

نريد حل المعادلة ذات المجهول $M(x,y)$ التالية : $\varphi\big(M(x,y)\big)=(a,b)$

$$\Leftrightarrow\quad (x,y)=(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا و هو $M(a,b)$

و منه : $\forall (a,b)\epsilon E\ , \exists!\, M(x,y)\epsilon F\ ;\ \varphi\big(M(x,y)\big) = (a,b)$

و بالتالي : $\boxed{\varphi \text{ تقابل من } (F,\times) \text{ نحو } (E,\perp)}$

خلاصة : $\boxed{\varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (F,\times) \text{ نحو } (E,\perp)}$.

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

بما أن : $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $M(1,0)$

و كل مصفوفة $M(x,y)$ تقبل مماثلة $M\left(\frac{1}{x},-y\right)$ بالنسبة لـ $\times$ في F .

فإن : $(E,\perp)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $\varphi\big(M(1,0)\big)$

و كل زوج (x,y) يقبل مماثلا $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x},-y\right)\right)$.

و لدينا : $\begin{cases} \varphi\big(M(1,0)\big) = (1,0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x},-y\right)\right) = \left(\frac{1}{x},-y\right) \end{cases}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ (I) (1) (أ)

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-i)^2(m+1)^2 + 4i(m^2+1) \\ &= -2i(m^2+2m+1) + 4im^2 + 4i \\ &= 2im^2 - 4im + 2i \\ &= 2i(m^2-2m+1) \\ &= \boxed{(1+i)^2(m-1)^2} \end{aligned}$$

■ (I) (1) (ب)

$$z_1 = (1-im) \quad \text{و} \quad z_2 = (m-i)$$

■ (I) (1) (ج)

نضع : $m = re^{i\theta}$ و ننطلق من : $z_1z_2 = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (1-im)(m-i) = 1 \\ &\Leftrightarrow m - i - m^2 i - m = 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 = -1 + i \\ &\Leftrightarrow r^2e^{2i\theta} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &\Leftrightarrow r^2e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi \ ;\ k\,\epsilon\,\{0,1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{11\pi}{8} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2}\left(-\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \end{cases}$$

■ (I) (2)

في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المثلثية .

نضع : $z_1 = re^{i\varphi}$

لدينا :
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - im \\ &= 1 - ie^{i\theta} \\ &= 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (1+\sin\theta) - i\cos\theta \end{aligned}$$

إذن هدفنا هو ايجاد المجهولين r و φ بدلالة θ بحيث :

$$(1+\sin\theta) - i\cos\theta = r\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\varphi = 1 + \sin\theta \\ r\sin\varphi = -\cos\theta \end{cases}$$

لدينا : $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

إذن : $(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = r^2$

و منه :
$$\begin{aligned} r^2 = 2(1+\sin\theta) &= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\theta\right) \\ &= 2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{r = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة نحصل على :

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{-\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)[k\pi]}$

و بالتالي : $\boxed{z_1 = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

بنفس الطريقة نضع : $z_2 = re^{i\varphi}$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بدلالة θ بحيث :

$$r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta = r\cos\varphi \\ \sin\theta - 1 = r\sin\varphi\end{cases}$$

لدينا : $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

إذن : $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta - 1)^2 = r^2$

و منه : $r^2 = 2(1-\sin\theta)$

أي : $r^2 = 2(1+\sin(-\theta))$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1+\sin\theta) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $2(1+\sin(-\theta)) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

يعني : $r^2 = 4\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

و منه : $\boxed{r = 2\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

ملاحظة : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ r لأن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا موجبا.

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظمة نحصل على :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-2\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{2\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{2\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)[k\pi]}$

و بالتالي : $\boxed{z_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

■ (II) 1

M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية .

$$\Leftrightarrow \quad M \in (M_1M_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad i + m - im \in \mathbb{R}$$

نضع : $m = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y) + i(y-x+1) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = x - 1}$$

إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيما معادلته $y = x - 1$.

■ (II) 2 أ

ننطلق من $z' = 1 - iz$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل : $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$

بحيث ω عدد عقدي .

لدينا : $\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta} + \omega = 1\end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$

و منه : $z' = e^{\frac{-\pi i}{2}}\left(z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

■(II)②ب

نضع : $\Im m(m) = y$ و $\Re e(m) = x$ و $m = x + iy$

$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف . $\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)} = -\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{m} + i - 1 - i\overline{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i}$$

$$\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Re e(m) + \Im m(m) = 1}$$

■(II)②ج

ننطلق من كون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \equiv arg\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}\right)[\pi]$$

و لدينا : $\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}\right) = \frac{-i\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m\right)} = -i$

إذن : $\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}$ عدد تخيلي صرف.

و منه : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ عدد تخيلي صرف كذلك.

$$\Leftrightarrow \Re e(m) + \Im m(m) = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1$$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

تُشَكِّلُ المستقيم (Δ) الذي معادلته : $(\Delta) : y = -x + 1$

<u>التمرين الثالث : (3,3 ن)</u>

■①أ

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

$= (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$

لدينا : $2 \equiv 0[2]$ و $3 \equiv 1[2]$

إذن : $2^n \equiv 0[2]$ و $3^n \equiv 1[2]$

و منه : $\begin{cases} 2^n - 1 \equiv 1[2] \\ 2^n + 1 \equiv 1[2] \end{cases}$ (1) (2) و $\boxed{3^n \equiv 1[2]}$ (3)

من (3) و (2) نحصل على : $\boxed{3^n(1 + 2^n) \equiv 1[2]}$ (4)

و من (1) و (4) نحصل على : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 2[2]$

يعني : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 0[2]$ لأن : $2 \equiv 0[2]$

و منه : $\boxed{a_n \equiv 0[2]}$

و بالتالي : a_n عدد زوجي كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي n .

■①ب

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1$

يعني : $a_n = 2^n(3^n + 1) + (3^n - 1)$

نعلم أن : $3 \equiv 0[3]$ إذن : $3^n \equiv 0[3]$

و منه : $\boxed{(3^n - 1) \equiv -1[3]}$ (5) و $\boxed{(3^n + 1) \equiv 1[3]}$ (6)

من (5) و (6) نحصل على : $2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1[3]$

يعني : $\boxed{a_n \equiv (2^n - 1)[3]}$ (7)

و لدينا في الأخير : $2 \equiv -1[3]$ إذن : $2^n \equiv (-1)^n[3]$

أي : $\boxed{(2^n - 1) \equiv ((-1)^n - 1)[3]}$ (8)

من المتوافقتين (7) و (8) نستنتج أن : $a_n \equiv (-1)^n - 1[3]$

من أجل n عدد زوجي نحصل على : $(-1)^{2k} - 1 = 0$

أي : $\boxed{a_n \equiv 0[3]}$

من أجل : n عدد فردي نحصل على : $(-1)^{2k+1} - 1 = -2$

و منه : $\boxed{a_n \equiv -2[3]}$

■(II)②أ

بتطبيق مبرهنة $(Fermat)$ مرتين نحصل على :

$\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p \wedge 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2^{p-1} \equiv 1[p]}$ (1)

و

$\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{3^{p-1} \equiv 1[p]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$3^{p-1} \cdot 2^{p-1} \equiv 1[p]$$

يعني : $\boxed{6^{p-1} \equiv 1[p]}$

■(II)②ب

لدينا : $2^{p-1}\equiv 1[p]$ إذن : $\boxed{3\cdot 2^{p-1}\equiv 3[p]}$ (1)

و لدينا : $3^{p-1}\equiv 1[p]$ إذن : $\boxed{2\cdot 3^{p-1}\equiv 2[p]}$ (2)

و لدينا : $6^{p-1}\equiv 1[p]$ إذن : $\boxed{6\cdot 6^{p-2}\equiv 1[p]}$ (3)

و لدينا : $\boxed{-6\equiv -6[p]}$ (4)

نجمع المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$$3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6\cdot 6^{p-2}-6\equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\cdot 2^{p-2}+6\cdot 3^{p-2}+6\cdot 6^{p-2}-6\equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(2^{p-1}+3^{p-1}+6^{p-2}-1)\equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(a_{p-2})\equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p\ /\ 6(a_{p-2})} \ (5)$$

نُفَكك العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد : $6=2^1\times 3^1$

و لدينا p عدد أولي أكبر من 3 إذن : $\boxed{6\wedge p=1}$ (6)

من (5) و (6) نستنتج حسب $(Gauss)$: $\boxed{p\ /\ a_{p-2}}$

■(II)②ج

ليكن q عددا أوليا .

نفصل في هذا السؤال بين ثلاث حالات للعدد q :

<u>الحالة الأولى : إذا كان $q=2$</u>

فإنه حسب نتيجة السؤال①أ : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ 2\ /\ a_n$

إذن : $\boxed{(\exists n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ a_n\wedge q=q}$

<u>الحالة الثانية : إذا كان $q=3$</u>

فإنه حسب نتيجة السؤال①ب : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ 3\ /\ a_n}$

إذن : $\boxed{(\exists n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ a_n\wedge q=q}$

<u>الحالة الثالثة : إذا كان $q>3$</u>

رأينا في السؤال②ب أن : $(\forall q>3)\ ;\ q\ /\ a_{q-2}$

إذن : $\boxed{(\exists n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ a_n\wedge q=q}$

<u>خلاصة :</u> نستنتج من هذه الحالات الثلاث أن :

$$\boxed{(\forall q\epsilon\mathbb{P}),(\exists n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ a_n\wedge q=q}$$

<u>التمرين الرابع : (10 ن)</u>

<u>الجزء الأول</u>

■①أ

نضع : $x=t^n$ إذن : $\ln x=n\ln t$

و منه : $t=e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x)=\lim_{x\to 0^+} x(1-\ln x)^n$$
$$=\lim_{t\to 0^+} t^n(1-n\ln t)^n$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\Big(\underbrace{t}_{\to 0}-\underbrace{nt\ln t}_{\to 0}\Big)^n=0=f_n(0)$$

إذن f_n دالة متصلة على يمين الصفر.

■①ب

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}(1-\ln x)^n=+\infty\ \notin\ \mathbb{R}$$

إذن f_n غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

■①ج

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{f_2(x)}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}(1-\ln x)^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x)=\lim_{x\to +\infty} x(1-\ln x)^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{f_1(x)}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}(1-\ln x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_1(x)=\lim_{x\to +\infty} x(1-\ln x)=-\infty$$

■②أ

لدينا : $f_1(x)=x(1-\ln x)$

إذن :

$$f_1'(x)=(x-xln\,x)'$$
$$=1-(\ln x+1)$$
$$=-\ln x$$

و منه : f_1' تنعدم في العدد 1

إذا كان : $x>1$ فإن : $f_1'(x)<0$

إذا كان : $x<1$ فإن : $f_1'(x)>0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_1 كما يلي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
f_1	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

■ ②ب

$$f_2'(x)=\left(x(1-\ln x)^2\right)'$$
$$=(1-\ln x)^2-\frac{2x}{x}(1-\ln x)$$
$$=(1-\ln x)^2-2(1-\ln x)$$
$$=(1-\ln x)(1-\ln x-2)$$
$$=(1-\ln x)(-1-\ln x)$$

نلاحظ أن : f_2' تنعدم في $\frac{1}{e}$ و e .

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$-1-\ln x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

■ ③أ

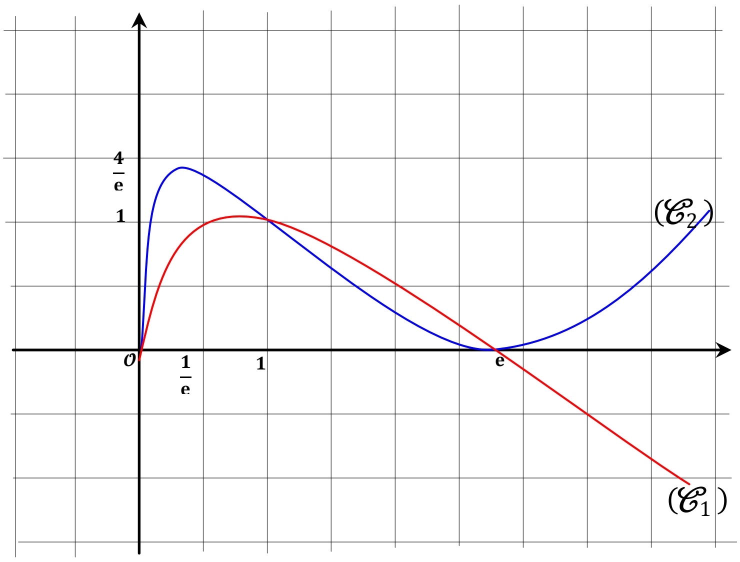
لدينا : $f_1(x)-f_2(x)$
$$=x(1-\ln x)-x(1-\ln x)^2$$
$$=x(1-\ln x)(\ln x)$$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\ln x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(1-\ln x)\ln x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن $(\mathscr{C}_1)$ يوجد فوق $(\mathscr{C}_2)$ على المجال $[1;e]$.

و $(\mathscr{C}_1)$ يوجد أسفل $(\mathscr{C}_2)$ على المجالين $[e;+\infty[$ و $]0;1]$.

■ ③ب



الجزء الثاني

■ ①أ

لدينا الدالة $x \to \frac{f_1(x)}{1+x^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ بحيث :

$$\psi'(x)=\frac{f_1(x)}{(1+x^2)} \quad \text{و} \quad F(x)=\psi(1)-\psi(e^x)$$

إذن : F قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$.

و لدينا : $F'(x)=\left(\psi(1)\right)'-\left(\psi(e^x)\right)'$
$$=0-e^x\psi'(e^x)$$
$$=\frac{-e^x f_1(e^x)}{1+e^{2x}}$$
$$=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

■ ①ب

لدينا : $(\forall x<0)\ ;\ F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

و بما أن : $\boxed{(\forall x\leq 0)\ ;\ \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}>0}$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$

و لدينا : $x\leq 0 \Rightarrow x<1$

و منه : $x-1<0$

و بالتالي : $F'(x)<0$.

يعني : F دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty;0]$.

الجزء الثالث

■ ① أ

ليكن $1 \leq x \leq e$ و $n \geq 1$

إذن : $0 \leq \ln x \leq 1$ و منه : $(1-\ln x) \geq 0$

أي : $x(1-\ln x)^n \geq 0$ و بالتالي : $\int_1^e f_n(x)dx \geq 0$

أي : $u_n \geq 0$

■ ① ب

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$= x(1-\ln x)^{n+1} - x(1-\ln x)^n$$

$$= x(1-\ln x)^n(-\ln x)$$

و بما أن : $1 \leq x \leq e$ فإن : $(1-\ln x) \geq 0$ و $-\ln x \leq 0$

و منه : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ أي : $\boxed{f_{n+1}(x) \leq f_n(x)}$

■ ① ج

بما أن : $\forall\, x \in [1,e]\ ;\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

فإن : $\int_1^e f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_1^e f_n(x)\,dx$

و منه : $u_{n+1} \leq u_n$

■ ① د

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$ إذن : $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية .

و لدينا : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_n \geq 0$ إذن : $(u_n)_{n\geq1}$ مصغورة بـ 0

و بالتالي : $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية متقاربة.

■ ② أ

لدينا : $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x)\,dx = \int_1^e \underbrace{x}_{u'}\underbrace{(1-\ln x)^{n+1}}_{v}\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x^2\left(\frac{-1}{x}\right)(1-\ln x)^n\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x(1-\ln x)^n\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n}$

■ ② أ

ليكن $t \in [e^x;1]$ بحيث : $x < 0$

يعني : $e^x < t < 1$

و منه : $1 + e^{2x} < 1 + t^2 < 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f_1(t) < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt < \int_{e^x}^1\left(\frac{f_1(t)}{1+t^2}\right)dt < \int_{e^x}^1\left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt} \quad (*)$$

■ ② ب

لدينا : $\left(x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right)' = 2x\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right) + x^2\left(\frac{-1}{2x}\right)$

$$= \frac{3x}{2} - x\ln x - \frac{x}{2}$$

$$= x(1-\ln x)^1$$

$$= f_1(x)$$

إذن الدالة $x \to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ دالة أصلية للدالة f_1 على $]0;+\infty[$.

■ ② ج

لدينا : $\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt = \left[x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right]_{e^x}^1$

$$= \frac{3}{4} - e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2}$$

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^+ = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0^- = 0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{3e^{2x}}{4}+\frac{xe^{2x}}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{4}}$

■ ③

نعود إلى التأطير $(*)$.

لدينا : $\frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt\right) < \lim_{x\to-\infty} F(x) < \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{8} < l < \frac{3}{4}}$$

■ ②ب

الحيز $\mathcal{S}$ الذي طلب منا حساب مساحته مُعَرف بما يلي :

$$\mathcal{S}=\left|\int_1^e \big(f_2(x)-f_1(x)\big)\,dx\right| = \left|\int_1^e f_2(x)dx-\int_1^e f_1(x)\,dx\right| = |u_1-u_2|$$

و لدينا : $\boxed{u_{n+1}=\frac{-1}{2}+\frac{(n+1)}{2}u_n}$

إذن : $u_0=\int_1^e x\,dx=\boxed{\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}}$

$$u_1=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$u_2=\frac{-1}{2}+\frac{e^2}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{e^2}{4}-\frac{5}{4}}$$

و بالتالي :

$$\mathcal{S}=|u_1-u_2|=\left(\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}(unit\acute{e})^2$$

$unit\acute{e}$ هي وحدة المعلم و بما أن : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2cm$

فإن : $unit\acute{e}=2cm$

و منه : $(unit\acute{e})^2=4cm^2$

و بالتالي : $\mathcal{S}=\frac{1}{2}(unit\acute{e})^2=\boxed{2\ cm^2}$

■ ③أ

لدينا حسب ما سبق : $0\leq u_{n+1}$

إذن : $0\leq\frac{-1}{2}+\frac{(n+1)}{2}u_n$

و منه : $\frac{1}{2}\leq\frac{(n+1)}{2}u_n$

أي : $\boxed{\frac{1}{(n+1)}\leq u_n}$ (1)

و لدينا كذلك : $u_{n+1}\leq u_n$

إذن : $\frac{-1}{2}+\frac{(n+1)}{2}u_n\leq u_n$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{-1}{2}+\frac{nu_n}{2}+\frac{u_n}{2}\leq u_n$$

$$\Leftrightarrow\quad u_n\left(\frac{n+1-2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad u_n\left(\frac{n-1}{2}\right)\leq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(\forall n\geq 2)\quad u_n\leq\frac{1}{n-1}}\ (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(3)\quad \boxed{(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1}}$$

■ ③ب

لدينا حسب التأطير (3) :

$$(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad (\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{n}{n+1}\leq nu_n\leq\frac{n}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\leq nu_n\leq\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}\ (4)$$

لدينا : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n-1}\right)=0$

إذن حسب التأطير (3) نستنتج : $\boxed{\lim_{n\infty}u_n=0}$

و لدينا : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{n}}\right)=1$

إذن حسب التأطير (4) : $\boxed{\lim_{n\infty}nu_n=1}$

■ ④أ

ليكن $n\geq 1$

في البداية لدينا :

$$d_n=|v_n-u_n| = \left|\frac{-1}{2}+\frac{n}{2}v_{n-1}+\frac{1}{2}-\frac{n}{2}u_{n-1}\right| = \frac{n}{2}|v_{n-1}+u_{n-1}|$$

إذن :

$$|v_n-u_n|=\frac{n}{2}|v_{n-1}-u_{n-1}|$$

$$=\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)|v_{n-2}-u_{n-2}|$$

$$=\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)|v_{n-3}-u_{n-3}|$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$=\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{2}{2}\right)|v_1-u_1|$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\geq 1)\ ;\ d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1}$

■ ④ب

لنبرهن على أن : $(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{n!}{2}\geq 3^{n-2}$

بالترجع لدينا من أجل $n=2$: $\frac{2!}{2}\geq 3^0$

نفترض أن : $(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{n!}{2}\geq 3^{n-2}$

لدينا : $\frac{(n+1)!}{2}=(n+1)\frac{n!}{2}\geq(n+1)3^{n-2}$

بما أن : $n\geq 2$ فإن : $(n+1)\geq 3$

و منه : $(n+1)3^{n-2}\geq 3\cdot 3^{n-2}$ يعني : $(n+1)3^{n-2}\geq 3^{n-1}$

إذن : $\dfrac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2}$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}}$

■ 4 ج

ننطلق من العلاقة : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

$$\Leftrightarrow \quad n! \geq 3^{n-2} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{2^{n-1}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1}$$

بما أن : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ متتالية هندسية أساسها العدد الموجب $\frac{3}{2}$ و الأكبر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} d_n = +\infty}$

■ 4 د

لدينا : $d_n = |v_n - u_n|$

نفترض أن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية متقاربة .

و نعلم أن المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ متقاربة .

إذن : $(d_n)_{n\geq2}$ متقاربة

لكن حسب السؤال 4 ج : $\boxed{d_n \to +\infty}$

و بالتالي من هذا التناقض نستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متباعدة.

■ و الحمد لله رب العالمين ■

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2009

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

لتكن $\mathcal{V}$ مجموعة المصفوفات : $\mathcal{M}_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2$.

0,75 ن ① بين أن : $\mathcal{V}$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و حدد أساسا له.

0,25 ن ② أ) بين أن : $\mathcal{V}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 ن ب) بين أن $(\mathcal{V},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية .

0,25 ن ③ أ) أحسب : $\mathcal{M}_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)}\times\mathcal{M}_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

0,25 ن ب) هل الحلقة $(\mathcal{V},+,\times)$ جسم ؟

④ لتكن X مصفوفة من $\mathcal{V}$ حيث : $X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2$.

0,50 ن أ) بين أن : $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=\mathcal{O}$ حيث $\mathcal{O}$ هي المصفوفة المنعدمة $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

0,50 ن ب) نفترض أن : $a^2-4b^2\neq0$. بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في $\mathcal{V}$ ينبغي تحديده .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

ليكن u عددا عقديا يخالف $(1-i)$.

0,25 ن ① أ) أنشر $(iu-1-i)^2$.

0,75 ن ب) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$

0,50 ن ② المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر .

نعتبر النقط : $A\big((1+i)u-2i\big)$ و $B\big((1-i)u+2\big)$ و $\mathcal{U}(u)$ و $\Omega(2-2i)$

0,25 ن أ) حدد لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة $\mathcal{U}$ إلى النقطة I .

0,50 ن ب) ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{-\pi}{2}$. بين أن : $\mathcal{R}(A)=B$.

ج) استنتج أن (ΩI) و (AB) متعامدان .	0,25 ن
د) انطلاقا من النقطة $\mathcal{U}$ وضح طريقة لإنشاء النقطتين A و B .	0,50 ن
(3) نضع : $u = a(1+i) - 2i$ حيث : $(a\epsilon\mathbb{R})$.	
أ) حدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A\mathcal{U}}$ بدلالة a .	0,50 ن
ب) استنتج أن النقط A و B و $\mathcal{U}$ نقط مستقيمية.	0,50 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .

الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و $(n-1)$ كرة سوداء .

الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء .

الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء .

نعتبر التجربة العشوائية التالية : نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق ثم نسحب تآنيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار

ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(1) حدد قيم المتغير العشوائي X .	0,50 ن
(2) أ) بين أن احتمال الحدث $[X=2]$ يساوي : $\dfrac{8}{3n(n-1)}$	0,75 ن
ب) بين أن احتمال الحدث $[X=1]$ يساوي : $\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	0,75 ن
ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X .	0,50 ن
(3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 ؟	0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $\boxed{g(x) = 2(1-e^{-x}) - x}$.

(1) أ) أدرس تغيرات الدالة g .	0,50 ن
ب) ضع جدول تغيرات الدالة g .	0,50 ن
(2) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال : $]\ln 4; \ln 6[$	0,50 ن
(نأخذ : $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$).	
ب) أدرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$.	0,50 ن
(3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\boxed{u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = 2(1-e^{-u_n})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})}$.	0,50 ن
أ) بين أن : $1 \le u_n < \alpha\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.	0,50 ن
ب) بين أن : $u_{n+1} - u_n = g(u_n)\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.	0,25 ن

0,25 ن | ج بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

0,50 ن | د بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم أحسب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

(II) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $\boxed{f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1,00 ن | ① أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

0,50 ن | ② أ تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-1)}$

0,75 ن | ب بين أن : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن | ③ أنشئ $(\mathscr{C})$ (نأخذ : $\alpha\approx 1,5$).

(III) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\boxed{(\forall x>0)\ ;\ F(x)=\int_x^{2x}\left(\frac{1-e^t}{t}\right)dt \quad \text{و} \quad F(0)=-\ln 2}$$

0,50 ن | ① أ باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $(\forall x>0)\ ;\ F(x)=\dfrac{(e^{2x}-1)}{2x}-\dfrac{(e^x-1)}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt$

0,50 ن | ب بين أن : $(\forall x\epsilon]0,+\infty[)\ ;\ e^x\ln 2\leq\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt\leq e^{2x}\ln 2$

0,50 ن | ج أحسب : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر

0,25 ن | ② أ بين أن : $(\forall x\epsilon]0,+\infty[)\ ;\ F(x)\leq\dfrac{1-e^x}{2x}$

0,25 ن | ب أحسب : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,50 ن | ③ بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

و أن : $(\forall x>0)\ ;\ F'(x)=\dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2$

0,75 ن | ④ أ ليكن x من المجال $]0,+\infty[$.

بين أنه يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث : $F(x)-F(0)=\dfrac{-1}{2}xe^{2c}$

0,25 ن | ب أثبت أن : $(\forall x\epsilon]0,+\infty[)\ ;\ \dfrac{-1}{2}e^{2x}\leq\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leq\dfrac{-1}{2}$

0,25 ن | ج استنتج أن F قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و أن : $F'_d(0)=\dfrac{-1}{2}$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ ①

لدينا $\mathcal{V}$ جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لأنه يضم المصفوفة المنعدمة $\mathcal{O} = \mathcal{M}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{M}_{(a,b)}$ و $\mathcal{M}_{(c,d)}$ مصفوفتين من $\mathcal{V}$. و u و v عددين حقيقيين.

لدينا :

$$\begin{aligned} u\mathcal{M}_{(a,b)} + v\mathcal{M}_{(c,d)} &= \begin{pmatrix} ua & ub \\ 4ub & ua \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vc & vd \\ 4vd & vc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua+vc & ub+vd \\ 4(ub+vd) & ua+vc \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}_{(ua+vc\,,ub+vd)} \end{aligned}$$

إذن : $\mathcal{V}$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

و لتكن $\mathcal{M}_{(a,b)}$ مصفوفة من $\mathcal{V}$

إذن :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(a,b)} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aI + bJ \end{aligned}$$

إذن الأسرة (I,J) مولدة للفضاء المتجهي $\mathcal{V}$ (1)

لتكن $xI + yJ$ تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و J .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad xI + yJ = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 4y & x \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

و بالتالي : الأسرة (I,J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا). (2)

من (1) و (2) نستنتج أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $\mathcal{V}$
و بما أن عدد عناصره 2 فإن : $dim(\mathcal{V}) = 2$.

■ ② أ

لتكن $\mathcal{M}_{(a,b)}$ و $\mathcal{M}_{(x,y)}$ مصفوفتين من $\mathcal{V}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(x,y)} \times \mathcal{M}_{(a,b)} &= (xI + yJ)(aI + bJ) \\ &= (xaI + xbJ + yaJ + ybJ^2) \end{aligned}$$

نحسب J^2 نحصل على : $J^2 = 4I$

إذن :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(x,y)} \times \mathcal{M}_{(a,b)} &= (xa + 4yb)I + (xb + ya)J \\ &= \mathcal{M}_{(xa+4yb\ ,\ xb+ya)} \end{aligned}$$

إذن $\mathcal{V}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ ② ب

لدينا : $(\mathcal{V},+)$ زمرة تبادلية لأن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة و $\mathcal{V}$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

بما أن جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و نعلم أن: $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و حدتها $I = \mathcal{M}_{(1,0)}$

إذن الضرب $\times$ تجميعي و توزيعي على الجمع في $\mathcal{V}$

لدينا : I هي وحدة الحلقة $\mathcal{V}$

و باستطاعتك أن تبرهن على أن الضرب تبادلي في $\mathcal{V}$

و بالتالي $(\mathcal{V},+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \mathcal{M}_{(1,0)}$.

■ ③ أ

بعد حساب جداء المصفوفتين نحصل على :

$$\mathcal{M}_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)} \times \mathcal{M}_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)} = \mathcal{M}_{(0,0)} = \mathcal{O}$$

■ ③ ب

نعلم أن الجسم هو كل حلقة كاملة

يعني : $(ab = 0 \implies a = 0$ أو $b = 0)$

من السؤال ③ أ نستنتج أن الحلقة $(\mathcal{V},+,\times)$ ليست كاملة نظرا لوجود مصفوفتين غير منعدمتين لكن جداءهما منعدم.

و بالتالي : $(\mathcal{V},+,\times)$ ليس جسما .

■ ④ أ

أشير في البداية إلى أن $J^2 = 4I$

لدينا : $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I$

$$\begin{aligned} &= (aI + bJ)^2 - 2a(aI + bJ) + (a^2 - 4b^2)I \\ &= a^2I + b^2J^2 + 2abJ - 2a^2I - 2abJ + (a^2 - 4b^2)I \\ &= (a^2 + 4b^2 - 2a^2 + a^2 - 4b^2)I + (2ab - 2ab)J = \mathcal{O} \end{aligned}$$

■ ④ ب

لدينا حسب السؤال ④ أ

$$X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=\mathcal{O}$$

$$\Leftrightarrow \quad X^2-2aX=(4b^2-a^2)I$$

$$\Leftrightarrow \quad X\times\left(\frac{X}{4b^2-a^2}-\frac{2a}{4b^2-a^2}\right)=I$$

$$\Leftrightarrow \quad X\times\mathcal{M}_{\left(\frac{-a}{4b^2-a^2},\frac{b}{4b^2-a^2}\right)}=I$$

و بالتالي : $\mathcal{M}_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا هو المصفوفة $\mathcal{M}_{\left(\frac{-a}{4b^2-a^2},\frac{b}{4b^2-a^2}\right)}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ ① أ

بعد النشر و التبسيط نحصل على :

$$(iu-1-i)^2=-u^2+(2-2i)u+2i$$

■ ① ب

لدينا : $\Delta=4(-u^2+2u+2i-2iu)$

$$=4(iu-1-i)^2$$

$$=[2(iu-1-i)]^2$$

و منه : $z_1=(1-i)u+2$

و $z_2=(1+i)u-2i$

■ ② أ

لدينا :

$z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=(u-i+1) \quad\Leftrightarrow\quad I$ منتصف $[AB]$.

ليكن z لحق متجهة الإزاحة $\vec{t}$ التي تحول U إلى I .

يعني : $U \xrightarrow{T_{\vec{t}}} I$

لدينا : $T(U)=I$

إذن حسب التعريف العقدي للإزاحة :

$$\Leftrightarrow \quad z_I=z_U+z$$

$$\Leftrightarrow \quad (u-i+1)=u+z$$

$$\Leftrightarrow \quad z=(1-i)$$

و بالتالي : $\boxed{\vec{t}(1-i)}$ هي متجهة الإزاحة T .

■ ② ب

نضع : $M(z)$ و $M'(z')$

لدينا $\mathcal{R}$ دوران مركزه $\Omega(2-2i)$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

إذن الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ هي :

$$\mathcal{R}(M)=M' \Leftrightarrow z'-(2-2i)=e^{\frac{-i\pi}{2}}(z-(2-2i))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z'=-iz+4} \quad (*)$$

و لدينا : $-iz_A+4=-i((1+i)u-2i)+4$

$$=-2-iu(1+i)+4$$

$$=2+u(-i+1)$$

$$=z_B$$

إذن حسب الكتابة العقدية $(*)$ للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A)=B$.

■ ② ج

لدينا : $\mathcal{R}_\Omega(A)=B$

إذن : $\begin{cases}\overline{(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})}\equiv\dfrac{-\pi}{2}\,[2\pi]\\ \Omega A=\Omega B\end{cases}$

إذن ΩAB مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω

و بما أن I هي منتصف $[AB]$ فإنه حسب الخاصية المميزة لواسط قطعة : (ΩI) هو واسط $[AB]$

و بالتالي : $\boxed{(\Omega I)\perp(AB)}$.

■ ② د

ننطلق من النقطتين U و Ω

لدينا : $T_{\vec{t}}(U)=I$ إذن ننشئ I باستعمال : $\vec{t}=\overrightarrow{UI}$

نرسم المستقيم (D) المار من I و العمودي على (ΩI)
(لأن : $(\Omega I)\perp(AB)$)

و سنحدد A و B على هذا المستقيم (D) .

لدينا : ΩAB مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه Ω .

و I منتصف $[AB]$.

إذن $IA=IB=I\Omega$ و منه : A و B و Ω نقط من الدائرة التي مركزها I وشعاعها ΩI .

و بالتالي : للحصول على A و B نرسم الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها I و شعاعها ΩI . و نلاحظ أن (D) يقطع $(\mathscr{C})$ في نقطتين هما A و B .

■ ③ أ

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = \big((1-i)u+2\big) - \big((1+i)u - 2i\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = -2iu + 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = -4 - 2ia(1+i) + 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = 2\big(i - 1 - ia(1+i)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = 2(i - 1 - ia + a)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = 2(i-1)(1-a)$$

و لدينا كذلك : $z_{\overrightarrow{AU}} = z_U - z_A$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AU}} = a(1+i) - 2i - (1+i)u + 2i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AU}} = (1+i)(a-u)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AU}} = (1+i)(2i - ai)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AU}} = i(1+i)(2-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AU}} = (i-1)(2-a)$$

■ ③ ب

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}} = 2(i-1)(1-a)$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = \left(\frac{2(1-a)}{(2-a)}\right)(i-1)(2-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{\overrightarrow{AB}} = \left(\frac{2(1-a)}{(2-a)}\right) z_{\overrightarrow{AU}}$$

إذن : $z_{\overrightarrow{AB}} = k z_{\overrightarrow{AU}}$ بحيث k: عدد حقيقي غير منعدم و يساوي : $\frac{2(1-a)}{(2-a)}$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ متجهتان مستقيميتان.

أي : A و B و U نقط مستقيمية .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ①

عندما نسحب كرتين من أحد الصناديق : فإنه يحتمل أن نسحب :

- كرتين حمراوين.
- أو كرة حمراء و الأخرى سوداء.
- أو كرتين سوداوين.

إذن قيم المتغير العشوائي X هي : { 0 و 1 و 2 } .

أو بتعبير آخر : $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.

■ ② أ

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

عندما نسحب كرتين من صندوق فإنه لدينا:

- C_3^1 إمكانية لاختيار الصندوق
- C_n^2 إمكانية لسحب كرتين من بين n كرة.

إذن : $$card\ (\Omega) = C_3^1 \cdot C_n^2 = \frac{3n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{3n(n-1)}{2}$$

لدينا الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين

إذن لدينا :

- 0 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين من الصندوق U_1 .
- إمكانية واحدة لسحب الكرتين الحمراوين من الصندوق U_2
- C_3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين من الصندوق U_3

إذن :

$$P[X=2] = \frac{0 + 1 + C_3^2}{card\ (\Omega)} = \frac{4}{\frac{3n(n-1)}{2}} = \frac{8}{3n(n-1)}$$

■ ② ب

لدينا الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة حمراء واحدة و الأخرى بطبيعة الحال ستكون سوداء و لهذا لدينا :

- $(C_1^1 \times C_{n-1}^1)$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_1 .
- $(C_2^1 \times C_{n-2}^1)$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_2 .
- $(C_3^1 \times C_{n-3}^1)$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_3 .

إذن : عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء و الأخرى سوداء هو :

$$card\ [X=1] = (C_1^1 \times C_{n-1}^1) + (C_2^1 \times C_{n-2}^1) + (C_3^1 \times C_{n-3}^1)$$

$$\Leftrightarrow \quad card\ [X=1] = (6n - 14)$$

و بالتالي :

$$P[X=1] = \frac{card\,[(X=1)]}{card\,(\Omega)} = \frac{(6n-14)}{\frac{3n(n-1)}{2}} = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

■ ② ج

في البداية وجب علينا حساب احتمال الحدث : $[X=0]$.

نعلم أن : $P[X=0]+P[X=1]+P[X=2]=1$.

إذن : $P[X=0]=1-P[X=1]-P[X=2]$

$$\Leftrightarrow \quad P[X=0] = 1 - \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)} - \frac{8}{3n(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad P[X=0] = \frac{3n(n-1)-8-4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad P[X=0] = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$$

نضع : $\boxed{x_0 = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}}$ و $\boxed{x_1 = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$

و $\boxed{x_2 = \frac{8}{3n(n-1)}}$

إذن قانون احتمال المتغير العشوائي X معرف بما يلي :

$$\boxed{P[X=k] = x_k \quad / \quad k\epsilon\{0,1,2\}}$$

■ ③

نعتبر الحدث التالي : E_3 = " نسحب الكرتين من الصندوق U_3 "

احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 مع العلم أننا حصلنا على كرتين حمراوين هو الإحتمال الشرطي التالي :

$$P_{[X=2]}(E_3) = \frac{P(E_3 \cap [X=2])}{P[X=2]}$$

لدينا : $P(E_3 \cap [X=2]) = \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_n^2} = \frac{2}{n(n-1)}$

و لدينا : $P([X=2]) = \frac{8}{3n(n-1)}$

إذن : $P_{[X=2]}(E_3) = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{8}{3n(n-1)}} = \boxed{\frac{6}{8}}$

التمرين الرابع : (3,3 ن)

■ ① أ

لدينا : $g'(x) = 2e^{-x}-1$

إذن : g' تنعدم في $\ln 2$.

و $g'(x) > 0$ إذا كان $x < \ln 2$ يعني g تزايدية

و $g'(x) < 0$ إذا كان $x > \ln 2$ يعني g تناقصية .

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

■ ① ب

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

■ ② أ

لدينا g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\ln 2, +\infty[$ إذن g متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\ln 4, \ln 6[$ لأن :
$]\ln 4, \ln 6[\subset [ln\,2, +\infty[$

إذن g تقابل من $]\ln 4, \ln 6[$ نحو صورته .

و لدينا : $g(]\ln 4, \ln 6[) = \left]\frac{5}{3}-\ln 6\ ,\frac{3}{2}-\ln 4\right[\approx \left]\frac{-1}{10}\ ,\frac{1}{10}\right[$

نلاحظ أن : $0\ \epsilon \left]\frac{-1}{10}, \frac{1}{10}\right[$.

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا في المجال $]ln\,4, ln\,6[$

أو بتعبير آخر : $(\exists!\ \alpha\ \epsilon\ ]\ln 4, \ln 6[)\ :\ g(\alpha) = 0$

■ ② ب

لدينا g دالة تناقصية على $]\ln 2, +\infty[$

إذن إذا كان $x > \alpha$ فإن : $g(x) < g(\alpha)$ أي : $g(x) < 0$

إذا كان $\ln 2 < x < \alpha$ فإن : $g(x) > 0$

و لدينا g دالة تزايدية على المجال : $]0, \ln 2[$

إذا كان : $x\ \epsilon\ ]0, \ln 2[$

فإن : $x > 0$ و منه : $g(x) > g(0) = 0$

و مما سبق نستنتج جدول الإشارة التالي :

x	0		$\ln 2$		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	$0,3$	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني

■ ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - \frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{e^{\left(\frac{x}{2}\right)}}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}_{\to+\infty}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1-e^x}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^+}\underbrace{\left(\frac{e^x-1}{x-0}\right)}_{\to e^0}\underbrace{\left(\frac{-1}{x}\right)}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^x}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0} - \frac{1}{27}\underbrace{\left(\frac{e^{\left(\frac{x}{3}\right)}}{\left(\frac{x}{3}\right)}\right)^3}_{\to-\infty}\right) = -\infty$$

■ ② أ

لدينا : $g(\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1-e^{-\alpha})=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\alpha} = \frac{2}{(2-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-e^{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{1-\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2(2-\alpha)} = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}}$$

■ ② ب

لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)' = \frac{-x^2e^x-2x(1-e^x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2e^x-2xe^x(e^{-x}-1)}{x^4}$$

$$= \frac{xe^x(2(1-e^{-x})-x)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{x^3}$$

■ ③ أ

من أجل $n=0$ لدينا : $1 \le u_0 = 1 \le \alpha$

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; : \; 1 \le u_n < \alpha$

إذن : $e^{-\alpha} < e^{-u_n} \le e^{-1}$

و منه : $\left(2-\frac{2}{e}\right) \le 2(1-e^{-u_n}) < 2(1-e^{-\alpha})$

و لدينا : $\left(2-\frac{2}{e}\right) > 1$ (الآلة الحاسبة)

و $2(1-e^{-\alpha}) =$ (لأن : $g(\alpha)=0$)

إذن : $1 \le u_{n+1} < \alpha$.

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \; : \; 1 \le u_n < \alpha}$

■ ③ ب

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n = 2(1-e^{-u_n})-u_n = g(u_n)$$

■ ③ ج

لدينا حسب جدول إشارة g :

g موجبة على المجال $]\ln 2 , \alpha[$

إذن g موجبة كذلك على المجال $[1,\alpha[$. لأن : $[1,\alpha[\subset]\ln 2 , \alpha[$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_n \in [1,\alpha[$

إذن : $g(u_n) > 0$ و منه : $u_{n+1}-u_n > 0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} > u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية تزايدية

■ ③ د

بما أن : $(u_n)_{n\ge0}$ تزايدية و مكبورة بالعدد α .

لأن : $(\; \forall n\in\mathbb{N} \; ; \; 1 \le u_n < \alpha \;)$

إذن : فهي متقاربة و نضع : $lim(u_n) = \ell$

لدينا : $(u_n)_n$ متتالية ترجعية معرفة بما يلي :

$$u_{n+1} = 2(1-e^{-u_n}) = h(u_n)$$

و لدينا h متصلة و تزايدية قطعا على $[1,\alpha[$.

لأن : $h'(x) = 2e^{-x} > 0$

و لدينا كذلك : $h([1,\alpha]) \subset [1,\alpha]$ و $u_0 = 1 \in [1,\alpha]$

إذن النهاية ℓ هي حل للمعادلة $h(\ell)=\ell$.

أو بتعبير جميل : $g(\ell)=0$.

هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا α من المجال $]\ln 4 \; , \ln 6[$.

و بالتالي : $\ell = \lim_{n\infty}(u_n) = \alpha$

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

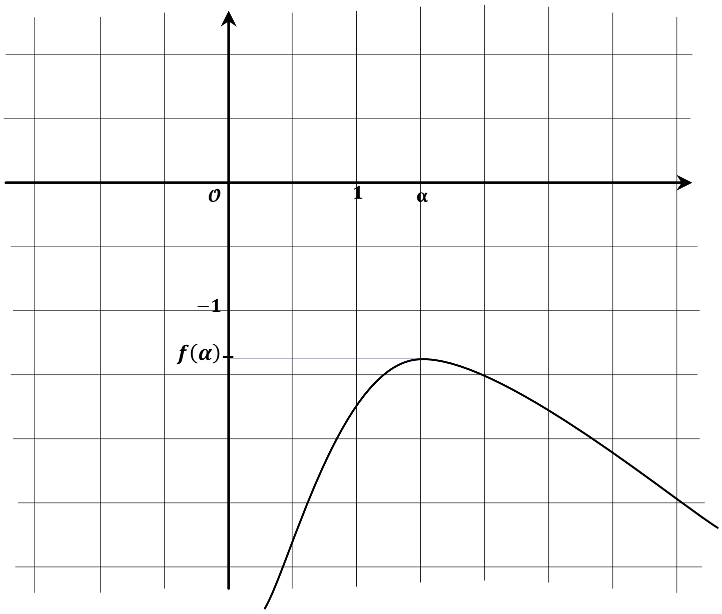
لأن : $(\forall x > 0) \; ; \; \dfrac{e^x}{x^3} > 0$

لدينا g تنعدم في α .إذن f تنعدم في α .

ندمج إشارة g في جدول تغيرات الدالة f نحصل على :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	↘	$-\infty$

■ ③



الجزء الثالث

■ ① أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لدينا : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1-e^t}{t^2}\right) dt = \int_x^{2x} \underbrace{\left(\frac{-1}{t^2}\right)}_{v'} \underbrace{(e^t - 1)}_{u} dt$

$$= [uv] - \int vu'$$

$$= \left[\frac{e^t - 1}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) e^t dt$$

$$= \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)_x^{2x} - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$$

■ ① ب

ننطلق من الكتابة : $x \le t \le 2x$ مع $x > 0$.

$$\Leftrightarrow \quad e^x \le e^t \le e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{t} \le \frac{e^t}{t} \le \frac{e^{2x}}{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_x^{2x} \left(\frac{e^x}{t}\right) dt \le \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \le \int_x^{2x} \left(\frac{e^{2x}}{t}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x [\ln t]_x^{2x} \le \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \le e^{2x} [\ln t]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{e^x \ln(2) \le \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \le e^{2x} \ln(2)} \quad (*)$$

■ ① ج

لدينا : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^x \, ln(2) = \lim_{x \to 0^+} e^{2x} \, ln(2) = \ln(2)$

إذن حسب التأطير $(*)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt = \ln(2)$$

و لدينا :

$$F(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$$

نؤطر إذن $F(x)$ بالإستعانة بالتأطير $(*)$ نحصل على :

$(**)$

$$\boxed{\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - e^{2x} \, ln(2) \le F(x) \le \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - e^x \, ln(2)}$$

و بما أن : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = e^0 = 1$

إذن : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - e^{2x} \, ln(2)\right) = -\ln 2$

و $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - e^x \, ln(2)\right) = -\ln 2$

و بالتالي حسب التأطير $(**)$ نجد :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\ln 2 = F(0)}$$

أي : F دالة متصلة على اليمين في الصفر .

■ 2 أ

ننطلق من الكتابة : $x \leq t \leq 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - e^{2x} \leq 1 - e^{t} \leq 1 - e^{x}$$

سوف نهتم فقط بالمتفاوتة : $(1 - e^{t}) \leq (1 - e^{x})$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - e^{t}}{t^2} \leq \frac{1 - e^{x}}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{x}^{2x} \left(\frac{1 - e^{t}}{t^2}\right) dt \leq (1 - e^{x}) \int_{x}^{2x} \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq (1 - e^{x}) \left[\frac{-1}{t}\right]_{x}^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) \leq (1 - e^{x}) \left(\frac{-1}{2x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{F(x) \leq \left(\frac{1 - e^{x}}{2x}\right)} \quad (***)$$

■ 2 ب

بما أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - e^{x}}{2x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2x}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} 0} - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{e^{x}}{x}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} +\infty} = \boxed{-\infty}$$

إذن حسب المتفاوتة $(***)$ نجد : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \boxed{-\infty}$

■ 3

لدينا :
$$F(x) = \int_{x}^{2x} \left(\frac{1 - e^{t}}{t^2}\right) dt$$
$$= \int_{0}^{2x} \left(\frac{1 - e^{t}}{t^2}\right) dt - \int_{0}^{x} \left(\frac{1 - e^{t}}{t^2}\right) d$$

لدينا الدالة : $t \to \left(\frac{1 - e^{t}}{t^2}\right)$ متصلة على : $]0; +\infty[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها متصلة على $]0; +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} h(x) - h(0) = \int_{0}^{x} \left(\frac{1 - e^{t}}{t^2}\right) dt \\ h'(x) = \left(\frac{1 - e^{x}}{x^2}\right) \end{cases}$$

لدينا إذن : $F(x) = h(2x) - h(x)$

بما أن الدالتين : h و $x \to 2x$ قابلتين للإشتقاق على $]0; +\infty[$

فإن F قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

و لدينا : $F'(x) = 2h'(2x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow \quad F'(x) = 2\left(\frac{1 - e^{2x}}{(2x)^2}\right) - \left(\frac{1 - e^{x}}{x^2}\right)$$
$$= \frac{2 - e^{2x} - 4(1 - e^{x})}{(2x)^2}$$
$$= \frac{-2(e^{2x} - 2e^{x} + 1)}{4x^2}$$
$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{e^{x} - 1}{x}\right)^2$$

■ 4 أ

لدينا F متصلة و قابلة للإشتقاق على كل مجال $]0, x[$ بحيث : $x > 0$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF) :

$$(\exists \omega \epsilon]0, x[) \ ; \ \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\exists \omega \epsilon]0, x[) \ ; \ F(x) - F(0) = \left(\frac{-x}{2}\right)\left(\frac{e^{\omega} - 1}{\omega}\right)^2} \ (\star)$$

لدينا كذلك الدالة $x \to e^{x}$ متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كله.

نختار المجال $]0, \omega[$ إذن حسب (TAF) :

$$\Leftrightarrow \boxed{(\exists c \epsilon]0, \omega[) \ ; \ \frac{e^{\omega} - 1}{\omega} = e^{c}} \ (\star\star)$$

من $(\star)$ و $(\star\star)$ نستنتج أن :

$$\Leftrightarrow \boxed{(\exists c \epsilon]0, \omega[\subset]0, x[) \ ; \ F(x) - F(0) = \left(\frac{-x}{2}\right) e^{2c}}$$

■ 4 ب

لدينا : $0 < c < x$.

$$\Leftrightarrow \quad e^{0} < e^{2c} < e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{-x}{2}\right)e^{2x} < \left(\frac{-x}{2}\right)e^{2c} < \left(\frac{-x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{-e^{2x}}{2}\right) < \frac{F(x)-F(0)}{x} < \left(\frac{-1}{2}\right)} \quad (\bowtie)$$

■ 4 ج

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{-e^{2x}}{2}\right) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)$

إذن حسب التأطير $(\bowtie)$ نحصل على :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)$$

و بالتالي : F قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و العدد المشتق هو $\frac{-1}{2}$

أو بتعبير أجمل : $\boxed{F'_d(0) = \frac{-1}{2}}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والإمتحانات	الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2010

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

(I) نزود المجموعة $I =]0,+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (a,b)\epsilon I^2) \;;\; a * b = e^{\ln(a).\ln(b)}$$

0,25 ن ① بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I .

0,50 ن ② بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا ε في I ينبغي تحديده .

0,50 ن ③ أ) بين أن $(I \setminus \{1\} \,;\, *)$ زمرة تبادلية . ($I \setminus \{1\}$ هي المجموعة I محرومة من العدد 1)

0,50 ن ب) بين أن $]1;+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\},*)$.

④ نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$ ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

0,50 ن أ) بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$.

0,50 ن ب) بين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

(II) نعتبر المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

0,50 ن ① أحسب A^2 و A^3 .

0,25 ن ② استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

0,50 ن ① أ) حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $(3+4i)$.

0,50 ن ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) \;;\; 4z^2 - 10iz - 7 - i$.

② ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث : $\Re e(a) = 0$ و النقطتين A و B هما صورتي a و b على التوالي.

0,50 ن أ) تحقق أن : $\frac{b}{a} = 1 - i$

0,50 ن ب) استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

③ لتكن C نقطة لحقها c و تخالف النقطة A و لتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$
و لتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.

0,50 ن أ) حدد c بدلالة العدد العقدي d لحق النقطة D .

0,50 ن ب) حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L .

0,50 ن ج) حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\frac{\ell - c}{a - c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

① حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث : $m^2 + 1 \equiv 0[5]$.	0,75 ن
② ليكن p عددا أوليا بحيث : $p = 3 + 4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.	
و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n^2 + 1 \equiv 0[p]$.	
(أ) تحقق أن : $(n^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$.	0,50 ن
(ب) بين أن : n و p أوليان فيما بينهما .	0,75 ن
(ج) استنتج أن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[p]$.	0,50 ن
(د) استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق $n^2 + 1 \equiv 0[p]$.	0,50 ن

التمرين الرابع : (6,25 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x) = 4xe^{-x^2}}$	
و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.	
① أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.	0,25 ن
② أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها.	0,50 ن
③ حدد معادلة نصف المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في أصل المعلم ثم أنشئ $(\mathscr{C})$.	0,50 ن
(نأخذ $\\|\vec{\imath}\\| = \\|\vec{\jmath}\\| = 2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$)	
④ أحسب التكامل : $a = \int_0^1 f(x)\,dx$	0,50 ن
ثم استنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محوري المعلم	
و المستقيم الذي معادلته $x = 1$.	
(II) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.	
نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي $\boxed{f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}}$	
① (أ) بين أن : $(\forall x > 1)\ ;\ e^{-x^2} < e^{-x}$.	0,50 ن
(ب) استنتج نهاية الدالة f_n عندما يؤول x إلى $+\infty$.	0,50 ن
② أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .	0,50 ن
③ بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0; 1[$ بحيث $f_n(u_n) = 1$.	0,50 ن
④ (أ) تحقق أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ f_{n+1}(u_n) = u_n$.	0,50 ن
(ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .	0,50 ن
⑤ نضع : $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$	
(أ) بين أن : $0 < \ell \leq 1$.	0,50 ن
(ب) بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$	0,50 ن
(ج) استنتج أن : $\ell = 1$	0,50 ن

التمرين الخامس : (3,75 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :
$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$$

0,50 ن ① بين أن الدالة F فردية .

② لكل x من المجال $]0,+\infty[$ نضع :
$$\varphi(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$$

0,25 ن ⓐ تحقق أن : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

0,50 ن ⓑ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,50 ن ⓒ استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.

0,50 ن ③ ⓐ باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :
$$(\forall x > 0), (\exists c \epsilon]x;2x[)\ ;\ F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,50 ن ⓑ استنتج أن :
$$(\forall x > 0)\ ;\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

0,50 ن ⓒ حدد النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

0,50 ن ⓓ تحقق أن : $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ و $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

ثم استنتج أن المعادلة : $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I) (1)

لنبين أن $*$ قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن a و b عنصرين من I .

لدينا : $a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$

$= e^{\ln(b).\ln(a)}$

$= b*a$

و منه : $a*b = b*a$ يعني : $*$ قانون تبادلي في I .

لنبين أن $*$ قانون تجميعي في المجموعة I .

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من I .

$$a*(b*c) = e^{\ln(a).\ln(b*c)}$$
$$= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\ln(b).\ln(c)}\right)}$$
$$= e^{\ln(a).\ln(b).\ln(c)}$$
$$= e^{\ln\left(e^{\ln(a).\ln(b)}\right).\ln(c)}$$
$$= e^{\ln(a*b).\ln(c)}$$
$$= (a*b)*c$$

إذن القانون $*$ تجميعي في المجموعة I .

■ (2)

ليكن ε العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I

و هذا يعني : $a*\varepsilon = \varepsilon * a = a \; ; \; (\forall a \epsilon I)$

لتحديد قيمة ε ننطلق من إحدى المتساويتين $a*\varepsilon = a$ أو $\varepsilon * a = a$

الكتابة : $a*\varepsilon = a$.

تعني : $e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)} = a$

تعني : $\ln(a).\ln(\varepsilon) = \ln(a)$

تعني : $\ln(\varepsilon) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$

تعني : $\varepsilon = e$

نتأكد من أن ε ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$

بالفعل $e \approx 2{,}72$ أكبر قطعا من 0

إذن : $e \epsilon I$

و منه القانون يقبل عنصرا محايدا و هو العدد e

■ (3) (أ)

ليكن a و b عنصرين من المجموعة $I \setminus \{1\}$.

هذا يعني أن $a \neq 1$ و $b \neq 1$

و منه : $\ln(b) \neq 0$ و $\ln(a) \neq 0$

يعني : $\ln(a).\ln(b) \neq 0$

و منه : $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

نستنتج أن : $e^{\ln(a).\ln(b)} > 0$ و $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

و هذا يعني بكل بساطة أن : $e^{\ln(a).\ln(b)} \epsilon \; I \setminus \{1\}$

أي : $a*b \; \epsilon \; I \setminus \{1\}$

و منه $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $I \setminus \{1\}$

تبادلية و تجميعية القانون $*$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$
نستنتجه من المجموعة I لأن $I \setminus \{1\}$ جزء من I

بما أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I فإن $*$ تبادلي و تجميعي
كذلك في المجموعة $I \setminus \{1\}$ لأن $I \setminus \{1\} \subset I$

لدينا e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I

إذن e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$
لأن $e \neq 1$ أي $e \epsilon I \setminus \{1\}$

ليكن a عنصرا من المجموعة $I \setminus \{1\}$

x مقلوب للعنصر a في المجموعة $I \setminus \{1\}$

يعني : $a*x = x*a = e$

ننطلق من الكتابة $a*x = e$

هذا يعني أن $e^{\ln(a).\ln(x)} = e$ و منه : $\ln(a).\ln(x) = 1$

أي : $\ln(x) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ يعني : $x = e^{\frac{1}{\ln(a)}}$

بما أن : $a \epsilon I \setminus \{1\}$ فإن $a \neq 1$

و هذا يعني أن : $\ln(a) \neq 0$

و منه : $\dfrac{1}{\ln(a)} \neq 0$ يعني : $e^{\frac{1}{\ln(a)}} \neq 1$

أي : $e^{\frac{1}{\ln(a)}} \epsilon I \setminus \{1\}$

نستنتج أن كل عنصر a من المجموعة $I \setminus \{1\}$ يقبل
مقلوبا $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ من نفس المجموعة $I \setminus \{1\}$

خلاصة : لقد تمكنا من أن نبرهن على أن $*$ قانون تركيب داخلي في
المجموعة $I \setminus \{1\}$ و له عنصر محايد e و كل عنصر a يقبل
مقلوبا $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$

و بالتالي $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية.

■ (3) (ب)

أولا ، نلاحظ أن $]1;+\infty[\subset I \setminus \{1\}$

لأن : $I \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$

و كذلك : $]1;+\infty[\neq \emptyset$

و هذا يعني أن $]1;+\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

يكفي الآن أن نبرهن على نه إذا كان a و b عنصرين من $]1,+\infty[$

فإن : $a * b'\epsilon]1,+\infty[$ بحيث b' هو مقلوب b في $I \setminus \{1\}$

ننطلق من الكتابة : $a * b' = a * \left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)$

$$= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)}$$

$$= e^{\ln(a).\frac{1}{\ln(b)}}$$

$$= e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}$$

من جهة أخرى لدينا : $a\epsilon]1,+\infty[$ و $b\epsilon]1,+\infty[$

يعني $b > 1$ و $a > 1$

يعني $\ln b > 0$ و $\ln a > 0$ يعني : $\frac{ln(a)}{ln(b)} > 0$

إذن : $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}\epsilon]1,+\infty[$ و منه $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} > 1$

يعني : $a * b'\epsilon]1,+\infty[$

الوضعية التي نتوفر عليها الآن هي $(I \setminus \{1\},*)$ زمرة تبادلية .

$]1,+\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

$$(\forall(a,b)\epsilon]1;+\infty[) \;\; ; \;\; a * b'\epsilon]1;+\infty[$$

نستنتج من هذه الوضعية أن $(]1,+\infty[,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\},*)$.

■ ④ أ

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من المجموعة I .

يكون $*$ توزيعيا بالنسبة للقانون $\times$ إذا كان :

$$\begin{cases} a*(b\times c) = (a*b)\times(a*c) \\ (a\times b)*c = (a*c)\times(b*c) \end{cases}$$

لدينا : $a*(b\times c) = e^{\ln(a).\ln(b\times c)}$

$$= e^{\ln(a).(\ln(b)+\ln(c))}$$

$$= e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a)\ln(c)}$$

$$= e^{\ln(a).\ln(b)} \times e^{\ln(a).\ln(c)}$$

$$= (a*b)\times(a*c)$$

و بما أن القانون $*$ تبادلي نستنتج المتساوية الأخرى

و بالتالي : القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$

■ ④ ب

لدينا I جزء غير منعدم من $\mathbb{R}^*$

ليكن x و y عنصرين من I

إذن : $x > 0$ و $y > 0$. و منه : $\frac{x}{y} > 0$ أي : $x \times y^{-1} > 0$.

إذن : $(x \times y^{-1})\,\epsilon\, I$

إذن $(I,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$.

و لدينا حسب السؤال ④ أ : $*$ توزيعي بالنسبة لـ $\times$.

و لدينا كذلك : حسب السؤال ③ أ $(I \setminus \{1\},*)$ زمرة تبادلية .

و بالتالي $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

■ (II) ①

بعد الحساب سوف تحصل على النتائج التالية :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ ②

تفترض أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في المجموعة $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

إذن : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

بحيث : $\times$ هو ضرب المصفوفات و I هي المصفوفة : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ننطلق من الكتابة $A \times A^{-1} = I$

نضرب طرفي هذه المتساوية في A^2 نحصل على : $A^3 \times A^{-1} = A^2$

إذن : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و هذا تناقض واضح لأن : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و بالتالي المصفوفة A لا تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ ① أ

ليكن العدد العقدي $x + iy$ جذرا مربعا للعدد العقدي : $3 + 4i$

هذا يعني أن : $(x+iy)^2 = 3 + 4i$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 + i(2xy) = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نحصل على : $x^2 = \frac{4}{y^2}$

نعوض x^2 في المعادلة الأولى نجد : $\frac{4}{y^2} - y^2 = 3$

يعني : $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$

نضع : $t = y^2$ نحصل على : $t^2 + 3t - 4 = 0$

هذه المعادلة تقبل الحلين $t_1 = 1$ و $t_2 = -4$

الحل t_1 يمدنا بـ $y = -1$ أو $y = 1$.

والحل t_2 يمدنا بـ $y = -2i$ أو $y = 2i$.

إذن المعادلة : $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$ تقبل أربعة حلول. نعوض كل قيمة لـ y في النظمة لإيجاد قيمة x الموافقة.

إذا كان $y = 1$ فإن : $x = 2$

إذا كان $y = -1$ فإن : $x = -2$

إذا كان $y = 2i$ فإن : $x = -i$

إذا كان $y = -2i$ فإن : $x = i$

بعد ذلك نكتب الجذور المربعة التي حصلنا عليها و هي :

في الحالة الأولى : $x + iy = 2 + i$.

في الحالة الثانية : $x + iy = -2 - i$.

في الحالة الثالثة : $x + iy = -2 - i$.

في الحالة الرابعة : $x + iy = 2 + i$.

و بالتالي : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$.

■ 1 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$.

بعد حساب المميز Δ نجد : $\Delta = 4(3 + 4i)$.

لدينا حسب السؤال 1 أ : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$.

نختار $(2 + i)$ نحصل على : $\Delta = [2(2 + i)]^2$.

و منه (E) تقبل الحلين a و b كما يلي :

$\boxed{a = i - \frac{1}{2}}$ و $\boxed{b = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}}$

عندما نختار الجذر المربع الثاني لـ $(3 + 4i)$ نحصل على نفس النتيجة.

■ 2 أ

لدينا :
$$a(1 - i) = \left(i - \frac{1}{2}\right)(1 - i) = i + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = b$$

■ 2 ب

لدينا :
$$\frac{b - a}{0 - a} = -\frac{b}{a} + 1 = -(1 - i) + 1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

إذن : $\frac{b - a}{0 - a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AO} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AO \\ \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة O

■ 3 أ

لدينا : $B \xrightarrow{R_c\left(\frac{\pi}{2}\right)} D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران : $(d - c) = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - c)$

$$\Leftrightarrow d = c + i(b - c)$$
$$\Leftrightarrow d = c + ib - ic$$
$$\Leftrightarrow c(1 - i) = d - ib$$
$$\Leftrightarrow c(1 - i) = d - i\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow c(1 - i) = d + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$
$$\Leftrightarrow c = \left(\frac{1}{1 - i}\right)d + \left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{i}{2}}{1 - i}\right)$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(1 + i)d + \left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

■ 3 ب

لدينا : $D \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AO}}} L$

إذن حسب تعريف الإزاحة : $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AO}$

$$\Leftrightarrow (\ell - d) = (0 - a)$$
$$\Leftrightarrow \left(\ell + (i - 1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -a$$
$$\Leftrightarrow \ell + (i - 1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - i$$
$$\Leftrightarrow \ell = (1 - i)c - \frac{i}{2} - 1$$

■ 3 ج

لدينا :
$$\frac{\ell-c}{a-c}=\frac{(1-i)c-1-\frac{i}{2}-c}{i-\frac{1}{2}-c}$$
$$=\frac{-ic-1-\frac{i}{2}}{i-\frac{1}{2}-c}=\frac{i\left(-c+i-\frac{1}{2}\right)}{i-\frac{1}{2}-c}=i$$

إذن :
$$\frac{\ell-c}{a-c}=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{CL}{CA}=1\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CL}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

و بالتالي المثلث ALC متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة C

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ 1

في البداية وجب التذكير بخاصيتين هامتين :

الخاصية الأولى : في $\mathbb{Z}$ ، إذا كان a يقسم b و c فإنه يقسم كل تأليفة خطية لهما:$(ub+vc)$.

بتعبير آخر : $\begin{cases}a / b\\ a / c\end{cases}\Longrightarrow(\forall u,v\in\mathbb{Z}):a/(ub+vc)$

الخاصية الثانية (un premier qui divise un produit)

كل عدد أولي يقسم جداء عددين فإنه بالضرورة يقسم أحدهما.

بتعبير آخر : $\begin{cases}p\in\mathbb{P}\\ p / ab\end{cases}\Longrightarrow(p/a)$ أو (p / b)

ننطلق إذن من الكتابة : $m^2+1\equiv0[5]$

$$\Leftrightarrow\quad 5 / (m^2+1)$$

و نعلم أن $5 / (-5)$

إذن حسب الخاصية الأولى : $5 / (m^2+1-5)$

يعني : $5 / (m-2)(m+2)$

بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية :

$5/(m-2)$ أو $5 / (m+2)$

و منه حسب الخاصية الأولى :

$5/(m-2)$ أو $5 / (m+2-5)$

يعني : $m\equiv2[5]$ أو $m\equiv3[5]$

في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نكتب $m\in\{\overline{2},\overline{3}\}$

■ 2 أ

ليكن p عددا أوليا .و k و n عددين صحيحين طبيعيين

ننطلق إذن من الكتابة : $n^2+1\equiv0[p]$

$$\Leftrightarrow\quad n^2\equiv-1[p]$$
$$\Leftrightarrow\quad (n^2)^{(\text{عدد فردي})}\equiv(-1)^{(\text{عدد فردي})}[p]$$
$$\Leftrightarrow\quad (n^2)^{(2k+1)}\equiv-1[p]$$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال أ $(n^2)^{(2k+1)}\equiv-1[p]$

$$\Leftrightarrow\ (\exists u\in\mathbb{Z})\ :\ (n^2)^{(2k+1)}+1=pu$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists u\in\mathbb{Z})\ :\ pu+n\underbrace{\left(-n^{4k}\right)}_{v}=1$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists\, u,v\in\mathbb{Z})\ :\ pu+nv=1$$

و بالتالي حسب Bezout : $n\wedge p=1$

■ 2 ج

لدينا p عدد أولي .و $n\wedge p=1$

إذن حسب مبرهنة Fermat : $n^{p-1}\equiv1[p]$

و نعلم أن $p=4k+3$ إذن : $(n^2)^{2k+1}\equiv1[p]$

■ 2 د

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود العدد n بحيث: $n^2+1\equiv0[p]$

إذن : $\begin{cases}(n^2)^{2k+1}\equiv-1[p]\\ (n^2)^{2k+1}\equiv1[p]\end{cases}$

و منه : $1\equiv-1[p]$ أي : $p / 2$

بما أن p عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن : $p=2$

و هذا مستحيل لأنه لا وجود لعدد صحيح طبيعي k يحقق $4k+3=2$

و بالتالي لا وجود لعدد صحيح طبيعي n يحقق : $n^2+1\equiv0[p]$

التمرين الرابع : (6,25 ن)

1

نعلم أن : $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{+\infty} +\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} 4xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{x}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)}$

نضع : $t = x^2 \; ; \; (\forall x > 0)$

إذن النهاية تصبح : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)} = 0$

2

لدينا : $f'(x) = 4e^{-x^2} + (4x)\left(-2xe^{-x^2}\right)$

$= (1-2x^2)\left(4e^{-x^2}\right)$

بما أن : $4e^{-x^2} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $1-2x^2$

إذا كان : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) > 0$.

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

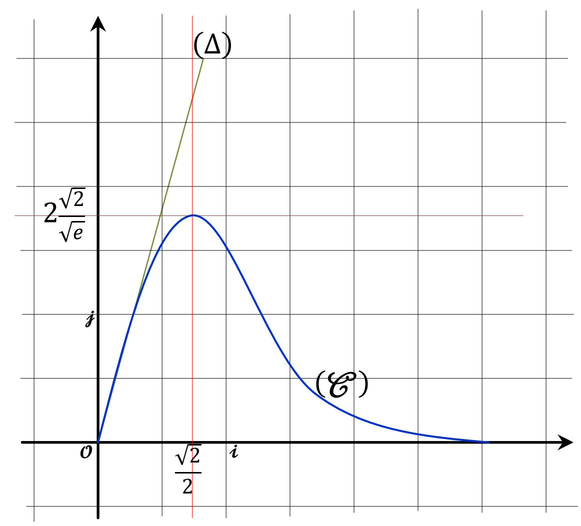
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

3

معادلة المماس لـ $(\mathscr{C})$ في النقطة O هي :

$$\boxed{(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)}$$

يعني : $(\Delta) : y = 4x$ مع $x \geq 0$



4

لاحظ أن : $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$

يعني : $-2\left(e^{-x^2}\right)' = 4xe^{-x^2}$

إذن : $\int_0^1 4xe^{-x^2}dx = -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$

$= -2(e^{-1}-1)$

$= 2(1-e^{-1}) = a$

مساحة الحيز S تقاس باستعمال التكامل التالي : $\boxed{S = \int_0^1 |f(x)|dx}$

بما أن : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ فإن العدد $2(1-e^{-1})$

يعني في الواقع $2unités(1unité - e^{-1}unité)$

في هذا التمرين لدينا : $1unité = 2cm$ إذن $\boxed{a = 8(1-e^{-1})\, cm^2}$

الجزء الثاني

1 أ

ليكن x عددا حقيقيا أكبر من أو يساوي 1

لدينا : $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

$\Rightarrow -x^2 < -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$

لأن الدالة $x \to e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

إذن : $(\forall x > 1) \; ; \; 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

1 ب

لدينا : $(\forall x > 1) : \; 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

إذن : $(\forall x > 1) : \; 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^n e^{\frac{-nx}{n}} = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{-x}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=-\frac{x}{n}}} (-n\underbrace{ue^u}_{\xrightarrow{-\infty} 0})^n = 0$$

إذن : $(\forall x > 1) : \; \underbrace{0}_{\xrightarrow{+\infty} 0} < 4x^n e^{-x^2} < \underbrace{4x^n e^{-x}}_{\xrightarrow{+\infty} 0}$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$

②

لدينا : $f_n'(x) = 4e^{-x^2}x^{n-1}(n-2x^2)$

بما أن $4e^{-x^2}x^{n-1} > 0$ فإن إشارة $f_n'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $n-2x^2$

إذا كان : $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) > 0$.

و لدينا : $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} 4x^n e^{-x^2} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
f_n	0 ↗	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	↘ 0

③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

لنبين أن $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

ليكن x عنصرا من $[0,1]$ إذن $0 \le x \le 1$

و منه : $0 \le x^2 \le 1$

نعلم أن : $0 \le 2 \le n$

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نحصل على : $0 \le 2x^2 \le 1$

إذن : $0 \le x \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ و منه نستنتج أن : $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

بما أن f_n متصلة و تزايدية قطعا على $\left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$ و لدينا $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

إذن : f_n متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$

و بالتالي : f_n تقابل من $[0,1]$ نحو صورته $\left[0,\frac{4}{e}\right]$

نضع : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

لدينا : $g_n(0).g_n(1) = (f_n(0)-1)(f_n(1)-1)$

$= (0-1)\left(\frac{4}{e}-1\right)$

$\approx -0{,}47 < 0$

جميع النتائج المحصل عليها لحد الآن تخول لنا استعمال مبرهنة القيم الوسيطية

و بالتالي : يوجد عدد حقيقي وحيد u_n محصور بين 0 و 1

و يحقق : $g_n(u_n) = 0$

أو بتعبير آخر : المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا u_n من المجال $]0,1[$

④ أ

لدينا : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

$\Longrightarrow \quad f_{n+1}(x) = 4x^{n+1}e^{-x^2}$

$\Longrightarrow \quad f_{n+1}(x) = x\left(4x^n e^{-x^2}\right)$

$\Longrightarrow \quad f_{n+1}(x) = xf_n(x)$

و منه : $\boxed{f_{n+1}(u_n) = u_n.f_n(u_n)}$

لدينا حسب السؤال ③ $f_n(u_n) = 1$

إذن : $\boxed{f_{n+1}(u_n) = u_n.1 = u_n}$

④ ب

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$.

و لدينا كذلك : $u_n < 1$ لأن $u_n \epsilon]0,1[$

إذن : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

لأن : $f_{n+1}(u_n) = u_n$ حسب السؤال ④ أ

و : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ حسب السؤال ③

و بما أن f_{n+1} تقابل (متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$)

فإن : $u_n < u_{n+1}$

و منه $(u_n)_{n\ge2}$ متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة بالعدد 1 ($u_n < 1$) فإنها متقاربة

⑤ أ

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذن : $0 < \lim_\infty(u_n) \le 1$

و منه : $0 < \ell \le 1$

المتتالية $(u_n)_{n\ge2}$ مكبورة و تزايدية إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر و هذا ما يبرر الكتابة $0 < \ell \le 1$. و هذه النهاية يمكن أن تساوي 1 الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية . و في هذه الحالة نقول بأن العدد 1 محد علوي للمجموعة $\{u_n\ ,n \ge 2\}$.

⑤ ب

لدينا : $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ 0 < (u_n)^2 < 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad 1 < e^{(u_n)^2} < e$

نعلم أن : $f(u_n) = 1$

يعني : $4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$

و منه : $e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$

ننطلق من : $1 < e^{(u_n)^2} < e$

إذن : $1 < 4(u_n)^n < e$

نعلم أن الدالة ln تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ إذن :

$$0 < \ln(4(u_n)^n) < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \ln(4) + n\ln(u_n) < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

■ 5 ج

بما أن : $\boxed{\underbrace{\frac{-\ln 4}{n}}_{+\infty \to 0} < \ln(u_n) < \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}}_{+\infty \to 0}}$

إذن بالضرورة : $\lim_{n\infty} \ln(u_n) = 0$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$

و بالتالي : $\boxed{\ell = 1}$

<u>التمرين الخامس : (3,75 ن)</u>

■ 1

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

نضع : $y = -t$ إذن $dy = -dt$

إذا كان : $t = -x$ فإن $y = x$.

إذا كان : $t = -2x$ فإن $y = 2x$.

$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)} dy$$

$$= -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)} dy$$

$$= -F(x)$$

إذن : F دالة فردية .

■ 2 أ

ليكن : $x > 0$

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

$$= \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

$$= -\int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

$$= -\varphi(x) + \varphi(2x)$$

■ 2 ب

لدينا : $F(x) = -\varphi(x) + \varphi(2x)$

الدالة $x \to \varphi(x)$ قابلة للإشتقاق .

لأن $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ دالة متصلة إذن تقبل دالة أصلية و هي $\varphi(x)$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا كذلك : $x \to \varphi(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق

و بالتالي F قابلة للإشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق.

إذن : $F'(x) = -\varphi'(x) + 2\varphi'(2x)$

$$= \frac{-1}{ln\,(1+x^2)} + \frac{2}{ln\,(1+4x^2)}$$

$$= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{\ln[(1+x^2)^2] - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2)}$$

■ 2 ج

لدينا : $x > 0$

إذن : $1 + x^2 > 1$ و $1 + 4x^2 > 1$

و منه : $\ln(1+4x^2)\ .\ln(1+x^2) > 0$

و بالتالي إشارة $F'(x)$ تتعلق فقط بإشارة : $ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$

لنحل المعادلة : $ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 + 2x^2 + 1 = 1 + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2}$$

نحن بصدد دراسة تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$

إذن سوف نهتم بالحالة $x=\sqrt{2}$ فقط.

إذا كان $x>\sqrt{2}$ فإن $x^2(x^2-2)>0$

و منه : $\dfrac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}>1$

يعني : $ln\left(\dfrac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)>0$

إذن : $F^{'}(x)>0$

يعني F تزايدية قطعا على $]\sqrt{2},+\infty[$:

في الحالة الأخرى نجد أن F تناقصية على المجال $]0,\sqrt{2}[$.

■ 3 أ

ليكن $x>0$ إذن $2x>0$

و منه : $[x,2x]\subset\,]0,+\infty[$

و بما أن φ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

فإن φ متصلة و قابلة للإشتقاق على : $]x,2x[$

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$(\exists c\epsilon]x,2x[) :\ \frac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{2x-x}=\varphi'(c)$$

يعني : $(\exists c\epsilon]x,2x[) :\ \varphi(2x)-\varphi(x)=x\varphi'(c)$

يعني : $\boxed{F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}}$

■ 3 ب

لدينا حسب السؤال أ $0<x<c<2x$

$$\Longrightarrow\ 0<x^2<c^2<4x^2$$

$$\Longrightarrow\ 0<\ln(1+x^2)<\ln(1+c^2)<\ln(1+4x^2)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{\ln(1+4x^2)}<\frac{1}{\ln(1+c^2)}<\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<\frac{x}{\ln(1+c^2)}<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

■ 3 ج

لدينا حسب السؤال ب

$$\boxed{\frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}}$$

و لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x^2)}=+\infty$

يكفي أن نستعمل : $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\right)$

و لدينا كذلك: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+4x^2)}=+\infty$

إذن : $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty\right)$

و بنفس الطريقة و باستعمال النهاية : $\left(\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty\right)$

نجد : $\left(\displaystyle\lim_{x\to0^+}F(x)=+\infty\right)$ و $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0\right)$

■ 3 د

لدينا حسب السؤال ب $F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا : $\sqrt{e-1}\approx1{,}31>0$

إذن : $F(\sqrt{e-1})<\dfrac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+(e-1))}$

يعني : $\boxed{F(\sqrt{e-1})<\sqrt{e-1}}$ (1)

و لدينا كذلك: $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)$ و $\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\approx0{,}65>0$

إذن : $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\dfrac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1+\frac{4(e-1)}{4}\right)}$

يعني : $\boxed{F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}}$ (2)

نضع : $G(x)=F(x)-x$

من (1) و(2) نستنتج : $\boxed{G\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right).G(\sqrt{e-1})<0}$ (3)

لدينا F دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]0,\sqrt{2}]$

$\boxed{\text{إذن } G \text{ دالة متصلة و تناقصية قطعا على }]0,\sqrt{2}]}$ (4)

لأن : $G'(x)=F'(x)-1<0$

من (3) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية وجود حل وحيد للمعادلة $G(x)=0$ أو المعادلة $F(x)=x$ في المجال $]0,\sqrt{2}]$.

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة الاستدراكية 2010	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والإمتحانات	مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية .

نعتبر المجموعة :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\ /\ x\epsilon\mathbb{R}\right\}$$

0,50 ن	1 بين أن E جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$.
0,50 ن	2 أ بين أن التطبيق φ الذي يربط العدد الحقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.
0,50 ن	ب استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .
0,50 ن	ج حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x عدد حقيقي .
0,50 ن	د حل في المجموعة E المعادلة : $A^5X=B$ حيث : $A=M(2)$ و $B=M(12)$.
0,50 ن	3 بين أن المجموعة : $F=\{M(\ln(x))/\ x\epsilon\mathbb{R}_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

التمرين الثاني : (4,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

	1 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $\boxed{(E)\ :\ z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0}$
0,50 ن	أ تحقق أن العدد العقدي $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) .
0,50 ن	ب استنتج الحل الثاني b للمعادلة (E) .
0,50 ن	2 أ بين أن : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.
0,75 ن	ب أكتب العدد a على الشكل المثلثي .
	3 نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$. لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$.
0,50 ن	أ حدد ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ) .
0,50 ن	ب بين أن النقطتين O و C تنتميان إلى الدائرة (Γ) .
0,75 ن	ج بين أن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .

نسحب الكرات من الصندوق الواحدة الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

① أ) حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X .	0,25 ن
ب) أحسب احتمال الحدث $[X=1]$.	0,50 ن
ج) بين أن : $p[X=2]=\frac{5}{33}$	0,50 ن
د) أحسب احتمال الحدث $[X=3]$.	0,50 ن
② أ) بين أن : $E(X)=\frac{13}{11}$ (حيث : $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .)	0,50 ن
ب) أحسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$. (حيث $V(X)$ هي مغايرة المتغير العشوائي X .)	0,75 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0;1]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} \ ; \ 0\leq x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1.	0,50 ن
② أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1.	0,50 ن
③ أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم اعط جدول تغيراتها.	0,75 ن
④ أ) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$	0,50 ن
ب) أنشىء المنحنى $(\mathscr{C})$ مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0. (نأخذ : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=2cm$)	0,75 ن
⑤ بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I يحقق : $f(\alpha)=\alpha$.	0,50 ن
⑥ أ) بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو I .	0,25 ن
ب) حدد $f^{-1}(y)$ لكل عنصر y من المجال I .	0,50 ن

(II) نضع : $I_0 = \int_0^1 f(t)\,dt$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $\boxed{I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt}$

0,75 ن ① بين أن المتتالية $(I_n)_{n\geq 0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,75 ن ② بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n\geq 0}$.

(III) لكل عدد حقيقي x من المجال $J = [0;1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$\boxed{F_n(0) = \int_0^x f(t)\,dt}$ و $\boxed{F_n(x) = \int_0^x t^n f(t)\,dt}$ و $\boxed{F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt}$ و $\boxed{S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k(x)}$

1,00 ن ① بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in J)\ ;\ F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{(1-t)}\,dt$

0,50 ن ②أ بين أن الدالة : $x \to (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على المجال J .

0,50 ن ب استنتج أن الدالة : $t \to \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على المجال $[0,x]$ مهما يكن x من المجال J .

1,00 ن ③أ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in J)\ ;\ 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

0,50 ن ب استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = F(x)$

0,50 ن ④أ حدد $F(x)$ من أجل $x \in J$.

0,25 ن ب حدد النهاية : $\lim_{x\to 1^-} F(x)$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ 1

لتكن $M(x)$ و $M(y)$ مصفوفتين من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لدينا : $$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\(x+y)&1&0\\(x+y)^2&2(x+y)&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{M(x)\times M(y)=M(x+y)\in E}$$

إذن E جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

■ 2 أ

لدينا حسب نتيجة السؤال 1 :

$$M(x)\times M(y)=M(x+y)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(x)\times\varphi(y)=\varphi(x+y)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$

ليكن $M(y)$ عنصرا من E .

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $\varphi(x)=M(y)$

$$\varphi(x)=M(y)$$

$$\Leftrightarrow\quad M(x)=M(y)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{x=y}$$

و بالتالي المعادلة $\varphi(x)=M(y)$ تقبل حلا وحيدا و هو $x=y$

$$\Leftrightarrow\quad (\forall M(y)\in E)\,;\,(\exists!\,x\in E)\ :\ \varphi(x)=M(y)$$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

خلاصة : تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

■ 2 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة

بما أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $+$ هو 0

و كل عنصر x يقبل $(-x)$ كمماثل.

فإن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$

و كل عنصر $\varphi(x)$ يقبل $\varphi(-x)$ كمماثل.

و لدينا : $$\varphi(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

و $$\varphi(-x)=M(-x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-x&1&0\\x^2&-2x&1\end{pmatrix}$$

■ 2 ج

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

لدينا : $Sym(x)=-x$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi\big(Sym(x)\big)=\varphi(-x)$$

$$\Leftrightarrow\quad Sym\big(\varphi(x)\big)=\varphi(-x)$$

$$\Leftrightarrow\quad Sym\big(M(x)\big)=M(-x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \big(M(x)\big)^{-1}=M(-x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-x&1&0\\x^2&-2x&1\end{pmatrix}$$

■ 2 د

في البداية لدينا : $M(x+y)=M(x)\times M(y)$

$$\Leftrightarrow\quad M(x+\cdots+x)=M(x)\times\cdots\times M(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad M(nx)=\big(M(x)\big)^n$$

و منه : $A^5=(M(2))^5=M(10)$

إذن المعادلة $A^5X=B$ تكافئ $M(10)X=M(12)$

$$\Leftrightarrow\quad X=\big(M(10)\big)^{-1}\times M(12)$$

$$\Leftrightarrow\quad X=M(-10)\times M(12)$$

$$\Leftrightarrow\quad X=M(2)\in E$$

و بالتالي المعادلة $A^5X=B$ تقبل حلا وحيدا في E و هو المصفوفة $M(2)$

■ 3

نلاحظ أن F مجموعة غير فارغة لأن : $M(1)=M(\ln e)\in F$

و لدينا كذلك : $F\subset E$

و ذلك لأن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \ln(x)\in\mathbb{R}$

ليكن : $M(\ln x)$ و $M(\ln y)$ عنصرين من F

لدينا : $$M(\ln x)\times\big(M(\ln y)\big)^{-1}=M(\ln x)\times M(-\ln y)=M(\ln x-\ln y)=M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

بما أن : $x>0$ و $y>0$ فإن : $\frac{x}{y}>0$

و منه : $M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)\in F$

و بالتالي : $\boxed{(F,\times)\text{ زمرة جزئية للزمرة }(E,\times)}$.

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ 1 أ

تعويض و حساب بسيط يمنحك نصف نقطة مجانية. هنيئا

■ 1 ب

نستعمل علاقة مجموع جذري ثلاثية الحدود نحصل على : $a+b=\frac{4i}{1}$

$$\Leftrightarrow \quad b=4i-1-i(2-\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{b=-1+i(2+\sqrt{3})}$$

■ 2 أ

لدينا من جهة : $a=1+i(2-\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \quad a^2=1-(2-\sqrt{3})^2+2(2-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \quad a^2=\boxed{-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3}}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}=4(2-\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=4(2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

$$=\boxed{-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3}}$$

و بالتالي : $\boxed{a^2=4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}}$

■ 2 ب

نضع : $a=re^{i\theta}$

إذن : $a^2=r^2e^{2i\theta}=4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2=4(2-\sqrt{3}) \\ 2\theta\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \theta\equiv\frac{\pi}{12}[\pi] \end{cases}$$

و بالتالي : $a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{12}}$ أو $a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{\frac{13i\pi}{12}}$

بما أن : $2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}=1+i(2-\sqrt{3})$

و : $2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{13i\pi}{12}}=-1-i(2-\sqrt{3})$

فإنه في النهاية نحصل على : $\boxed{a=2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{12}}}$

■ 3 أ

بما أن $[A\,B]$ قطر للدائرة (Γ)

فإن Ω هي منتصف $[A\,B]$.

و منه : $z_\Omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{a+b}{2}=2i$

■ 3 ب

نحسب أولا شعاع الدائرة (Γ)

$$\frac{AB}{2}=\left|\frac{b-a}{2}\right|=\left|\frac{-1+i(2+\sqrt{3})-1-i(2-\sqrt{3})}{2}\right|$$

$$=|-1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

لدينا : $\Omega\mathcal{O}=|z_{\mathcal{O}}-z_\Omega|=|0-2i|=2$

و لدينا : $\Omega C=|z_C-z_\Omega|=\left|2i+2e^{\frac{i\pi}{7}}-2i\right|=\left|2e^{\frac{i\pi}{7}}\right|=2$

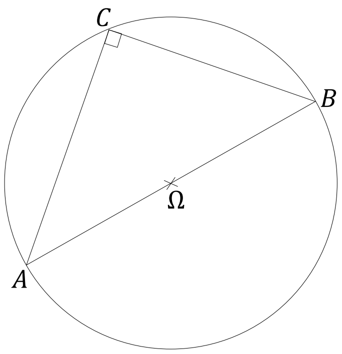
إذن : $\mathcal{O}\Omega=\Omega C=\frac{AB}{2}=2$

و بالتالي : $\boxed{\mathcal{O}}$ و C نقطتان من الدائرة (Γ) .

■ 3 ج

لدينا C نقطة من الدائرة (Γ) التي قطرها $[AB]$

إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في C



و منه : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$$

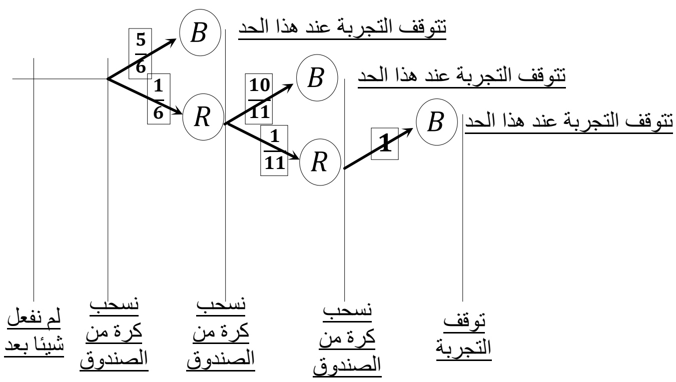
$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{c-a}{c-b}\right)\in i\mathbb{R}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نلاحظ أن النموذج الأمثل لدراسة هذه التجربة العشوائية هو نموذج الشجرة :



■ 1 أ ب ج د

من خلال الشجرة نستنتج ما يلي :

$$X(\Omega) = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$$

$$P[X=1] = \frac{5}{6}$$

$$P[X=2] = \frac{1}{6} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{33}$$

$$P[X=3] = 1 - P[X=1] - P[X=2] = \frac{1}{66}$$

■ 2 أ

لدينا :

$$E(X) = 1 \times P[X=1] + 2 \times P[X=2] + 3 \times P[X=3]$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = \frac{5}{6} + \frac{10}{33} + \frac{3}{66} = \frac{13}{11}$$

■ 2 ب

لدينا :

$$E(X^2) = 1^2 P[X=1] + 2^2 P[X=2] + 3^2 P[X=3]$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{20}{33} + \frac{9}{66}$$

$$= \boxed{\frac{52}{33}}$$

إذن :

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{65}{363}}$$

التمرين الرابع (المسألة) : (10 ن)

■ (I) 1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{1 - \ln(1-x)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \ln(1 - 1^-)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \ln(0^+)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - (-\infty)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty} \right)$$

$$= 0 = f(1)$$

إذن f دالة متصلة على يسار العدد 1

■ (I) 2

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)(1 - \ln(1-x))}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1-x)\ln(1-x) - (1-x)}$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0^+ \\ u = 1-x}} \left(\frac{1}{u \ln u - u} \right)$$

$$= \frac{1}{0 - 0^+}$$

$$= -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f غير قابلة للإشتقاق على يسار 1

■ (I) 3

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $[0;1[$ لأنها تشكيلة مُعَرَّفة من دوال مُعَرَّفة و قابلة للإشتقاق على $[0;1[$

ليكن x عنصرا من $[0;1[$

لدينا :

$$f'(x) = \frac{-(1 - \ln(1-x))'}{(1 - \ln(1-x))^2} = \frac{-1}{(1-x)(1 - \ln(1-x))^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$

إذا كان $x < 1$ فإن : $f'(x) < 0$

إذن f دالة تناقصية قطعا على $[0;1[$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	‖
f	1	$\searrow$	0

■ (I)④ أ

ليكن x عنصرا من $[0;1[$

لدينا :

$$f''(x) = \frac{-\left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)'}{\left((1-x)(1-ln(1-x))^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) = \frac{-(1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))}{\left((1-x)(1-ln(1-x))^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f''(x) = \frac{-(1+\ln(1-x))}{(1-x)^2(1-ln(1-x))^3}}$$

بما أن $x \in [0,1[$ فإن : $x > 1-e$ لأن : $1-e \approx -1{,}7 < 0$

إذن : $\ln(1-x) < 1$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\ln(1-x) > 0$$

و بالتالي : تنعدم $f''(x)$ عندما ينعدم التعبير $1+\ln(1-x)$

لنحل المعادلة $1+\ln(1-x) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-x) = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{e-1}{e}}$$

إذا كان : $x > \left(\frac{e-1}{e}\right)$ فإن : $1-x < e^{-1}$

و منه : $1+\ln(1-x) < 0$ يعني : $f''(x) > 0$

و إذا كان : $x < \left(\frac{e-1}{e}\right)$ فإن : $1-x > e^{-1}$

و منه : $1+\ln(1-x) > 0$ يعني : $f''(x) < 0$

نلاحظ إذن أن f'' تنعدم في النقطة ذات الأفصول $\left(\frac{e-1}{e}\right)$ و تتغير إشارتها بجوار هذه النقطة .

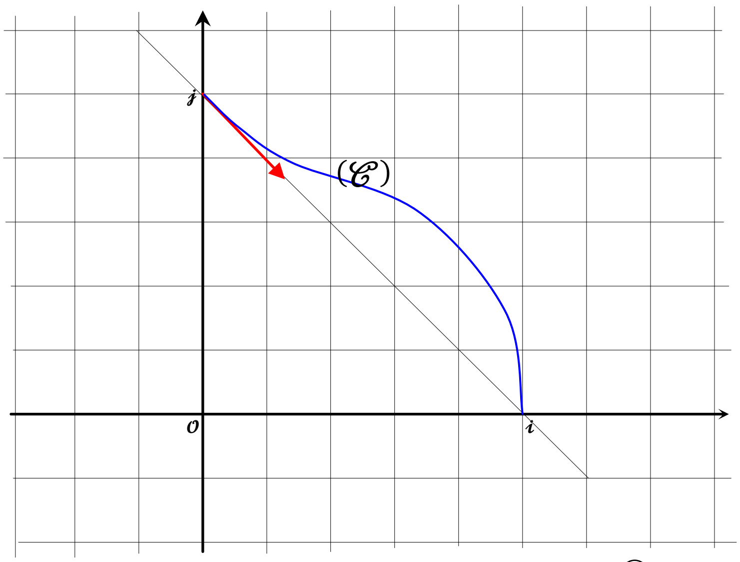
إذن النقطة ذات الأفصول $\left(\frac{e-1}{e}\right)$ هي نقطة الإنعطاف الوحيدة لـ $(\mathscr{C})$

■ (I)④ ب

لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 0 هي :

$$(\mathrm{T}): \ y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{T}): \ y = -x+1$$



■ (I)⑤

لدينا الدالة f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال I .

نضع : $h(x) = f(x) - x$

لدينا : $h'(x) = f'(x) - 1$

و نعلم أن : $\forall\, x \in [0;1[\ ; \ f'(x) < 0$

إذن : $\forall\, x \in [0;1[\ ; \ f'(x) < 1$

أي : $\forall\, x \in [0;1[\ ; \ h'(x) < 0$

إذن h متصلة و تناقصية قطعا على المجال I .

و منه : h تقابل من المجال I نحو صورته $h(I)$

و لدينا : $h(I) = h([0,1]) = [h(1);h(0)] = [-1;1]$

و بما أن : $0 \in [-1\,;1]$

فإن 0 يمتلك سابقا واحدا α من المجال I

يعني : $\exists!\ \alpha \in I \ ; \ h(\alpha) = 0$

أي : $\exists!\ \alpha \in I \ ; \ f(\alpha) = \alpha$

■ (I)⑥ أ

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال I .

إذن f تقابل من I نحو صورته $f(I)$

و لدينا $f(I) = f([0,1]) = [f(1);f(0)] = [0;1] = I$

و بالتالي : f تقابل من I نحو I .

ليكن x و y عنصرين من I بحيث : $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\ln(1-x)} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\ln(1-x) = \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1-x) = \left(1-\frac{1}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-x) = e^{\frac{y-1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1-e^{\frac{y-1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f^{-1}(y) = 1-e^{\frac{y-1}{y}}}$$

■ ①(II)

لدينا $t \in [0,1]$ إذن : $t \le 1$

نضرب طرفي المتفاوتة في العدد الموجب t^n نحصل على : $t^{n+1} \le t^n$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة $f(t)$ نحصل على :

$$f(t)\cdot t^{n+1} \le f(t)\cdot t^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 t^{n+1} f(t)\,dt \le \int_0^1 t^n f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad I_{n+1} \le I_n$$

و منه $\boxed{(I_n)_{n\ge 0} \text{ متتالية تناقصية.}}$

و لدينا : $t \ge 0$ إذن : $t^n f(t) \ge 0$

و منه : $\int_0^1 t^n f(t)\,dt \ge 0$

أي : $\boxed{I_n \ge 0}$

إذن $(I_n)_{n\ge 0}$ متتالية تناقصية و مصغورة بالعدد 0 .

و بالتالي : $(I_n)_{n\ge 0}$ متتالية متقاربة .

■ ②(II)

ليكن t عددا حقيقيا بحيث $0 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \quad -t \le 0$$

$$\Rightarrow \quad 1-t \le 1$$

$$\Rightarrow \quad 1-\ln(1-t) \ge 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{1-\ln(1-t)} \le 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t^n}{1-\ln(1-t)} \le t^n$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{t^n}{1-\ln(1-t)}\,dt \le \int_0^1 t^n\,dt$$

$$\Rightarrow \quad I_n \le \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_n \le \frac{1}{n+1}} \ (1)$$

و بما أن المتتالية $(I_n)_{n\ge 0}$ مصغورة بـ 0

فإن : $(\forall n \ge 0) \ ; \ I_n \ge 0$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \ge 0) \ ; \ 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

و بما أن : $\underbrace{0}_{\xrightarrow{\infty}\ \boxed{0}} \le I_n \le \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow{\infty}\ \boxed{0}}$

فإن : $\boxed{\lim_{n\infty} I_n = 0}$

■ ①(III)

القاعدة التي سوف نستعملها في هذا السؤال هي :

$$\boxed{(\forall t \ne 1) \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}}$$

و تُعَبِّرُ عن مجموع حدود متتابعة من المتتالية الهندسية $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

لدينا : $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt - \sum_{k=0}^{n} F_k(x)$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt - \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} t^k f(t)\right)dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt - \int_0^x \left(f(t)\sum_{k=0}^{n} t^k\right)dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,dt - \int_0^x \left(f(t)\left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right)\right)dt$$

$$= \int_0^x \frac{f(t)-(1-t^{n+1})f(t)}{1-t}\,dt = \boxed{\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\,dt}$$

■(III)②أ

نضع : $\psi(x) = (1-x)(1-\ln(1-x))$

لدينا : $\psi'(x) = -(1-\ln(1-x)) + \dfrac{1-x}{1-x}$

$$\Leftrightarrow \quad \psi'(x) = \ln(1-x)$$

نعلم أن $x \epsilon J$ إذن : $x > 0$

و منه : $-x < 0$ أي : $(1-x) < 1$

و منه : $\ln(1-x) < 0$

يعني : $\psi'(x) < 0$

و بالتالي : ψ دالة تناقصية قطعا على المجال J .

■(III)②ب

نضع : $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{(1-t)}$

نلاحظ في البداية أن : $\dfrac{1}{\psi(t)} = \dfrac{f(t)}{(1-t)} = \varphi(t)$

ليكن t_1 و t_2 عنصرين من $[0;x]$ ($x\epsilon J$) بحيث : $t_1 > t_2$

$$\Rightarrow \quad \psi(t_1) < \psi(t_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\psi(t_1)} > \frac{1}{\psi(t_2)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t_1) > \varphi(t_2)$$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي :

$$\boxed{t_1 > t_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t_1) > \varphi(t_2)}$$

إذن : φ دالة تزايدية قطعا على J .

■(III)③أ

ننطلق من $t > 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1-t < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\ln(1-t) > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\ln(1-t)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t) < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{t^{n+1} f(t) < t^{n+1}} \quad (1)$$

و لدينا : $0 \le t \le x$

$$\Leftrightarrow \quad -x \le -t \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-x \le 1-t \le 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-x} \ge \frac{1}{1-t} \ge 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{1-t} \le \frac{1}{1-x}} \quad (2)$$

نضرب المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \le \frac{t^{n+1}}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt \le \frac{1}{(1-x)}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt \le \frac{1}{(1-x)}\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$$

و بما أن : $x < 1$ فإن : $\left(\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\right) < \dfrac{1}{n+2}$

و منه : $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\right) \le \left(\dfrac{1}{n+2}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

و بالتالي : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{F(x) - S_n(x) \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)} \quad (3)$$

و بما أن : $x > 0$ فإن : $1 < \dfrac{1}{1-x}$

و منه : $\dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \ge 0$

أي : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt \ge 0$

يعني : $\boxed{F(x) - S_n(x) \ge 0}$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (\forall x\epsilon J)\ :\ 0 \le F(x) - S_n(x) \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

■(III)③ب

بما أن : $(\forall x\epsilon J)\ ;\ \underbrace{0}_{\to 0} \leq F(x) - S_n(x) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\to 0}$

فإن : $\lim_{n\infty} F(x) - S_n(x) = 0$

يعني : $\boxed{(\forall x\epsilon J)\ ;\ \lim_{n\infty} F(x) = S_n(x)}$

■(III)④أ

ليكن $x\epsilon J$ و $t\ \epsilon\ [0;x]$

لدينا : $f(t) = \dfrac{1}{1-\ln(1-t)}$

و لدينا : $f^{'}(t) = \dfrac{-1}{(1-t)(1-\ln(1-t))^2}$

إذن : $\dfrac{-f^{'}(t)}{f(t)} = \dfrac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \dfrac{f(t)}{1-t}$

و منه : $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt = -\int_0^x \frac{f^{'}(t)}{f(t)}dt$

$\Leftrightarrow\quad F(x) = -[\ln(f(t))]_0^x$

$\Leftrightarrow\quad F(x) = -(\ln(f(x)) - \ln(f(0)))$

$\Leftrightarrow\quad F(x) = -(-\ln(1-\ln(1-x)) - \ln(1))$

$\Leftrightarrow\quad \boxed{F(x) = \ln(1-\ln(1-x))}$

■(III)④ب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} F(x) &= \lim_{x\to 1^-} \ln(1-\ln(1-x))\\ &= \ln(1-\ln(1-1^-))\\ &= \ln(1-\ln(0^+))\\ &= \ln\big(1-(-\infty)\big)\\ &= \ln(+\infty)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

مادة الرياضيات **مسلك العلوم الرياضية أ و ب** **المعامل 9** **مدة الإنجاز : أربع ساعات**	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات	**الإمتحان الوطني الموحد** **لنيل شهادة البكالوريا** **الدورة العادية 2011**

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

0,50 ن — **1** بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}:\ \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$

0,50 ن — **2** بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن — **1** أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن — ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

0,50 ن — ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده

0,50 ن — **2** بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

3 نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \longmapsto \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن — أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن — ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن — **1** بين أن N يقبل القسمة على العدد 11

0,75 ن — **2** أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$

0,50 ن — ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0,50 ن — ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .

0,50 ن — **3** بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن) الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m):\ z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

0,50 ن ① تحقق أن العدد $z_1=2-m$ حل للمعادلة (E_m) .

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

0,50 ن (أ) بين أن $\quad z_1z_2=1 \iff im^2+2(1-i)-3=0$

1,00 ن (ب) حدد قيمتي m بحيث $z_1z_2=1$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z'=-(z-1)+1$

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن $z"$ لحق النقطة $M"$ صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

0,25 ن ① (أ) بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1

0,25 ن (ب) بين أن : $z"=iz+2$.

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

0,50 ن (أ) أحسب $\dfrac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M"$

0,50 ن (ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و $M"$ متداورة.

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E)\ :\ e^x=x^n$ بحيث $n\in\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D}=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{lnx}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,25 ن ① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $\left(e^x=x^n \iff n=f(x)\right)$.

0,50 ن ② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

1,50 ن ③ أحسب النهايات التالية ثم أوِّل هندسيا النتائج المحصل عليها :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x) \text{ و } \lim_{x\to1^+}f(x) \text{ و } \lim_{x\to1^-}f(x)$$

0,75 ن ④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها.

0,50 ن ⑤ بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها.

0,50 ن ⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$

0,50 ن ⑦ بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1<\alpha_n<e<b_n$.

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$.

① بين أن $(\forall n \geq 3):\ b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$	0,50 ن
② ⓐ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0,50 ن
ⓑ بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$.	0,50 ن
ⓒ بين أن : $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$	0,50 ن

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\boxed{F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}$$

① ⓐ بين أن : $(\forall x \geq 0):\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$.	0,50 ن
ⓑ بين أن : $(\forall x \geq 1):\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.	0,50 ن
② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0):\ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$.	0,50 ن

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\boxed{\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}}$$

ⓐ بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.	0,25 ن
ⓑ بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.	0,75 ن

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

ⓐ بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.	0,50 ن
ⓑ استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .	0,50 ن

التمرين الأول : (4,0 ن) الجزء الأول

■ ①

سوف نستعمل البرهان بالترجع .

من أجل $k=0$ لدينا : $A^{2.0}=A^0=I$.

نفترض أن : $(\forall k\in\mathbb{N})\ :\ A^{2k}=I$.

لدينا :

$$\begin{aligned} A^{2(k+1)} &= A^{2k}\times A^2 \\ &= I\times A^2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{-\sqrt2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{-\sqrt2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall k\in\mathbb{N})\ :\ A^{2k}=I$.

■ ②

لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

لدينا : $(\forall k\in\mathbb{N})\ :\ A^{2k}=I$.

من أجل $k=1$ لدينا : $A^2=A\times A=I$:

و منه A مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة A نفسها

يعني : $A^{-1}=A$.

الجزء الثاني

■ ① أ

ليكن x و y عنصرين من $]\alpha,+\infty[$

إذن : $x>\alpha$ و $y>\alpha$.

و منه : $(x-\alpha)>0$ و $(y-\alpha)>0$.

يعني : $(x-\alpha)(y-\alpha)>0$ إذن $(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha>\alpha$

أي : $x*y\ \epsilon\ I$.

و بالتالي : $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ ① ب

التبادلية : ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :

$$\begin{aligned} x*y &= (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha \\ &= (y-\alpha)(x-\alpha)+\alpha \\ &= y*x\end{aligned}$$

إذن $*$ تبادلي في I .

التجميعية : ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من I

لدينا :

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*\big((y-\alpha)(z-\alpha)+\alpha\big) \\ &= (x-\alpha)\times[(y-\alpha)(z-\alpha)+\alpha-\alpha]+\alpha \\ &= (x-\alpha)\times[yz-y\alpha-\alpha z+\alpha^2]+\alpha \\ &= xyz-xy\alpha-xz\alpha+\alpha^2x-yz\alpha+\alpha^2y+\alpha^2z-\alpha^3+\alpha \\ &= \boxed{xyz-\alpha(xy+xz+yz)+\alpha^2(x+y+z)-(\alpha^3-\alpha)}\ (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= \big((x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha\big)*z \\ &= [(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha-\alpha]\times(z-\alpha)+\alpha \\ &= [xy-x\alpha-\alpha y+\alpha^2]\times(z-\alpha)+\alpha \\ &= xyz-xy\alpha-xz\alpha+\alpha^2x-yz\alpha+\alpha^2y+\alpha^2z-\alpha^3+\alpha \\ &= \boxed{xyz-\alpha(xy+xz+yz)+\alpha^2(x+y+z)-(\alpha^3-\alpha)}\ (2)\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $x*(y*z)=(x*y)*z$

يعني : $*$ تجميعي في I .

■ ① ج

ليكن e العنصر المحايد لـ $*$ في I .

إذن : $x*e=e*x=x$

ننطلق من الكتابة $x*e=x$ (لأن القانون $*$ تبادلي)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\quad xe-x\alpha-\alpha e+\alpha^2=x-\alpha \\ &\Leftrightarrow\quad e(x-\alpha)=x-\alpha^2+\alpha x-\alpha \\ &\Leftrightarrow\quad e(x-\alpha)=(x-\alpha)(1+\alpha)\end{aligned}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\dfrac{1}{(x-\alpha)}$ (لأن : $x>\alpha$)

نحصل على : $e=(1+\alpha)$

و لدينا : $1>0$ إذن : $1+\alpha>\alpha$.

و منه : $(1+\alpha)\ \epsilon\ I$

و بالتالي : $(1+\alpha)$ هو العنصر المحايد لـ $*$ في I .

■ ②

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

القانون $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I

القانون $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة I

القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في المجموعة I

لكي يكون الزوج $(I,*)$ زمرة يكفي أن يقبل كل عنصر من I مماثلا بالقانون $*$.

ليكن x عنصرا من I .

نقول بأن y هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I إذا و فقط إذا كان :

$$\boxed{x*y=y*x=(1+\alpha)}$$

ننطلق من الكتابة : $x * y = (1+\alpha)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha = (1+\alpha) \\ &\Leftrightarrow xy - \alpha x - \alpha y + \alpha^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow y(x-\alpha) = 1 + \alpha(x-\alpha) \end{aligned}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\dfrac{1}{(x-\alpha)}$
(لأن : $x > \alpha$)

نحصل على : $y = \dfrac{1}{(x-\alpha)} + \alpha$

بما أن : $x > \alpha$ فإن : $(x-\alpha) > 0$ و منه : $\dfrac{1}{(x-\alpha)} > 0$

إذن: $\dfrac{1}{(x-\alpha)} + \alpha > \alpha$

يعني : $\left(\dfrac{1}{x-\alpha} + \alpha\right) \epsilon\, I$

و بالتالي كل عنصر x يقبل مماثلا في I بالقانون $*$ و هو العنصر : $\left(\dfrac{1}{x-\alpha} + \alpha\right)$

خلاصة : $(I,*)$ زمرة تبادلية.

■ ③ أ

التشاكل : ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :
$$\begin{aligned} \varphi(x*y) &= \frac{1}{(x*y)-\alpha} = \frac{1}{(x-\alpha)(y-\alpha)} \\ &= \left(\frac{1}{x-\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{y-\alpha}\right) = \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

التقابل : ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

$$\varphi(x) = y \;\Big|\; \begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-\alpha} = y \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{1+\alpha y}{y}\right) \end{aligned}$$

نلاحظ أن المعادلة $\varphi(x) = y$ تقبل حلا وحيدا و هو : $\left(\dfrac{1+\alpha y}{y}\right)$

إذن φ تقابل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ ③ ب

لدينا : $x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x*x*x = \alpha^3+\alpha \\ &\Leftrightarrow \varphi(x*x*x) = \varphi(\alpha^3+\alpha) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x)\times\varphi(x)\times\varphi(x) = \varphi(\alpha^3+\alpha) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\times\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^3} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^3 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \end{aligned}$$

لدينا : $\alpha > 0$ إذن : $2\alpha > \alpha$

و منه : $2\alpha\ \epsilon\ ]\alpha;+\infty[= I$

و بالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا و هو 2α

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ ①

لدينا :
$$\begin{cases} 1 \equiv 1[11] \\ 10^1 \equiv -1[11] \\ 10^2 \equiv 1[11] \\ \quad\vdots \\ 10^{2k} \equiv 1[11] \\ 10^{2k+1} \equiv -1[11] \\ \quad\vdots \\ 10^{2009} \equiv -1[11] \end{cases}$$

عند المرور إلى المجموع بين أطراف هذه المتوافقات نحصل على :

$$1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \equiv \left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right)[11]$$

و لدينا :
$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{2009}(-1)^k\right) &= \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k\ \text{زوجي}}}^{2009}(-1)^k\right) + \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k\ \text{فردي}}}^{2009}(-1)^k\right) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{1004}(-1)^{2m}\right) + \left(\sum_{m=0}^{1004}(-1)^{2m+1}\right) \\ &= 1004 - 1004 = 0 \end{aligned}$$

إذن: $1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \equiv 0[11]$

يعني : $\underbrace{111\cdots1}_{\text{2010 مرة}} \equiv 0[11]$

و بالتالي : $\boxed{11 / N}$

■ ② أ

نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 لا تقسم العدد 2011

إذن : 2011 عدد أولي .

و لدينا :
$$\begin{aligned} N &= 1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \\ &= 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^{2009} \end{aligned}$$

إذن N هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 10

إذن : $N = \dfrac{10^{2010}-1}{10-1}$

و بالتالي : $\boxed{9N = 10^{2010} - 1}$

■ ②ب

لدينا 2011 عدد أولي و $10 \wedge 2011 = 1$ إذن حسب مبرهنة $Fermat$: $10^{2011-1} \equiv 1[2011]$

يعني : $2011 \,/\, (10^{2010} - 1)$

يعني : $\boxed{2011 \,/\, 9N}$

■ ②ج

بما أن : $2011 \,/\, 9N$ و $2011 \wedge 9 = 1$

فإنه حسب مبرهنة $Gauss$: $2011 \,/\, N$

■ ③

لدينا : $22121 = 11 \times 2011$

و لدينا كذلك حسب ما سبق : $2011 \,/\, N$ و $11 \,/\, N$.

إذن $11 \times 2011 \,/\, N$ لأن $2011 \wedge 11 = 1$.

و بالتالي : $\boxed{22121 \,/\, N}$

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ ①

بتعويض z بالعدد العقدي $(2-m)$ في المعادلة (E_m) نحصل على الصفر

إذن $(2-m)$ حل للمعادلة (E_m) .

■ ②أ

باستعمال خاصية جداء حلي ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c = 0$

نجد : $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

يعني : $z_1 z_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4 - im^2 - 2(1-i)m}{1} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 - im^2 - 2m + 2im = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

■ ②ب

لنحل المعادلة : $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

لدينا : $\Delta = 4(1-i)^2 + 12i = 4i = \left(\sqrt{2}(1+i)\right)^2$

إذن : $m_1 = \dfrac{2(i-1) - \sqrt{2}(1+i)}{2i} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

و $m_2 = \dfrac{2(i-1) + \sqrt{2}(1+i)}{2i} = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

الجزء الثاني

■ ①أ

لتكن E صورة العدد العقدي 1

لدينا : $\mathcal{S}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow \quad z' - 1 = -(z-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad z_{M'} - z_E = -(z_M - z_E)$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{EM'} = -\overrightarrow{EM}$$

إذن : E هي منتصف القطعة $[MM']$.

و بالتالي : $\boxed{\mathcal{S} \text{ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة } E}$.

■ ①ب

لدينا الكتابة $M'' = \mathcal{R}(M)$ تكافئ :

$$(z_{M''} - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_M - z_\Omega) \; .$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' - (1+i) = e^{\frac{i\pi}{2}}\big(z - (1+i)\big)$$

و لدينا : $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

إذن : $z'' - (1+i) = i(z - 1 - i)$

$$\Leftrightarrow \quad z'' = iz - i + 1 + i + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad z'' = iz + 2$$

■ ②أ

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

$z'' = iz + 2$ و $z' - 1 = -(z-1)$

إذن : $\boxed{\dfrac{z'' - 2}{z' - 2} = \dfrac{iz}{z} = i} \; (*) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dfrac{z'' - 2}{z' - 2} \in i\mathbb{R}}$

و منه : $AM''M'$ مثلث قائم الزاوية في النقطة A .

و من النتيجة $(*)$ نستنتج أن : $\left|\dfrac{z'' - 2}{z' - 2}\right| = |i| = 1$

يعني : $|z'' - 2| = |z' - 2|$

أي : $AM'' = AM'$.

إذن $AM'M''$ متساوي الساقين رأسه A .

و بالتالي : $\boxed{AM'M'' \text{ مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في } A}$.

■ ②ب

العبارة : A و Ω و M' و M'' متداورة تكافئ :

$$arg\left(\frac{z_{M''} - z_A}{z_{M'} - z_A}\right) \equiv arg\left(\frac{z_{M''} - z_\Omega}{z_{M'} - z_\Omega}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z'' - 2}{z' - 2}\right) \equiv arg\left(\frac{z'' - 1 - i}{z' - 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{iz}{-z}\right) \equiv arg\left(\frac{iz + 1 - i}{-z + 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} \equiv arg\left(-i\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right)\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} \equiv arg(-i) + arg\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} + arg\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right) \in \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)} = \left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\bar{z}+1-i}{-\bar{z}+1+i} = \frac{-z+1+i}{-z+1-i}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-z+1-i)(-\bar{z}+1-i) = (-\bar{z}+1+i)(-z+1+i)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $4i - 2zi - 2\bar{z}i = 0$

نضع : $z = x + iy$ نحصل على :

$$4i - 2i(x+iy) - 2i(x-iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1}$$

و بالتالي مجموعة النقط M التي من أجلها : A و Ω و M' و M'' متداورة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 1$.

التمرين الرابع : (6,5 ن)

الجزء الأول

■ 1

ليكن x عنصرا من $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ننطلق من الكتابة : $n = f(x)$

$$\Leftrightarrow \quad n = \frac{x}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \ln x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{n \ln x} = e^{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{n} = e^{x}$$

■ 2

لدينا : $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

إذن f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و لدينا : $f_d'(0) = 0$.

■ 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

من النهايتين :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

نستنتج أن المستقيم : $x = 1$ مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C}_f)$

و من النهايتين :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

نستنتج أن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

■ 4

لدينا f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$
لأنها خارج دالتين قابلتين للإشتقاق.

ليكن x عنصرا من $[0,1[\cup]1,+\infty[$

لدينا : $\displaystyle f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

إشارة f' متعلقة إذن بإشارة $\ln x - 1$ فقط.

و لدينا : $\displaystyle f(e) = \frac{e}{ln\, e} = e$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

■ 5

لدينا :

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right)' = \frac{\frac{(\ln x)^2}{x} - (\ln x - 1)\left(\frac{2\ln x}{x}\right)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{(\ln x)(2-\ln x)}{x(\ln x)^4} = \frac{(2-\ln x)}{x(ln\, x)^3}$$

f'' تنعدم في e^2 .

و لدينا : $(\forall x \geq e^2) : f''(x) < 0$

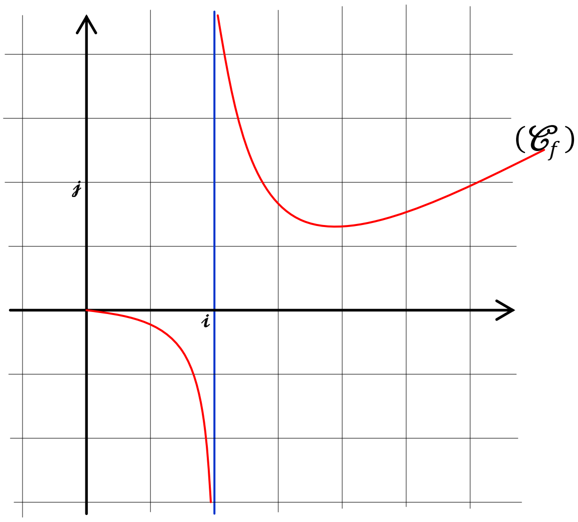
و $(\forall x \leq e^2) : f''(x) > 0$

إذن f'' تنعدم في e^2 و تغير إشارتها بجواره

إذن : $(e^2, f(e^2))$ هي نقطة انعطاف لـ $(\mathscr{C}_f)$

و لدينا : $\displaystyle (e^2, f(e^2)) \leftrightsquigarrow \left(e^2 \,,\, \frac{e^2}{2}\right)$

■ 6 إنشاء : $(\mathscr{C}_f)$



■ 7

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]1,e[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]1,e[$ نحو المجال $f(]1,e[)$

و لدينا : $f(]1,e[) =]e,+\infty[$.

و بما أن : $n \in]e,+\infty[$ لأن $n \geq 3$.

فإن : n يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f_n في المجال $]1,e[$.

أو بتعبير آخر : $f_n(\alpha_n) = n \quad : \quad \exists!\, \alpha_n \in]1,e[$.

إذن حسب السؤال 1 $\exists!\, \alpha_n \in]1,e[\quad : \quad e^{\alpha_n} = (\alpha_n)^n$.

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]e,+\infty[$.

إذن : f_n تقابل من المجال $]e,+\infty[$ نحو المجال $f(]e,+\infty[)$

بحيث : $f(]e,+\infty[) =]e,+\infty[$.

و بما أن $n \in]e,+\infty[$ لأن $n \geq 3$.

فإن : n يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f_n على المجال $]e,+\infty[$.

يعني : $f_n(b_n) = n \quad : \quad \exists!\, b_n \geq e$.

و بالتالي : $e^{b_n} = (b_n)^n \quad : \quad \exists!\, b_n \geq e$.

الجزء الثاني

■ 1

سوف نستعمل في هذا السؤال : $e^{b_n} = (b_n)^n$.

لدينا حسب السؤال 7 $b_n \geq e$.

$$\Rightarrow \quad (b_n)^n \geq e^n$$
$$\Rightarrow \quad e^{b_n} \geq e^n$$
$$\Rightarrow \quad b_n \geq n$$

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

فإنه بالضرورة : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

■ 2 أ

لدينا : $(n+1) > n$ إذن : $f_n(a_{n+1}) \geq f_n(a_n)$

و بما أن f_n دالة تناقصية قطعا على $]1,e]$ فإن : $a_{n+1} \leq a_n$

و منه : $(a_n)_{n\geq3}$ متتالية تناقصية .

و بما أن هذه المتتالية مصغورة بالعدد 1 (لأن : $a_n > 1$ حسب السؤال 7)

فإن : $(a_n)_{n>3}$ متتالية متقاربة .

■ 2 ب

لدينا : $1 < a_n < e$ يعني : $1 < \ln(e^{a_n}) < e$

و منه : $1 < \ln((a_n)^n) < e$ يعني : $1 < n\ln(a_n) < e$

إذن : $$\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$$

و بما أن : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0$$

فإن : $$\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 0$$

إذن : $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 1}$$

■ 2 ج

لدينا : $$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{(a_n)}$$

لأن : $(a_n)^n = e^{(a_n)}$

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(a_n)} = e$

و بالتالي : $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (a_n)^n = e}$$

<u>التمرين الخامس : (3,5 ن)</u>

■ 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال : $[0,+\infty[$ و t عددا حقيقيا

بحيث $0 \leq t \leq x$.

إذن : $-x^2 \leq -t^2 \leq 0$.

و منه : $e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1$.

يعني : $$\int_0^x e^{-x^2}dt \leq \int_0^x e^{-t^2}dt \leq \int_0^x 1dt$$

أي : $$e^{-x^2}\int_0^x e^{-x^2}dt \leq e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \leq e^{-x^2}\int_0^x 1dt$$

أي : $$e^{-2x^2}[t]_0^x \leq F(x) \leq e^{-x^2}[t]_0^x$$

إذن : $$xe^{-2x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$$

و بما أن : $x \geq 0$ فإن $xe^{-2x^2} \geq 0$.

و بالتالي : $\boxed{0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}}$.

■ 1 ب

ليكن $x \geq 1$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الموجب x نحصل على :

$x^2 \geq x$ و هذا يعني : $-x^2 \leq -x$.

و منه : $(\forall x \geq 1)\ :\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

بما أن : $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)} = 0 \times 0 = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

■ 2

لدينا $t \to e^{-t^2}$ دالة متصلة على المجال $[0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ

بحيث : $e^{-t^2} = \varphi'(t)$

و لدينا : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}\varphi(x)$

بما أن الدالتين : $x \to \varphi(x)$ و $x \to e^{-x^2}$ قابلتين للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

فإن F قابلة للإشتقاق كذلك على المجال $[0,+\infty[$.

و لدينا : $F'(x) = \left(e^{-x^2}\varphi(x)\right)'$

$= \left(e^{-x^2}\right)'\varphi(x) + \left(e^{-x^2}\right)\varphi'(x)$

$= (-2x)\left(e^{-x^2}\right)\varphi(x) + \left(e^{-x^2}\right)\left(e^{-x^2}\right)$

$= -2xF(x) + e^{-2x^2}$

■ 3 أ

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} G(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} F(tg\,x)$

نضع : $y = tg\,(x)$.

إذا كان : $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ فإن : $tg\,(x) \to +\infty$.

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} F(tg\,x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0 = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$

■ 3 ب

لدينا G دالة متصلة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و قابلة للإشتقاق على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

و لدينا : $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $G(0) = F(tg\,0) = F(0) = 0$

إذن : $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = G(0)$

و منه حسب مبرهنة $(Rolle)$: $G'(\alpha) = 0$: $\left(\exists \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

نضع : $c = tg(\alpha)$.

لدينا : $G(x) = F(tg\,x)$ و منه : $G'(\alpha) = F'(tg\,\alpha) = F'(c)$

إذن إذا كان $G'(\alpha) = 0$ فإن : $\boxed{F'(c) = 0}$ (1)

من جهة أخرى إذا كان $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $tg(\alpha) \in \left]0,+\infty\right[$ لأن tg دالة تزايدية على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

إذن : $\boxed{c \in \left]0,+\infty\right[}$ (2)

و لدينا : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$ و $F'(c) = 0$

إذن : $e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$

يعني : $\boxed{F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\left(\exists c \in \left]0,+\infty\right[\right)\ :\ F'(c) = 0 \text{ و } F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$$

■ 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $\left]0,+\infty\right[$

لدينا : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

إذن : $F''(x) = -4xe^{-2x^2} - 2F(x) - 2xe^{-2x^2} + 4x^2F(x)$

و لدينا : $H'(x) = \left(\frac{F'(x)e^{x^2}}{2x}\right)'$

$= \frac{2x\left(F''(x)e^{x^2} + 2xF'(x)e^{x^2}\right) - 2F'(x)e^{x^2}}{4x^2}$

$= \frac{2xF''(x)e^{x^2} + 4x^2F'(x)e^{x^2} - 2F'(x)e^{x^2}}{4x^2}$

نعوض $F'(x)$ و $F''(x)$ بقيمتيهما ثم ننشر و نبسط نحصل على :

$$H'(x) = \frac{-8x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2}$$
$$= \frac{-2e^{-x^2}(4x^2+1)}{4x^2} < 0$$

إذن الدالة H تناقصية قطعا على : $]0,+\infty[$.

■ ④ ب

لدينا حسب السؤال : ③ ب

$$(\exists\ c \in]0,+\infty[)\ :\ F'(c) = 0$$

إذن : $\mathrm{H(c)} = \frac{\mathrm{F'(c).e^{-c^2}}}{\mathrm{2c}} = 0$

يعني : $(\exists\ c \in]0,+\infty[)\ :\ H(c) = 0$

بما أن الدالة H متصلة و تناقصية قطعا على : $]0,+\infty[$

فإن H تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $H(]0,+\infty[)$

إذن : $(\exists!\ c \in]0,+\infty[)\ :\ H(c) = 0$

$$\Leftrightarrow\quad (\exists!\ c \in]0,+\infty[)\ :\ F'(c) = 0 \text{ و } F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$$

و لدينا : $\mathrm{H}(x) = \frac{\mathrm{F'}(x).\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$

إذن : $F'(x) = \frac{2x.\mathrm{H}(x)}{\mathrm{e}^{x^2}}$

الدالة F' تنعدم في العدد c

إذا كان $x \geq c$ فإن : $H(x) \leq H(c)$ لأن H تناقصية على $]0,+\infty[$

و لدينا : $H(c) = 0$ إذن : $H(x) \leq 0$

و منه : $(\forall x \geq c \geq 0)\ :\ \frac{2x.H(x)}{e^{x^2}}$

يعني : $(\forall x \geq c)\ :\ F'(x) \leq 0$

و منه F تناقصية على المجال $[c,+\infty[$

إذا كان $x \leq c$ فإن $H(x) \geq H(c)$

و منه : $H(x) \geq 0$

إذن : $(\forall x \leq c)\ :\ \frac{2x.H(x)}{e^{x^2}} \geq 0$

يعني : $(\forall x \leq c)\ :\ F'(x) \geq 0$

و منه : F تزايدية على المجال $[0,c]$

و لدينا : $F(c) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

و نلخص جميع النتائج في الجدول التالي :

x	0		c		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-2c^2}}{2c}$	$\searrow$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■

مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والإمتحانات	الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة الاستدراكية 2011

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

① أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن

ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. — 0,50 ن

② بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. — 0,50 ن

③ نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H} = \{\ 2^n \ / \ n\epsilon\mathbb{Z}\}$ و $\mathbb{K} = \left\{ \dfrac{1}{2^n+1} \ / \ n\epsilon\mathbb{Z} \right\}$

أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$. — 0,50 ن

ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : — 0,50 ن

$$\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow I$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x+1}$$

بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H},\times)$ إلى $(I,*)$

ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2[19]$.

① أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$. — 0,25 ن

ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$. — 0,50 ن

② ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

أ) بين أن : $10^d \equiv 1[19]$. — 0,75 ن

ب) بين أن : $d \equiv 18$. — 0,50 ن

ج) استنتج أن : $x \equiv 17[18]$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : \ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

① بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن

② حدد العددين العقديين α و β بحيث : — 0,50 ن

$$(\forall z\epsilon\mathbb{C}) : \ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

③ أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5-12i)$. — 0,50 ن

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

0,50 ن | ① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C.

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

0,50 ن | ⓐ تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

0,50 ن | ⓑ حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z .

0,50 ن | ⓒ استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة **ثابتة** .

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x+\ln x}$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $(\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1\text{cm})$

1,00 ن | ① أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

0,50 ن | ②ⓐ ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن | ⓑ بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0,50 ن | ③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشىء $(\mathscr{C})$ و $(\overset{-1}{\mathscr{C}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | ④ⓐ أحسب التكامل : $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)\mathrm{d}x$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$)

0,50 ن | ⓑ استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\overset{-1}{\mathscr{C}})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$.

⑤ نعتبر المعادلة : $x+\ln x=n$: (E_n) .

0,25 ن | ⓐ بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n .

0,50 ن | ⓑ حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

0,50 ن | ⑥ⓐ بين أن $f(x_n)\le f(n)$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج أن $x_n\le n$: $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

0,50 ن | ⓑ بين أن $n-\ln n\le x_n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

0,50 ن | ⓒ أحسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن ① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)

0,50 ن ③ أ تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا :
$$1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

0,50 ن ب استنتج أن :
$$\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

0,50 ن ④ أ بين أن :
$$1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

0,50 ن ب بين أن :
$$(\forall n \geq 2) : \quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$$

0,50 ن ج استنتج أن :
$$\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$$

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ ① أ

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إذن : $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إذن : $-1 < -x < 0$ و $-1 < -y < 0$

إذن : $0 < 1 - x < 1$ و $0 < 1 - y < 1$

و منه : $\boxed{0 < (1-x)(1-y) < 1}$ (1)

و بما أن $xy > 0$ فإن : $(1-x)(1-y) + xy > xy$

يعني : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y) + xy} < 1}$ (2)

و لدينا : $xy > 0$ و $xy + (1-x)(1-y) > 0$

إذن : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y) + xy} > 0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن :

$$(\forall (x,y) \epsilon I^2) \ ; \ 0 < \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y) \epsilon I^2) \ ; \ 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y) \epsilon I^2) \ ; \ x * y \ \epsilon \ I$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ ① ب

ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :
$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} = \frac{yx}{yx + (1-y)(1-x)} = y * x$$

إذن $*$ قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

لدينا :
$$x * (y * z) = \frac{x(y*z)}{x(y*z) + (1-x)\big(1 - (y*z)\big)} = \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

و بنفس الطريقة نحسب $(x * y) * z$ نحصل على :

$$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} = x * (y * z)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في I .

■ ① ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في I .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ \frac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ \frac{e}{xe + (1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ e = \frac{1}{2} \ \epsilon \ ]0,1[$$

إذن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في I و هو : $\frac{1}{2}$.

■ ②

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- $*$ قانون تركيب داخلي في I .
- $*$ يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- $*$ تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :

كل عنصر x يقبل مماثلا بالقانون $*$ في المجموعة I .

ليكن x' مماثل x في المجموعة I بالنسبة للقانون $*$

إذن : $x * x' = x' * x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx'}{xx' + (1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = (1-x)$$

بما أن : $x \epsilon I$ فإن $1 > x > 0$

إذن : $1 > 1 - x > 0$

و منه $(1-x)$ هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I .

و بالتالي : $(I,*)$ زمرة تبادلية .

■ ③ أ

لدينا $H = \{2^n \ / \ n \epsilon \mathbb{Z}\}$

إذن : H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 2^n \ \epsilon \ \mathbb{R}_+^*$

ليكن 2^n و 2^m عنصرين من H

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ 3 ب

ليكن x و y عنصرين من H .

لدينا : $$\varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x}\right) * \left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}{\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\left(1-\frac{1}{1+y}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$$

$$= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

■ 3 ج

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H,\times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ حسب السؤال 3 أ

إذن $(\varphi(H),\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$

و بالتالي : $(K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1 أ

لدينا : $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

إذن : $\boxed{10^{x+1} \equiv 1[19]}$

■ 1 ب

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$:

$$(\forall\ a \wedge 19 = 1)\ ;\ a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي : $\boxed{10^{18} \equiv 1[19]}$

■ 2 أ

نضع : $d = (x+1) \wedge 18$ إذن حسب $(Bezout)$:

$$\exists\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ d = 18u + (x+1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

يعني : $\boxed{10^{(x+1)v} \equiv 1[19]}$ (1)

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

يعني : $\boxed{10^{18u} \equiv 1[19]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني : $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي : $\boxed{10^d \equiv 1[19]}$

■ 2 ب

لدينا : $d = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $\boxed{d \setminus 18}$

و منه : $d \in \{1,2,3,6,9,18\}$

و لدينا : $$\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases}$$

و بالتالي : $\boxed{d = 18}$

■ 2 ج

لدينا : $18 = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $18 / (x+1)$

و بما أن : $18 / (-18)$

فإن : $18/(x+1) - 18$

أي : $18 / (x-17)$

و منه : $x \equiv 17[18]$

التمرين الثالث : (4 ن)

الجزء الأول

■ ①

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

■ ②

ننشر التعبير : $(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$ نحصل على :

$$(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta) = z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2i\alpha)z+2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases}2i\beta=-10(1+i)\\ \alpha+2i=-(1+2i)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-(1+4i)\\ \beta=5i-5\end{cases}$$

■ ③ أ

ليكن $(x+iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5-12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2=5-12i\\ |x+iy|=\sqrt{5^2+12^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y^2)+2ixy=5-12i\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-y^2)=5\\ xy=-6\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=9\\ y^2=4\\ xy=-6\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=-3 \text{ أو } x=3\\ y=2 \text{ أو } y=-2\end{cases}}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $5-12i$ همـــا : $(3-2i)$ و $(-3+2i)$

■ ③ ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i)=0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$

لدينا :

$$\Delta=(1+4i)^2-4(-5+5i) = 5-12i = (3-2i)^2$$

إذن : $z_1=-1+3i$ و $z_2=2+i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$-2i$ و $2+i$ و $-1+3i$

الجزء الثاني

■ ①

لدينا : $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i}=\dfrac{3-2i}{2+3i}=-i=e^{\frac{-i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]}$ (1)

و لدينا كذلك : $\left|\dfrac{a-c}{b-c}\right|=|-i|=1$

إذن : $\boxed{\dfrac{CA}{CB}=1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

■ ② أ

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

لدينا : $\mathcal{R}_1(M)=M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1-b)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow (z_1+2i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+2i)$$

$$\Leftrightarrow z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

■ ② ب

لدينا : $\mathcal{R}_2(M)=M_2$

$$\Leftrightarrow (z_2-a)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z-a)$$

$$\Leftrightarrow (z_2+1-3i)=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

■ ② ج

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\Leftrightarrow aff(I)=\frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I)=-\sqrt{3}-i-\frac{(1-3i)(3+i\sqrt{3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I)=constante\ complexe$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : $\boxed{I \text{ نقطة ثابتة في المستوى.}}$

التمرين الرابع : (6 ن)

■ ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

■ ② أ

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $f^{'}(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

■ ② ب

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

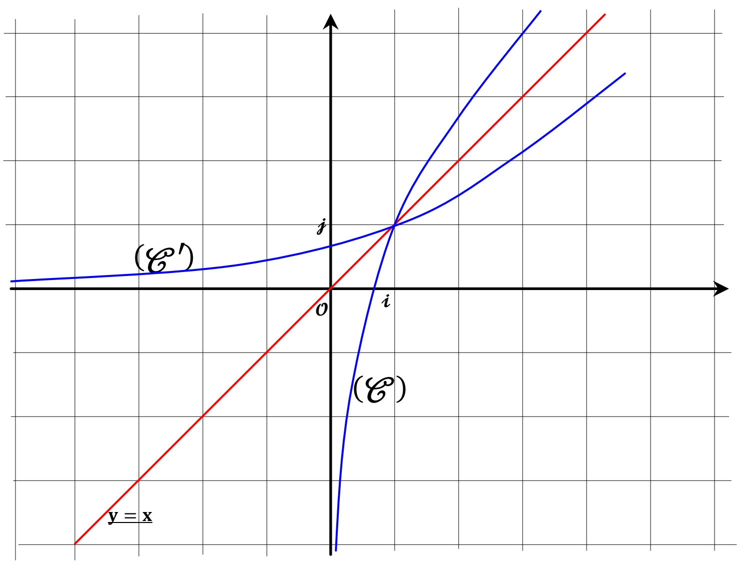
إذن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

■ ③

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$
$$f(e) = \mathrm{e} + \ln \mathrm{e} = \mathrm{e} + 1 \approx 3{,}72$$



■ ④ أ

لنحسب التكامل : $\displaystyle\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

و منه : $\dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

إذن :

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx = \int_1^e t f'(t)\,dt$$
$$= [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)\,dt$$
$$= [tf(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e$$
$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4{,}9$$

■ ④ ب

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)|\,dx$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2}\right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{2}$$

■ 5 أ

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$

و لدينا كذلك : $h^{'}(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$

إذن h دالة تزايدية قطعا على المجال $]0, +\infty[$

و منه h تقابل من $]0, +\infty[$ نحو صورته $]-\infty, +\infty[$

و بما أن : $0 \in]-\infty, +\infty[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل h .

يعني : $\exists!\ x_n \in]0, +\infty[\ ;\ h(x_n) = 0$

بتعبير آخر : $\exists!\ x_n \in]0, +\infty[\ ;\ x_n + \ln(x_n) = n$

■ 5 ب

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن : f^{-1} دالة تزايدية قطعا فإن :

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n$$

(1)

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متتالية تزايدية قطعا.}}$

نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بعدد حقيقي A

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x_n \leq A$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ f(x_n) \leq f(A) = B$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ n \leq B$

$\Leftrightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Leftrightarrow$ مستحيل

إذن : $\boxed{(2)\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ غير مكبورة}}$

من (1) و (2) نستنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

■ 6 أ

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow\ n \geq 1$

$\Leftrightarrow\ \ln n \geq 0$

$\Leftrightarrow\ n + \ln n \geq n$

$\Leftrightarrow\ f(n) \geq f(x_n)$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n) \geq f(x_n)$

و بما أن f^{-1} دالة تزايدية فإن : $f^{-1}\big(f(n)\big) \geq f^{-1}\big(f(x_n)\big)$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \geq x_n}$

■ 6 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \geq x_n$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \dfrac{x_n}{n} \leq 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(x_n) - ln(n) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{n} - ln(n) \leq x_n$

$\Leftrightarrow\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n - ln(n) \leq x_n}$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n\infty}(n - \ln n) = \lim_{n\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\underbrace{n - ln(n)}_{\infty \to +\infty} \leq x_n$

و هذا دليل آخر على أن : $\lim\limits_{n\infty} x_n = +\infty$

■ 6 ج

لدينا : $n - \ln n \leq x_n$

إذن : $\dfrac{n - x_n}{n} \leq \dfrac{\ln n}{n}$

و منه : $\left|\dfrac{n - x_n}{n}\right| \leq \dfrac{\ln n}{n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{ln\, n}{n}\right) = 0$

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left|\dfrac{n - x_n}{n}\right| = 0$

أي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{x_n - n}{n}\right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين أ و ب : $n - \ln n \leq x_n \leq n$

إذن : $\dfrac{n - \ln n}{n - ln\, n} \leq \dfrac{x_n}{n - ln\, n} \leq \dfrac{n}{n - ln\, n}$

يعني : $1 \leq \dfrac{x_n}{n - ln\, n} \leq \dfrac{n}{n - ln\, n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{n - ln\, n}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{ln\, n}{n}}\right) = 1$

فإن : $\underbrace{1}_{\infty \to \boxed{1}} \leq \dfrac{x_n}{n - ln\, n} \leq \underbrace{\dfrac{n}{n - ln\, n}}_{\infty \to \boxed{1}}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{x_n}{n - ln\, n}\right) = 1}$

التمرين الخامس : (4 ن)

■ ①

لدينا f_n دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,1[$.

و لدينا : $\forall x \epsilon\,]0,1[\ ;\ f_n'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} > 0$

إذن : f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \epsilon\,]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists!\ \alpha_n \epsilon\,]0,1[\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

■ ②

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن : $x \epsilon\,]0,1[$ فإن : $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall x \epsilon\,]0,1[\ ;\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \epsilon\,]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$ فإن : $\boxed{\alpha_n > \alpha_{n+1}}$

إذن $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية قطعا.

و لدينا : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 < \alpha_n < 1$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة .

■ ③ أ

لدينا $(t^n)_{n\epsilon \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ 1 .

إذن : $1 + t + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1-t^n}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$

■ ③ ب

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \cdots + t^{n-1})\, dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

■ ④ أ

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

يعني : $-1 + \alpha_n + \dfrac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n^n}{n} = 0$

إذن : $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

و منه : $\boxed{1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt}$

■ ④ ب

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n\, dt$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

فإن : $\left(\dfrac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\dfrac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right) \leq \left(\dfrac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

■ ج 4

لدينا :
$$\underbrace{0}_{\xrightarrow{+\infty}\ \boxed{0}} \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{+\infty}\ \boxed{0}}$$

إذن :
$$\lim_{n\infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt = 0$$

و منه :
$$\lim_{n\infty}(1+\ln(1-\alpha_n)) = 0$$

نضع :
$$\ell = \lim_{n\infty} \alpha_n$$

إذن :
$$1+\ln(1-\ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1-\ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{1-\ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\ell} = e$$

$$\Leftrightarrow \quad e(1-\ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{e-1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

① أحسب : $\mathbb{I}-\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2$ — 0,75 ن

② استنتج أن $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا يتم تحديده . — 0,50 ن

(II) لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $\mathbf{I}=]\mathbf{1},+\infty[$ نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

① تحقق أن : $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1 \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 ,$ — 0,25 ن

② بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I — 0,50 ن

③ نذكر أن : $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية . — 0,50 ن

نعتبر التطبيق :

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{I}, \qquad x \longrightarrow \sqrt{x+1}$$

ⓐ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ إلى $(I,*)$. — 0,50 ن

ⓑ استنتج بنية $(I,*)$. — 0,25 ن

ⓒ بين أن المجموعة : $\Gamma=\{\sqrt{1+2^m}/m\in\mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$ — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) حيث : a عدد عقدي غير منعدم .

$$(E) \quad : \quad iZ^2+(2-i)aZ-(1+i)a^2=0$$

① حدد Z_1 و Z_2 حلي المعادلة (E) . — 0,75 ن

②ⓐ تحقق أن : $Z_1Z_2=a^2(i-1)$ — 0,25 ن

ⓑ بين أن : Z_1Z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow$ $\arg a=\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ — 0,50 ن

(II) ليكن c عددا عقديا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم .

0,50 ن	① (أ) نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي : 1 و $(i+1)$ و c و ic و z .
0,50 ن	(ب) بين أن : A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \quad (\mathrm{ic}+1)\mathrm{z}+(\mathrm{ic}-1)\bar{\mathrm{z}}=2\mathrm{ic}$
0,50 ن	② بين أن : $(\mathrm{AD})\perp(\mathrm{OM}) \Leftrightarrow (\mathrm{ic}+1)\mathrm{z}-(\mathrm{ic}-1)\bar{\mathrm{z}}=0$
	ليكن h لحق النقطة H : المسقط العمودي للنقطة σ على (AD) .
0,75 ن	(أ) بين أن : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$
0,25 ن	(ب) استنتج أن : $(CH)\perp(\mathrm{BH})$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \quad : \quad 143x-195y=52$

0,50 ن	① (أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 . و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.
0,75 ن	(ب) علما أن : $(-1;-1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام لـ (E) في $\mathbb{Z}^2$
0,50 ن	② ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع العدد 5 بين أن : $n^{4k}\equiv 1[5] \quad , \forall k\epsilon\mathbb{N}$
	③ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث : $x\equiv \mathrm{y}[4]$
0,50 ن	(أ) بين أن : $n^x\equiv n^y[5] \quad , \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$
0,50 ن	(ب) استنتج أن : $n^x\equiv n^y[10] \quad , \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$
0,25 ن	④ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) .
	بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$: العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

التمرين الرابع : (5,5 ن)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}}$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن	① أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$
0,50 ن	② (أ) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $-\infty$.
0,50 ن	(ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $+\infty$
	و حدد الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_n)$ و **(D)**
0,75 ن	③ أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها.
0,50 ن	④ أنشىء المنحنى $(\mathscr{C}_3)$ نأخذ : $\boxed{\boldsymbol{f_3(-1,5)\approx 0}}$ و $\boxed{\boldsymbol{ln3=1,1}}$ و $\boxed{\boldsymbol{f_3(-0,6)\approx 0}}$
0,25 ن	⑤ (أ) بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن : $\dfrac{e}{n}<\ln(n)$
1,00 ن	(ب) بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث :
	$x_n\leq -ln(n)$ و $\dfrac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

0,50 ن | ج) أحسب : $\lim_{n\infty} x_n$ و $\lim_{n\infty} y_n$

6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0,25 ن | أ) بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0

0,50 ن | ب) تحقق أن لكل $n \geq 3$ $\quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

0,25 ن | ج) استنتج : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{ln(1+2x)}{2x^2} \ ,\forall x\epsilon]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1) ليكن x عنصرا من المجال $[0,1]$ بين أنه مهما يكن t من المجال $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

0,50 ن | أ) بين أن $\quad F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

0,75 ن | ب) بين أن $\quad \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0

0,75 ن | 3) باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء بين أن :

$$\forall x\epsilon[0,1] \ : \ \int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

0,50 ن | أ) بين أن : $\quad F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0,75 ن | ب) بين أن : $\quad \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2t)^2}$

0,75 ن | ج) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن :

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

0,25 ن | د) استنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0

التمرين الأول : (3,5 ن)

■(I)①

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

■(I)②

لدينا حسب السؤال① : $A^2=I-A$

إذن : $A(A+I)=A^2+A=I$

و كذلك : $(A+I)A=A^2+A=I$

و منه A مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة $(A+I)$

أي بتعبير آخر : $\boxed{A^{-1}=A+I}$

■(II)①

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$.

لدينا :

$$(x^2-1)(y^2-1)+1=(xy)^2-x^2-y^2+1+1$$
$$=x^2y^2-x^2-y^2+2$$

■(II)②

ليكن a و b عنصرين من $I=]1;+\infty[$

إذن : $a>1$ و $b>1$

و منه : $a^2>1$ و $b^2>1$

يعني : $(a^2-1)>0$ و $(b^2-1)>0$

$$\Leftrightarrow\quad (b^2-1)(a^2-1)>0$$
$$\Leftrightarrow\quad (b^2-1)(a^2-1)+1>1$$
$$\Leftrightarrow\quad a^2b^2-a^2-b^2+2>1$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}>1$$
$$\Leftrightarrow\quad a*b>1$$
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{a*b\in I}$$

و منه $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■(II)③أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا :
$$\varphi(a)*\varphi(b)=\sqrt{a+1}*\sqrt{b+1}$$
$$=\sqrt{(a+1)(b+1)-(a+1)-(b+1)+2}$$
$$=\sqrt{ab+1}=\varphi(a\times b)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$

ليكن y عنصرا من I .

لدينا : $\varphi(x)=y \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+1}=y \;\Leftrightarrow\; x=y^2-1$

بما أن : $y>1$ فإن : $y^2-1>0$ و منه $x\in\mathbb{R}_+^*$

و بما أن : y^2-1 عدد وحيد

فإن : $(\forall y\in I),(\exists!\,x=y^2-1)\;:\;\varphi(x)=y$

و منه φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$

و تقابله العكسي معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{rccc}\varphi^{-1}:&(I,*)&\to&(\mathbb{R}_+^*,\times)\\&y&\to&y^2-1\end{array}}$$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$.

■(II)③ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا : $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو العدد 1 و كل عنصر x يقبل مماثلا و هو مقلوبه $\frac{1}{x}$.

إذن : $(I,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $*$ هو العدد $\varphi(1)$ و كل عنصر y يقبل مماثلا و هو $Sym(y)$.

و لدينا : $\varphi(1)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

و لدينا كذلك : $y\in I$

إذن يوجد x من $\mathbb{R}^*$ بحيث : $\boxed{y=\varphi(x)\;\Leftrightarrow\;x=\varphi^{-1}(y)=y^2-1}$

و منه :
$$Sym(y) = Sym(\varphi(x)) = \varphi(Sym(x)) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi\left(\frac{1}{y^2-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{y^2-1}+1} = \sqrt{\frac{y^2}{y^2-1}}$$

■(II)③ج

لدينا (Γ) جزء غير فارغ من I

لأنه إذا كان : $m\epsilon\mathbb{Z}$ فإن : $2^m > 0$

يعني : $2^m + 1 > 1$

يعني : $\sqrt{2^m+1} > 1$

يعني : $\sqrt{2^m+1}\ \epsilon\ I$

ليكن $\sqrt{1+2^m}$ و $\sqrt{1+2^n}$ عنصرين من (Γ)

لدينا :

$$\left(\sqrt{1+2^m}\right) * \left(\sqrt{1+2^n}\right)' = \left(\sqrt{1+2^m}\right) * \left(\sqrt{\frac{1+2^n}{2^n}}\right)$$
$$= \sqrt{(1+2^m)\left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) - (1+2^m) - \left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) + 2}$$
$$= \sqrt{2^{m-n}+1}\ \epsilon\ (\Gamma)$$

و بالتالي $(\Gamma,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(I,*)$.

<u>التمرين الثاني : (3,5 ن)</u>

■(I)①

$$(E)\ :\ iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

لدينا : $\Delta = (2-i)^2a^2 + 4i(1+i)a^2$

$\Delta = (ai)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1 = \frac{(i-2)a + ai}{2i} = a(1+i)$$

$$z_2 = \frac{(i-2)a - ai}{2i} = ai$$

■(I)②أ

$$z_1z_2 = ai(a)(1+i)$$
$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2i - a^2$$
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{z_1z_2 = a^2(i-1)}$$

■(I)②ب

في البداية يجب كتابة z_1z_2 في شكله المثلثي.

لدينا : $z_1z_2 = a^2(i-1)$

$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}}$$

و لدينا : $z_1z_2\ \epsilon\ \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\quad arg(z_1z_2) \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow\quad arg\left(a^2\sqrt{2}\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}\right) \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow\quad arg\left(a^2\sqrt{2}\ \right) + arg\left(e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}\right) \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow\quad arg(a^2) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\ arg(a) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\ arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{4}[\pi]$$
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]}$$

■(II)(1)(أ)

لدينا : $A(1)$ و $B(i+1)$ و $C(c)$ و $D(ic)$ و $M(z)$

ننطلق من المعلومة : " A و D و M نقط مستقيمية "

$$\Leftrightarrow \quad (AD) \parallel (AM)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1}\right)} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ic-1)(\bar{z}-1) + (z-1)(ic+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{z}ic - ic - \bar{z} + 1 + zic + z - ic - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{z}(ic-1) + z(ic+1) = 2ic}$$

■(II)(1)(ب)

$$(AD) \perp (OM) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}\right)} = -\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)} = -\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{z}(ic-1) = z(ic+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad z(ic-1) - \bar{z}(ic-1) = 0$$

■(II)(2)(أ)

لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

يعني : $\boxed{\begin{cases} (\mathrm{AD}) \perp (\mathrm{OH}) \\ (\mathrm{AD}) \parallel (\mathrm{AH}) \end{cases}}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\dfrac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \in i\mathbb{R} \\ \left(\dfrac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overline{\left(\dfrac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right)} = -\left(\dfrac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \\ \overline{\left(\dfrac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \left(\dfrac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overline{\left(\dfrac{h-0}{ic-1}\right)} = -\left(\dfrac{h-0}{ic-1}\right) \\ \overline{\left(\dfrac{h-1}{ic-1}\right)} = \left(\dfrac{h-1}{ic-1}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\bar{h}}{-ic-1}\right) = -\left(\dfrac{h}{ic-1}\right) \\ \left(\dfrac{\bar{h}-1}{-ic-1}\right) = \left(\dfrac{h-1}{ic-1}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{h}(ic-1) = h(ic+1) \\ (\bar{h}-1)(ic+1) = -(h-1)(ic+1) \end{cases}$$

من المعادلة الثانية من النظمة نستنتج ما يلي :

$$\bar{h}(ic-1) = (ic-1) - (h-1)(ic+1)$$

نعوض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$(ic-1) - (h-1)(ic+1) = h(ic+1)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $2ic - 2h - 2hic = 0$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{i}{2c}$ نحصل على :

$$-1 - \frac{hi}{c} + h = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h - 1 = \frac{hi}{c}$$

نضيف إلى كل من الطرفين العدد $-i$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)}$$

■(II)(2)(ب)

لدينا : $h - (1+i) = \dfrac{i}{c}(h-c)$

يعني : $\dfrac{h-(1+i)}{h-c} = \dfrac{i}{c}$

لدينا : $\overline{\left(\dfrac{z_H - z_B}{z_A - z_C}\right)} = -\overline{\left(\dfrac{h-(1+i)}{h-c}\right)}$

$$= \frac{-i}{c} = -\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C}\right)$$

و منه : $\boxed{(CH) \perp (BH)}$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

باستعمال خوارزمية إقليديس نحدد $195 \wedge 143$ بالطريقة التالية :

$195 = 143 \times 1 + 52$: لدينا : $52 \neq 0$ إذن نواصل .

$143 = 52 \times 2 + 39$: لدينا : $39 \neq 0$ إذن نواصل .

$52 = 39 \times 1 + 13$: لدينا : $13 \neq 0$ إذن نواصل .

$39 = 13 \times 3 + 0$: لدينا : $0 = 0$ إذن **نتوقف** .

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 هو آخر باقي غير منعدم : 13

بتعبير آخر : $\boxed{195 \wedge 143 = 13}$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج وجود عددين نسبيين k و u بحيث : $143u + 195k = 13$

نضع : $v = -k$ إذن : $143u - 195v = 13$

و بما أن : $13 \setminus 52$ فإن : $(143u - 195v) \setminus 52$

و منه : $(\exists w \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ 52 = (143u - 195v)w$

أي : $(\exists\, x, y \in \mathbb{Z})\ ;\ 52 = 143\underbrace{uw}_{x} - 195\underbrace{vw}_{y}$

و بالتالي : $(\exists\, x, y \in \mathbb{Z})\ ;\ 52 = 143x - 195y$

أي أن المعادلة أعلاه تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

■ ① ب

لدينا $(-1, -1)$ حل خاص للمعادلة (E)

يعني : $\boxed{143(-1) - 195(-1) = 52}$ $(*)$

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

يعني : $\boxed{143x - 195y = 52}$ $(**)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ طرفا بطرف نحصل على :

$$143(-1 - x) - 195(-1 - y) = 0$$

يعني : $143(x + 1) = 195(y + 1)$

لدينا : $195 = 15 \times 13$ و $143 = 11 \times 13$

نحصل على : $11(x + 1) = 15(y + 1)$

و منه : $11 \setminus 15(y + 1)$

و بما أن : $11 \wedge 15 = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $11 \setminus (y + 1)$

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y + 1 = 11k$

أي : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y = 11k - 1$

نعوض y في المتساوية $(**)$ نحصل على : $x = 15k - 1$

عكسيا : لدينا $\forall k \epsilon \mathbb{Z}\ ;\ 143(15k - 1) - 195(11k - 1) = 52$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathcal{S}\ :\ \{(15k - 1 ; 11k - 1)\ ;\ k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ ②

لدينا $n \wedge 5 = 1$ بحيث $n \epsilon \mathbb{N}^*$

لدينا 5 عدد أولي و لا يقسم n .

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$: $n^{5-1} \equiv 1[5]$

يعني : $n^4 \equiv 1[5]$

و منه : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ (n^4)^k \equiv 1^k[5]$

يعني : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n^{4k} \equiv 1[5]$

■ ③ أ

لدينا : $x \equiv y[4]$

$$\Leftrightarrow\ 4 \setminus (x - y)$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x - y) = 4k$$

و منه حسب نتيجة السؤال ② : $n^{x-y} = n^{4k} \equiv 1[5]$

إذن : $n^x \cdot n^{-y} \equiv 1[5]$

و بما أن : $n^y \equiv n^y[5]$

فإنه عند المرور إلى الجداء بين آخر متوافقتين نحصل على :

$$n^x \cdot n^{-y} \cdot n^y \equiv n^y[5]$$

أي : $\boxed{n^x \equiv n^y[5]}$ $(\otimes)$

■ ③ ب

لدينا : $x \equiv y[4]$

$$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x - y) = 4k$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists\ k' = 2k\ \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x - y) = 2k'$$

إذن $x - y$ عدد زوجي .

و منه x و y فرديان معا أو زوجيان معا.

نقوم بدمج هاتين الحالتين مع حالتي زوجية العدد n لنحصل على أربع حالات و كلها تعبر عن زوجية التعبير $(n^x - n^y)$

(عدد زوجي) = (عدد زوجي)^(عدد زوجي) - (عدد زوجي)^(عدد زوجي)

(عدد زوجي) = (عدد زوجي)^(عدد فردي) - (عدد زوجي)^(عدد فردي)

(عدد زوجي) = (عدد فردي)^(عدد زوجي) - (عدد فردي)^(عدد زوجي)

(عدد زوجي) = (عدد فردي)^(عدد فردي) - (عدد فردي)^(عدد فردي)

نستنتج من هاته الحالات الأربع أن العدد $(n^x - n^y)$ عدد زوجي دائما

و ذلك كيفما كانت زوجية الأعداد x و y و n

و منه : $\boxed{(\exists u \in \mathbb{Z})\ ;\ n^x - n^y = 2u}$ (⊙)

من النتيجتين ⊗ و ⊙ نستنتج أن : $\begin{cases} 2 \backslash (n^x - n^y) \\ 5 \backslash (n^x - n^y) \end{cases}$

إذن : $2 \times 5 \backslash (n^x - n^y)$ لأن 2 و 5 عددان أوليان.

و بالتالي : $\boxed{n^x \equiv n^y [10]}$

■ 4

لدينا (x, y) حل للمعادلة (E) .

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ x = 15k - 1$ و $y = 11k - 1$

لدينا : $(15k - 1) \equiv (11k - 1)[4]$ لأن : $4 \backslash (4k)$

و منه : $x \equiv y[4]$

إذن حسب نتيجة السؤال 3 ب : $n^x \equiv n^y [10]$

و هذا يعني أن n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العدد العشري

أو بتعبير آخر نضع : $n^x = \overline{\alpha\beta}^{(10)}$ و $n^y = \overline{ms}^{(10)}$

رقم وحدات n^x هو العدد β و رقم وحدات n^y هو s

لدينا : $n^x \equiv n^y [10]$ يعني : $\overline{\alpha\beta}^{(10)} \equiv \overline{ms}^{(10)} [10]$

يعني : $10m + s \equiv 10\alpha + \beta [10]$

يعني : $s \equiv \beta [10]$

يعني : $\boxed{s = \beta}$ لأن : $s < 10$ و $\beta < 10$

التمرين الرابع : (5,5 ن)

■ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) = (+\infty) + 0 = (+\infty)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(xe^{x} + \frac{1}{n}\right) \\ &= (+\infty)\left(0^- + \frac{1}{n}\right) = \boxed{+\infty}\end{aligned}$$

■ 2 أ

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$

إذن : $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} (f_n(x) - x) = 0$

إذن $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$

■ 2 أ

لدينا $f_n(x) - y = \frac{e^{-x}}{n} > 0$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ يوجد فوق المستقيم (D)

■ 3

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f_n'(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{n - e^{-x}}{n}$

إذا كان $x = -\ln n$ فإن $f_n'(x) = 0$

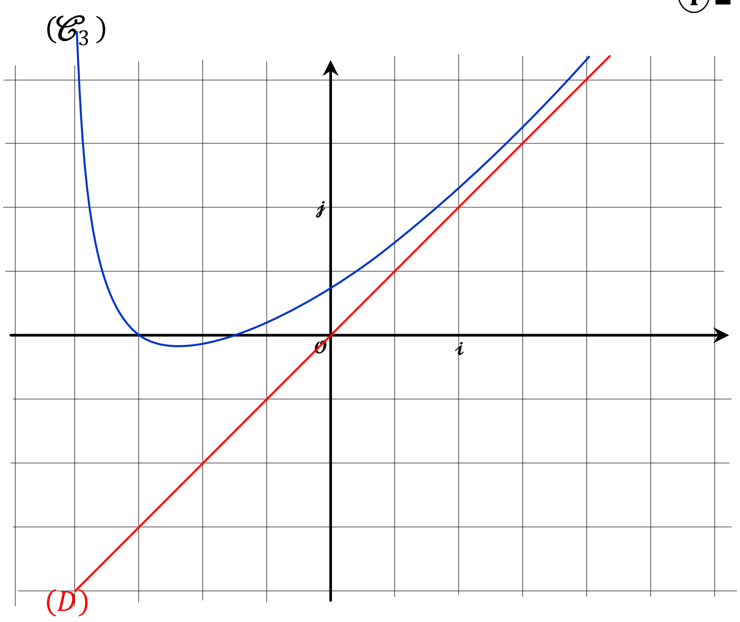
إذا كان $x > -\ln n$ فإن $f_n'(x) > 0$

إذا كان $x < -\ln n$ فإن $f_n'(x) < 0$

و لدينا : $f_n(-\ln n) = -\ln n + \frac{1}{n} e^{\ln n} = \ln\left(\frac{e}{n}\right)$

x	$-\infty$		$-\ln n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	↘	$\ln\left(\frac{e}{n}\right)$	↗	$+\infty$

■ 4



■ 5 أ

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

φ دالة قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{x + e}{x^2} > 0$

إذن φ دالة تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=-\infty$

و لدينا كذلك : $\varphi(3)\approx 0,2>0$

نحصل إذن على الجدول التالي :

x	0	3	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
φ	$-\infty$ ↗	$0,2$	↗ $+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن : $(\forall x\geq 3)\ ;\ \varphi(x)>0$

إذن : $\boxed{(\forall n\geq 3)\ ;\ \ln n>\frac{e}{n}}$

■ 5 ب

المرحلة الأولى :

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $[-\ln n\,;+\infty[$

من أجل $n\geq 3$ وجدنا أن $\ln n>\frac{e}{n}$ و منه : $-\ln n<\frac{-e}{n}$

إذن : $\left[\frac{-e}{n}\,;+\infty\right[\subset[-\ln n\,;+\infty[$

أي : f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n}\,;+\infty\right[$

و بالأخص f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n};0\right]$ لأن : $\left[\frac{-e}{n};0\right]\subset\left[\frac{-e}{n};+\infty\right[$

و بالتالي : f_n تقابل من $\left[\frac{-e}{n};0\right]$ نحو صورته $f_n\left(\left[\frac{-e}{n};0\right]\right)$.(1)

من جهة ثانية لدينا : $\boxed{f_n(0)=\frac{1}{n}>0}$ لأن : $n\geq 3$
(2)

و لدينا كذلك : $f_n\left(\frac{-e}{n}\right)=\frac{-e}{n}+\frac{1}{n}\left(e^{\frac{e}{n}}\right)$

لدينا : $n\geq 3$ إذن : $\frac{e}{n}\leq\frac{e}{3}$

و بما أن : $\frac{e}{3}<1$ فإن : $\frac{e}{n}<1$

و منه : $\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}<\frac{e}{n}$ يعني : $\left(\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}-\frac{e}{n}\right)<0$

إذن : $\boxed{f_n\left(\frac{-e}{n}\right)<0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن : $\boxed{f_n(0)\cdot f_n\left(\frac{-e}{n}\right)<0}$ (4)

و من (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية أن :

$$\boxed{\exists!\ y_n\ \epsilon\ \left]\frac{-e}{n};0\right[\ :\ f_n(y_n)=0}$$

المرحلة الثانية :

لدينا f_n دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]-\infty\,;-\ln n]$.

إذن f_n تقابل من $]-\infty\,;-\ln n]$ نحو صورته $f_n(]-\infty\,;-\ln n])$

و لدينا : $f_n(]-\infty\,;-\ln n])=\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\,;\,+\infty\right[$

إذن f_n تقابل من المجال $]-\infty\,;-\ln n]$ نحو المجال $\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\,;\,+\infty\right[$

من أجل $n\geq 3$ لدينا : $\ln n\geq\ln 3\approx 1,09$

إذن : $\ln n>1$ و منه : $1-\ln n<0$

و منه : $\ln\left(\frac{e}{n}\right)<0$ لأن : $\ln\left(\frac{e}{n}\right)=1-\ln n$

من هذه النتيجة نستنتج أن : $0\ \epsilon\ \left]\ln\left(\frac{e}{n}\right)\,;\,+\infty\right[$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل f_n

أو بتعبير آخر : $\exists!\ x_n\ \epsilon\ ]-\infty\,;-\ln n]\ :\ f_n(x_n)=0$

أي : $\boxed{\exists!\ x_n\leq-\ln n\ :\ f_n(x_n)=0}$

■ 5 ج

لدينا : $x_n\leq-\ln n$ يعني : $x_n\leq\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{n\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)=-\infty$

إذن بالضرورة : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}x_n=-\infty}$

و لدينا : $\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{-e}{n}\right)=\lim\limits_{n\infty}0=0$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}y_n=0}$

■ 6 أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-1-x\ln x)=-1=g(0)$

إذن : g دالة متصلة على اليمين في الصفر .

■ 6 ب

لدينا حسب السؤال 5 ب : $f_n(x_n)=0$

إذن : $x_n+\frac{e^{-x_n}}{n}=0$ و منه : $x_n=\frac{-e^{-x_n}}{n}$

أي : $\boxed{\frac{-1}{x_n}=ne^{x_n}}$ $(*)$

يعني : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right)=g(ne^{x_n})$

$$\begin{aligned}&=-1-ne^{x_n}\ln(ne^{x_n})\\&=-1-\boxed{ne^{x_n}}(\ln n+x_n)\\&=-1-\boxed{-\frac{1}{x_n}}(\ln n+x_n)\\&=\boxed{-1+\frac{1}{x_n}(\ln n+x_n)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \boxed{\frac{\ln n}{x_n}}$$

■ 6 ج

بما أن : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{n\to+\infty \\ u=\frac{-1}{x_n}}} g(u) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad g(0) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right) = -1}$$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

■ 1

ليكن $x \in [0;1]$ و $t \in [0;x]$

لدينا : $0 \le t \le x$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le 2t \le 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le 2t+1 \le 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2t+1} \le 1}$$

■ 2 أ

ليكن x عنصرا من $]0;1]$

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1-1}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+2t} - \frac{1}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1\,dt - \frac{1}{2x^2}\int_0^x \left(\frac{2}{2t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}[t]_0^x - \frac{1}{2x^2}[\ln(2t+1)]_0^x$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} = F(x)$$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال 1 :

$$\frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2t+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{2x+1} \le \frac{t}{2t+1} \le t$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)dt \le \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)dt \le \frac{2}{x^2}\int_0^x t\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2(1+2x)}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le F(x) \le \frac{2}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{2x^2(1+2x)} \le F(x) \le \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{(1+2x)} \le F(x) \le 1}$$

و بما أن : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1+2x}\right) = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$

فإن : $\lim_{x\to0^+} F(x) = 1 = F(0)$

و بالتالي : F دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■ 3

لدينا : $\int_0^x \left(\frac{2t}{2t+1}\right)dt = \int_0^x \underbrace{(2t)}_{u'}\underbrace{\left(\frac{1}{2t+1}\right)}_{v}dt$

$$= \left[\frac{t^2}{2t+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(2t+1)^2}dt$$

$$= \frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt$$

■ 4 أ

في البداية لدينا : $h\ :\ x\ \to\ \dfrac{x}{1+2x}$

و هي دالة متصلة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ و بالأخص على المجال $[0;x]$
بحيث : $0\leq x\leq 1$

إذن : h تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز H بحيث : $H^{'}(x)=h(x)$

لدينا إذن : $F(x)=\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)dt$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\frac{2}{x^2}H(x)$$

$$\Rightarrow\quad F^{'}(x)=\left(\frac{2}{x^2}\right)^{'}H(x)+\left(\frac{2}{x^2}\right)H^{'}(x)$$

$$\Rightarrow\quad F^{'}(x)=\left(\frac{-4x}{x^4}\right)\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)dt+\left(\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{1+2x}\right)$$

$$\Rightarrow\quad F^{'}(x)=\left(\frac{-2}{x^3}\right)\int_0^x\left(\frac{2t}{1+2t}\right)dt+\frac{2}{x(1+2x)}$$

بعد ذلك نستعمل نتيجة السؤال 3 نحصل على :

$$F^{'}(x)=\left(\frac{-2}{x^3}\right)\left(\frac{x^2}{2x+1}+2\int_0^x\left(\frac{t}{2t+1}\right)^2dt\right)+\frac{2}{x(1+2x)}$$

$$=\frac{-2}{x(1+2x)}-\frac{4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{2t+1}\right)^2dt+\frac{2}{x(1+2x)}$$

و بالتالي : $\boxed{F^{'}(x)\ =\dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{2t+1}\right)^2dt}$

■ 4 ب

لدينا حسب السؤال 1 : $\dfrac{1}{2x+1}\leq\dfrac{1}{2t+1}\leq 1$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{t}{2x+1}\leq\frac{t}{2t+1}\leq t\quad ;\ (\forall t\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2\leq\left(\frac{t}{2t+1}\right)^2\leq t^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_0^x\left(\frac{t}{2x+1}\right)^2dt\leq\int_0^x\left(\frac{t}{2t+1}\right)^2dt\leq\int_0^x t^2\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{-4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{2x+1}\right)^2dt\geq F^{'}(x)\geq\frac{-4}{x^3}\int_0^x t^2\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{-4}{x^3(1+2x)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x\geq F^{'}(x)\geq\frac{-4}{x^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{-4}{3(1+2x)^2}\geq F^{'}(x)\geq\frac{-4}{3}}$$

■ 4 ج

لدينا : $F(x)=\dfrac{2}{x^2}H(x)$

بحيث : $H(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)dt$

نلاحظ أن F دالة متصلة على $[0;x]$ و قابلة للإشتقاق على $]0;x[$ لإنها جداء دالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists\ c\ \epsilon\ ]0,x[\ ;\ F^{'}(c)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$

و بما أن : $\forall\ c\ \epsilon\ ]0,1]\ ;\ \dfrac{-4}{3}\leq F'(x)\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

فإن : $\dfrac{-4}{3}\leq F'(c)\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

لأن : $0<c<x<1$

ومنه : $\dfrac{-4}{3}\leq\left(\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right)\leq\dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

بما أن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3(1+2x)^2}\right)=\frac{-4}{3}$

فإن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right)=\frac{-4}{3}$

و بالتالي : F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

و لدينا : $\boxed{F_d^{'}(0)=\dfrac{-4}{3}}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 9 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات	الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة الاستدراكية 2012

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

(I) لكل a و b من المجال $I = [1;+\infty[$ نضع : $a \perp b = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$

0,50 ن ① بين أن : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

0,50 ن ② بين أن القانون $\perp$ تبادلي و تجميعي في I .

0,25 ن ③ بين أن : $\perp$ يقبل عنصرا محايدا في I وجب تحديده.

(II) نذكر أن : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية. لتكن : $E = \left\{M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ x\in \mathbb{R}^*\right\}$

0,50 ن ① بين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

② نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^* & \to & E \\ & x & \to & M(x) \end{array}$$

0,50 ن (أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

0,50 ن (ب) استنتج بنية $(E,\times)$.

0,75 ن (ج) بين أن المجموعة : $H = \left\{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ n\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\boxed{(E) \ : \ z^2 - 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0}$

0,50 ن ① (أ) تحقق أن العدد $z_1 = 1+\frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) .

0,50 ن (ب) بين أن الحل الثاني للمعادلة هو $z_2 = 3z_1$

(II) نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي : a و b و ω .

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

نضع : $P = r(A)$ و $B = r(Q)$

ليكن p العدد العقدي لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .

0,50 ن ① (أ) بين أن : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ و $q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$

0,25 ن (ب) بين أن : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

0,50 ن	ج بين أن : $\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$
	② نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
0,75 ن	أ بين أن : $APQB$ متوازي أضلاع .
0,75 ن	ب بين أن : $arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

0,25 ن	① أ تحقق أن : 503 عدد أولي.
0,75 ن	ب بين أن $7^{502} \equiv 1[503]$ ثم استنتج أن $7^{2008} \equiv 1[503]$.
0,50 ن	② نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : 49x - 6y = 1$
	علما أن الزوج $(1;8)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل.
	③ نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$
0,25 ن	أ بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E) .
0,25 ن	ج استنتج أن N يقبل القسمة على 2012
1,00 ن	ب بين أن $N \equiv 0[4]$ و $N \equiv 0[503]$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

	(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$
0,50 ن	① أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$
0,50 ن	② استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.
	(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$
1,00 ن	① بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
0,50 ن	② بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$
0,50 ن	③ ضع جدول تغيرات الدالة f
1,00 ن	④ أنشئ $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f و $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $(-f)$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
	نقبل أن $-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى $(\mathscr{C})$.
0,75 ن	⑤ بين أن لكل x من $]-1;0[$ لدينا : $0 < f'(x) < g(e)$
0,75 ن	⑥ بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. و أن : $-1 < \alpha < 0$

⑦ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) \;;\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

ⓐ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;:\; -1 \leq u_n \leq 0$	0,50 ن
ⓑ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;:\; \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert \leq g(e)\lvert u_n-\alpha\rvert$	0,50 ن
ⓙ استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;:\; \lvert u_n-\alpha\rvert \leq (g(e))^n$	0,50 ن
ⓓ علما أن : $g(e) < 0,6$ أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0,50 ن

التمرين الخامس : (2,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt$$

① أحسب $F(1)$.	0,25 ن
②ⓐ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$.	0,50 ن
ⓑ استنتج أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $F(x) = 0$	0,50 ن
③ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا :	0,50 ن

$$F(x) = \left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan\,(t)}{t}\, dt$$

④ بين أن : $(\forall x > 0) \;:\; Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)$	0,25 ن
⑤ استنتج أن : $(\forall x > 0) \;:\; \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan\,(t)}{t}\, dt$	0,50 ن

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I)(1)

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

و منه : $\sqrt{x} \geq 1$ و $\sqrt{y} \geq 1$

يعني : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2 \geq 1$

إذن : $x \perp y \in [1;+\infty[$

و بالتالي : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

■ (I)(2)

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

لدينا : $x \perp y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad x \perp y = \left(\sqrt{y}+\sqrt{x}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \perp y = y \perp x$$

<u>و منه $\perp$ قانون تبادلي في I .</u>

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال I .

لدينا : $(x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x \perp y}+\sqrt{z}-1\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+\sqrt{z}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}-1\right)-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y \perp z}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$$

<u>إذن $\perp$ قانون تجميعي في $[1;+\infty[$.</u>

■ (I)(3)

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في I .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I)\ ;\ x \perp e = e \perp x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I)\ ;\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{e}-1\right)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I)\ ;\ \sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \pm\sqrt{x}$$

في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = -\sqrt{x}$

نحصل على : $e = \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

لكن : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 \notin I$ لأنه لدينا $x \in I$

إذن : $x \geq 0$ و منه : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 < 1$

أما في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \sqrt{x}$

نحصل على : $e = 1 \in [1;+\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في المجموعة I .

■ (II)(1)

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E

لدينا : $M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (II)(2) أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا :

$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ليكن $M(y)$ عنصرا من $(E,\times)$

لنحل المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ ذات المجهول x

$$\varphi(x) = \varphi(y) \quad \Leftrightarrow \quad M(x) = M(y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y$$

و بالتالي : المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو y

و بتعبير آخر :

$$(\forall M(y) \in E)\ (\exists!\, x \in \mathbb{R}^*)\ :\ \varphi(x) = M(y)$$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

<u>خلاصة</u> : $\boxed{\varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}^*,\times) \text{ نحو } (E,\times)}$.

■ (II)(2) ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية $(E,\times)$ انطلاقا من بنية $(\mathbb{R}^*,\times)$

عن طريق التشاكل التقابلي φ .

لدينا : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كمماثل.

إذن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل مماثلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

و لدينا : $$\varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

و $$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ (II) ② ج

لتكن H_n مصفوفة من المجموعة $\mathcal{H}$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ x = 2^n$$

إذن : $\mathcal{H} \subset E$ و لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$

إذن $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من E

لتكن : $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين من $\mathcal{H}$.

لدينا : $$\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{-m} & 2(2^{-m} - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

<u>إذن : $(\mathcal{H},\times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.</u>

<u>التمرين الثاني : (3,5 ن)</u>

■ (I) ① أ

تعويض مباشر و حساب سهل

■ (I) ① ب

نعلم أنه إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $az^2 + bz + c = 0$

فإن : $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ و $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

نستعمل العلاقة : $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

إذن : $z_1 z_2 = \left(\frac{5}{3} + 4i\right)$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3} + 4i\right)\left(1 - \frac{2}{3}i\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}i\right)\left(1 - \frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{9}{13}\left(\frac{13}{3} + \frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3\left(1 + \frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3z_1$$

■ (II) ① أ

لدينا : $P = r(A)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران : $(z_P - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A - z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow \quad (p - \omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega) + \omega} \quad (1)$$

و بنفس الطريقة : $B = r(Q)$

$$\Leftrightarrow \quad (z_B - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q - z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b - \omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(q - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad qe^{\frac{i\pi}{3}} = (b - \omega) + \omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{q = e^{\frac{-i\pi}{3}}(b - \omega) + \omega} \quad (2)$$

■ (II) ① ب

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ننطلق إذن من الكتابة :

$$\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{\frac{-4i\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cancel{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+1}\right)}{\left(\cancel{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}}$$

■(II)①ج

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال ①أ

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow\quad (p-a)=\omega\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)+a\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}\ (1)$$

و لدينا كذلك : $(q-b)=\omega+be^{\frac{-i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{-i\pi}{3}}-b$

$$\Leftrightarrow\quad (q-b)=\omega\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)+b\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(q-b)=\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega-b)}\ (2)$$

و منه : $\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

و بالتالي : $(3)\ \boxed{\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}}$

■(II)②أ

نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

بالإستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{p-a}{q-b}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{2i\pi}=1$$

إذن : $(p-a)=(q-b)$

يعني : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$

و منه حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع : $APBQ$ متوازي أضلاع.

■(II)②ب

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}\ (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال②: $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

إذن : $(5)\ \boxed{(\omega-b)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)}$

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

$$\Leftrightarrow\quad (b-a)=(\omega-a)-e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(b-a)=(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}\ (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b-a}{p-a}=\frac{(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}=\frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1-cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي $\left(1+i\sqrt{3}\right)$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1}{4}\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)=\boxed{i\sqrt{3}}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right)=i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)\equiv arg\left(i\sqrt{3}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ $P\hat{A}B$ زاوية قائمة

و بما أن : $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن $APQB$ مستطيل.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ ① ب

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

فإنه حسب $(Fermat)$: $7^{503-1}\equiv 1[503]$

يعني : $7^{502}\equiv 1[503]$

و منه : $\left(7^{502}\right)^4\equiv 1^4[503]$

أي : $7^{2008}\equiv 1[503]$

■ ②

لدينا : $(1,8)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\begin{cases}49\times 1-6\times 8=1\\ 49x-6y=1\end{cases}$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$\boxed{49(x-1)=6(y-8)} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad 49\ /\ 6(y-8)$$

بما أن $49\wedge 6=1$ فإنه حسب $Gauss$: نحصل على : $49\ /\ (y-8)$

و منه : $y=49k+8\ ;\ (\exists k\epsilon\mathbb{Z})$

نعوض y بقيمته في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$49(x-1)=6(49k)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=6k+1$$

عكسيا : لدينا : $49(6k+1)-6(49k+8)=1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{\ (6k+1\,;49k+8)\ \ /\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

■ ③ أ

نعلم أنه إذا كانت q^n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q فإن :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا 7^n متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1+7+7^2+\cdots+7^{2007}=\frac{7^{2007+1}-1}{7-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N=\frac{7^{2008}-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^{2008}-6N=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^2\cdot 7^{2006}-6N=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 49\cdot 7^{2006}-6N=1$$

إذن الزوج $\left(7^{2006},N\right)$ حل للمعادلة (E) .

■ ③ ب

لدينا : $\begin{cases}1\equiv 1[4]\\ 7\equiv -1[4]\end{cases}$

$\begin{cases}7^2\equiv 1[4]\\ 7^3\equiv -1[4]\end{cases}$

$\begin{cases}7^4\equiv 1[4]\\ 7^5\equiv -1[4]\end{cases}$

$\vdots \quad \vdots$

$\begin{cases}7^{2006}\equiv 1[4]\\ 7^{2007}\equiv -1[4]\end{cases}$

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1+7+7^2+7^3+\cdots\cdots+7^{2006}+7^{2007}\equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N\equiv 0[4]}$$

لدينا حسب ①ب $\quad 7^{2008}\equiv 1[503]$ إذن : $503 / (7^{2008}-1)$

و نعلم أن : $(7^{2008}-1)=6N$ إذن : $503 / 6N$

و بما أن 503 عدد أولي و 2×3 هو التفكيك الأولي للعدد 6 فإن : $6\wedge 503=1$

و منه حسب $(Gauss)$: $503 / N$

و بالتالي : $N\equiv 0[503]$

■③ج

لدينا : $503\wedge 4=1$ لأن : 503 عدد أولي.

و لأن 2^2 هو التفكيك الأولي للعدد 4

و نعلم أن : $4 / N$ و $503 / N$

إذن : $4\times 503 / N$ يعني : $2012 / N$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

■(I)①

لدينا : $$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن : g' تنعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال $[0,+\infty[$.

و منه g دالة تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

■(I)②

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$.

إذن $x\geq 0$ و منه : $g(x)\geq g(0)=0$

و بالتالي : $\forall x\epsilon[0,+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

■(II)①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع : $t=e^{-x}$ نحصل على :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+t)-ln(1+0)}{t-0}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to-\infty} e^x ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(ln(e^x+1)-ln(e^x)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^x}_{0^+} ln\left(\underbrace{e^x}_{0^+}+1\right)-\underbrace{xe^x}_{0^-}=0$$

■(II)②

ليكن x عددا حقيقيا .

$$f'(x)=e^x ln(1+e^{-x})+e^x\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=e^x\left(ln(1+e^{-x})-\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=e^x g(e^{-x})$$

■(II)③

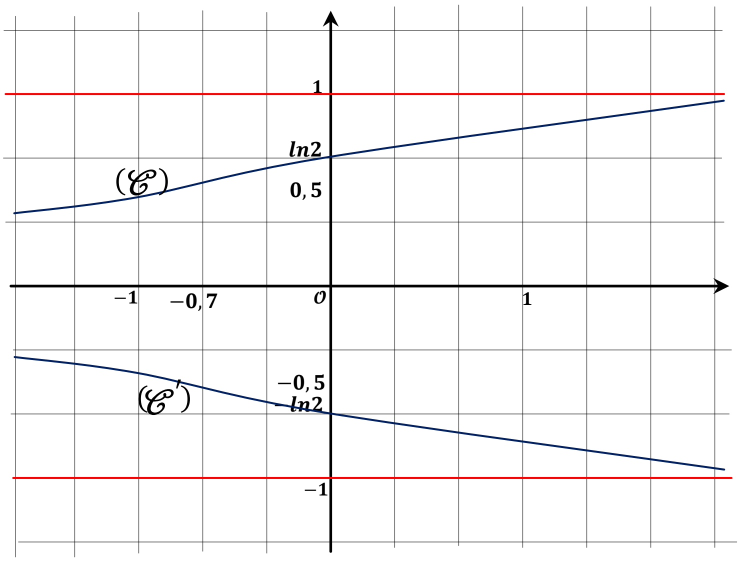
لدينا : $f'(x)=e^x g(e^{-x})$

إذن f' لا تنعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 1$

■(II)④



■(II)⑤

ليكن x عنصرا من $]-1,0[$.

إذن : $-1<x<0$ و منه $e^{-x}<e$ و $e^x<1$

يعني : $g(e^{-x})<g(e)$ و $e^x<1$

إذن : $0<e^x g(e^{-x})<g(e)$ أي : $0<f'(x)<g(e)$

■(II)6

نضع : $h(x) = f(x) + x$

لدينا : $h'(x) = f'(x) + 1$

بما أن : $f'(x) > 0$ حسب السؤال 5

فإن : $h'(x) > 1 > 0$ و منه : h دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و منه : h تقابل من أي مجال $[x, y]$ من $\mathbb{R}$ نحو صورته بالدالة h .

نختار المجال $[-1,0]$.

إذن h تقابل من $[-1,0]$ نحو $f([-1,0])$

و لدينا : $h([-1,0]) = [h(-1), h(0)] \approx \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

و بما أن : $0 \epsilon \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالتقابل h في المجال $[-1,0]$.

و بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha \epsilon [-1,0]\ ;\ h(\alpha) = 0$

و بما أن : $h(-1) \neq h(0) \neq 0$

فإن : $\exists!\ \alpha \epsilon]-1,0[\ ;\ h(\alpha) = 0$

أي : $\exists!\ \alpha \epsilon]-1,0[\ ;\ f(\alpha) + \alpha = 0$

■(II)7أ

من أجل $n = 0$ لدينا : $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة f : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) \geq 0$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \overset{(1)}{\boxed{f(u_n) \geq 0}}$

و لدينا حسب الإفتراض : $u_n \leq 0$

إذن : $f(u_n) \leq ln2$ لأن f تزايدية على $\mathbb{R}$.

و منه : $\underset{(2)}{\boxed{f(u_n) \leq 1}}$ لأن : $ln2 \approx 0,6$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f(u_n) \leq 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq -f(u_n) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_{n+1} \leq 0$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0}$

■(II)7ب

لدينا f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α و الذي سنرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}$

لأننا لا ندري من الأكبر هل u_n أم α .

$\Longrightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ \dfrac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$

$\Longrightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ |f(u_n) - f(\alpha)| = f'(c)|u_n - \alpha|$

$\Longrightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ |-u_{n+1} + \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$

$\Longrightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$

بما أن : $0 \leq f'(x) \leq g(e)$

فإن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f'(x)|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

و منه : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|}$

■(II)7ج

لدينا حسب السؤال ب :

$(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leq g(e)|u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^2|u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^3|u_{n-3} - \alpha| \\ &\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\leq (g(e))^n|u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n|0 - \alpha|$

و بما أن : $\alpha \epsilon]-1,0[$ و ذلك حسب السؤال 6

فإن : $|0 - \alpha| = |\alpha| < 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n}$

■(II)(7)(د)

لدينا حسب السؤال (7)(ج)

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n$$

و نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب أصغر من 1

لأن : $g(e)<0,6<1$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}(g(e))^n=0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$$

أي : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha}$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

■(1)

$$F(1)=\int_1^1\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

■(2)(أ)

لدينا الدالة : $t\to\dfrac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على $]0,+\infty[$ بحيث :

$$\psi'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}\quad \text{و}\quad \psi(x)-\psi(0)=\int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt$$

بما أن : $F(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)$

فإن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالة و مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا :
$$F'(x)=\psi'(x)+\left(\frac{1}{x}\right)'\psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)=0$$

■(2)(ب)

بما أن : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[)\ ;\ F'(x)=0$

فإن : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=c\in\mathbb{R}$

و بما أن : $F(1)=0$ فإن $c=0$

و بالتالي : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=0$

■(3)

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^x\underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{v'}\underbrace{(\ln t)}_{u}\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\left[(Arctan(t))(\ln t)\right]_{\frac{1}{x}}^x-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\ln(x)\cdot Arctan(x)-ln\left(\frac{1}{x}\right)\cdot Arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{F(x)=\left(Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}dt}\quad(*)$$

■(4)

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\varphi(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)$$

لدينا φ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

و لدينا :
$$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

إذن φ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} (\forall x\epsilon]-\infty,0[\ ; \ \varphi(x) = c_1\epsilon\mathbb{R} \\ (\forall x\epsilon]0,+\infty[\ ; \ \varphi(x) = c_2\epsilon\mathbb{R} \end{cases}$

نعوض x بالقيمتين 1 و $1-$ و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 نحصل على :

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2Arctan(-1) = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2Arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و بالتالي : $\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; \ \forall x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & ; \ \forall x < 0 \end{cases}}$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x > 0) \quad ; \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x > 0) \quad ; \quad Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall x > 0) \quad ; \quad Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)} \ (**)$$

■ **4**

نستغل إذن النتيجتين $(*)$ و $(**)$ في الإجابة على هذا السؤال.

لدينا : $(\forall x > 0) \quad ; \quad F(x) = 0$

إذن :

$$\left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{Arctan(t)}{t}dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}dt = \ln x}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \;;\; x * y = x + y - 2$

1 أ بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . 0,50 ن

1 ب بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . 0,25 ن

1 ج بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية . 0,50 ن

2 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \;;\; x \top y = xy - 2x - 2y + 6$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $(\forall x\epsilon\mathbb{Z}) \;;\; f(x) = x + 2$

2 أ بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \top)$. 0,50 ن

2 ب بين أن : $\forall\, (x,y,z)\,\epsilon\,\mathbb{Z}^3 \;;\; (x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z)$ 0,25 ن

3 إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و واحدية . 0,75 ن

4 أ بين أن : $x \top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$. 0,25 ن

4 ب استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \top)$ كاملة . 0,25 ن

4 ج هل $(\mathbb{Z}, *, \top)$ جسم ؟ (علل الجواب) 0,25 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$\boxed{(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0}$$

I 1 تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$. 0,25 ن

I 2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 0,50 ن

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

II 1 تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . 0,50 ن

II 2 أ بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ 0,50 ن

II 2 ب بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . 0,50 ن

0,50 ن | II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \times \frac{a}{b}$

0,75 ن | II | 3 | ب | بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة .

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1

و التي تحقق الخاصية $(\Re)$ التالية : $(\Re) : 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.

1 | نفترض أن n يحقق الخاصية $(\Re)$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

0,75 ن | 1 | أ | بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$.

0,50 ن | 1 | ب | بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,50 ن | 1 | ج | بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$.

0,50 ن | 1 | د | ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$.

(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \epsilon \mathbb{Z}$)

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$.

0,75 ن | 2 | إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\Re)$.

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} \ ; \ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | أ | بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 .

0,75 ن | 1 | ب | بين أن : $(\forall x > 1) ; \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h .

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1) \ ; \ 0 < h(x) \leq 1$.

الجزء الثاني نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \ ; \ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g

في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 ن | 1 | أ | تحقق أن : $(\forall x > 1) \ ; \ \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

0,25 ن | 1 | ب | تحقق أن : $(\forall x > 1) \ ; \ g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$

0,50 ن | 1 | ج | بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$

ن 0,50		2	ب	استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .
ن 0,75		2	ج	بين أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$
ن 0,75		3	أ	بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$
ن 0,50		3	ب	استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
ن 0,50		3	ج	أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجزء الثالث

ن 0,50	I	1		بين أن الدالة : $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$.
ن 0,25	I	2		استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$

ن 0,50	II	1	أ	بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$
ن 0,50	II	1	ب	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .
ن 0,75	II	1	ج	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$
ن 0,50	II	2	أ	بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ \lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \leq \frac{1}{2}\lvert u_n - \alpha\rvert$
ن 0,50	II	2	ب	بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ \lvert u_n - \alpha\rvert \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \lvert u_0 - \alpha\rvert$
ن 0,25	II	2	ج	استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$

هذه هي المعادلة الديكارتية للفشل و تقبل ما لا نهاية من الحلول فاحذر أن تكون واحداً من تلك الحلول .

التمرين الأول

1 أ

المجموعة $\mathbb{Z}$ مزودة بالقانون $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; x*y = x+y-2$$

لدينا $*$ قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من $\mathbb{Z}$

فإن $(x+y-2) \in \mathbb{Z}$

لنبرهن على أن $*$ تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون $+$ تبادلي في الحلقة الواحدية التبادلية $(\mathbb{Z},+,\times)$

إذن : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; x*y = x+y-2 = y+x-2 = y*x$

إذن $*$ تبادلي في $\mathbb{Z}$.

لنبرهن على أن القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{Z}$.

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{Z}$

لدينا :

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y)+z-2 = x+y-2+z-2 \\ &= x+(y+z-2)-2 \\ &= x+(y*z)-2 \\ &= x*(y*z)\end{aligned}$$

إذن : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; (x*y)*z = x*(y*z)$

و منه فإن القانون $*$ تجميعي في المجموعة $\mathbb{Z}$.

1 ب

ليكن ε العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

إذن : $(\forall x \in \mathbb{Z}) \;;\; x*\varepsilon = \varepsilon*x = x$

لتحديد قيمة ε ننطلق من التعبير : $x*\varepsilon = x$

إذن : $x+\varepsilon-2 = x$ و منه : $\varepsilon = 2 \in \mathbb{Z}$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

1 ج

لكي تكون $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا من $\mathbb{Z}$ بالقانون $*$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$. و x' مماثله بالنسبة للقانون $*$.

إذن : $x*x' = x'*x = 2$

ننطلق من المتساوية التالية : $x*x' = 2$

إذن : $x+x'-2 = 2$ يعني : $x' = 4-x$

بما أن $x \in \mathbb{Z}$ و $4 \in \mathbb{Z}$ فإن : $(4-x) \in \mathbb{Z}$

و بالتالي : كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ و هو $(4-x)$.

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

- $*$ داخلي و تبادلي و تجميعي في $\mathbb{Z}$.
- $*$ يقبل عنصرا محايدا و هو 2 .
- كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يمتلك مماثلا و هو $(4-x)$.

إذن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية .

2 أ

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{Z},\times) \mapsto (\mathbb{Z},\top) \qquad x \mapsto f(x) = x+2$$

لكي يكون f تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; f(x\times y) = f(x) \top f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}f(x)\top f(y) &= (x+2)\top(y+2) \\ &= (x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6 \\ &= xy-2 = f(x\times y)\end{aligned}$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in \mathbb{Z}),(\exists!\, x \in \mathbb{Z}) \;;\; f(x) = y$$

يعني : المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}$.

ليكن y عنصرا من المجموعة $\mathbb{Z}$. لدينا :

$$\begin{aligned}f(x) = y &\Leftrightarrow x+2 = y \\ &\Leftrightarrow x = y-2 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

إذن : $(\forall y \in \mathbb{Z}),(\exists!\, x = y-2 \in \mathbb{Z}) \;;\; f(x) = y$

و هذا يعني أن التطبيق f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$.

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$.

2 ب

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned}(x*y)\top z &= (x*y)z-2(x*y)-2z+6 \\ &= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6 \\ &= xz+yz-4z-2x-2y-2z+10\end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned}(x\top z)*(y\top z) &= (x\top z)+(y\top z)-2 \\ &= (xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2 \\ &= xz+yz-4z-2x-2y-2z+10\end{aligned}$$

نستنتج أن : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \;;\; (x*y)\top z = (x\top z)*(y\top z)$

أي : القانون $\top$ توزيعي على $*$ في $\mathbb{Z}$.

3

لنبين أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ **حلقة** **تبادلية** و **واحدية**

- $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية
- $\top$ قانون تجميعي
- $\top$ توزيعي على $*$

- $\top$ يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{Z}$

- $\top$ تبادلي في $\mathbb{Z}$

حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومتين التاليتين :

(1) $\boxed{(\mathbb{Z},*) \text{ زمرة تبادلية}}$ و (2) $\boxed{\text{القانون } \top \text{ توزيعي على القانون } *}$

لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z},\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z},\times)$ و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقابلي يُحوِّل البنية الجبرية لمجموعة الأنطلاق إلى مجموعة الوصول.

بما أن الضرب $\times$ تبادلي و تجميعي في $(\mathbb{Z},\times)$ و يقبل 1 كَعُنصر محايد.

فإن : (3) $\boxed{\text{القانون } \top \text{ تبادلي في } \mathbb{Z}}$ و (4) $\boxed{\top \text{ قانون تجميعي في } \mathbb{Z}}$

و (5) $\boxed{f(1) = 3 \text{ عنصر محايد للقانون } \top \text{ في } \mathbb{Z}}$.

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية وحدتها العدد النسبي 3 .

4 أ

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}$. لدينا :

$$\begin{aligned}x\top y = 2 &\Leftrightarrow xy-2x-2y+6 = 2 \\ &\Leftrightarrow xy-2x-2y+4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-2) = 0 \text{ أو } (x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2 \text{ أو } x = 2\end{aligned}$$

4 ب

تكون الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .

ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z},*,\top)$.

إذن : $\exists\, y \in \mathbb{Z}\backslash\{2\}\ ;\ x \top y = y \top x = 2$

و منه حسب نتيجة السؤال 4) أ) : $x = 2$ أو $y = 2$

إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف العنصر المحايد 2 و بالتالي $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة كاملة .

4 ج

تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z},*,\top)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z}\backslash\{2\}$ يقبل مماثلا (أو مقلوبا) في $(\mathbb{Z},\top)$.

و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لمماثل عنصر x من $\mathbb{Z}$ بالقانون $\top$.

ليكن y مماثل x بالنسبة للقانون $\top$. إذن :

$$\begin{aligned} x \top y = 3 &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3 \\ &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x-2) = (2x-3) \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x-3}{x-2}\right) \end{aligned}$$

و نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)$ ليست دائما عنصرا من $\mathbb{Z}$.

العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 1 بالنسبة لـ $\top$

و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 3 بالنسبة لـ $\top$

لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو مماثل 7 بالنسبة للقانون $\top$.

إذن توجد عناصر من $\mathbb{Z}$ لا تقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $\top$.

و بالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ ليست جسما .

التمرين الثاني

I 1

لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2\left(3+i\sqrt{3}\right)^2 - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= a^2\left(6+6i\sqrt{3}\right) - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= 6a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{-2a^2\left(1+i\sqrt{3}\right)}\ (\mathbf{1}) \end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 &= a^2\left(1-3-2i\sqrt{3}\right) \\ &= a^2\left(-2-2i\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{-2a^2\left(1+i\sqrt{3}\right)}\ (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن : $\Delta = a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$

I 2

لدينا : $\Delta = a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$

إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a - \left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4} \\ &= \frac{3a+i\sqrt{3}a+a-i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{a} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a + \left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4} \\ &= \frac{3a+i\sqrt{3}a-a+i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a+2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2} \end{aligned}$$

II 1

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $\dfrac{aff(A)-aff(O)}{aff(B)-aff(O)} = \dfrac{a-0}{ae^{\frac{i\pi}{3}}-0} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$

إذن : $\begin{cases} \dfrac{OA}{OB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{aff(A)-aff(O)}{aff(B)-aff(O)}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{aff(A)-aff(O)}{aff(B)-aff(O)}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هى الزاوية $\widehat{O}$ يساوي $60°$.

إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية :

لدينا : $OA = |aff(A)-aff(O)| = |a-0| = |a|$

و لدينا : $\begin{aligned} OB &= |aff(B)-aff(O)| \\ &= |b-0| = \left|ae^{\frac{i\pi}{3}}\right| = |a| \end{aligned}$

و كذلك : $\begin{aligned} AB &= |aff(B)-aff(A)| = |b-a| \\ &= \left|ae^{\frac{i\pi}{3}}-a\right| = \left|a\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)\right| = |a|\cdot\left|e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right| \\ &= |a|\cdot\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right| = |a|\cdot\left|\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |a| \end{aligned}$

نستنتج إذن أن : $OA = OB = AB$ و $A \neq B \neq C$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

II 2 أ

لدينا r دوران مُعَرف بما يلي : $(\mathcal{P}) \xrightarrow{r_M\left(\frac{\pi}{3}\right)} (\mathcal{P})$

ننطلق من الكتابة : $A_1 = r^{-1}(A)$ إذن : $r(A_1) = A$

و منه حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$\left(aff(A)-aff(M)\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(aff(A_1)-aff(M)\right)$$

يعني : $(a-z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1-z)$

يعني : $(a-z) = e^{\frac{i\pi}{3}}a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}}z$

يعني : $e^{\frac{i\pi}{3}}a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}}z$

يعني : $a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}\left(a - z + e^{\frac{i\pi}{3}}z\right)$

يعني : $a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a - e^{\frac{-i\pi}{3}}z + z$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} e^{\frac{-i\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

إذن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + z$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة $r(B) = B_1$.

إذن حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$\left(aff(B_1) - aff(M)\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(aff(B) - aff(M)\right)$$

يعني : $(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z\right)$

يعني : $b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z$

و لدينا : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و نضيف كذلك : $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لـ b_1 نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

II 2 ب

بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقايس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقايسان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .

لنبرهن أن : $OA_1 = B_1M$ و $OB_1 = A_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left|z - \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right| = |a_1|$$

إذن : $\boxed{OA_1 = B_1M}$ $(\mathbf{1})$

و بنفس الطريقة لدينا : $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

و لدينا كذلك : $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$= \left|z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right| = |b_1|$$

إذن : $\boxed{OB_1 = A_1M}$ $(\mathbf{2})$

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متقايسان . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع

II 3 أ

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

و منه : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$ إذن : $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b}\right)}$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

لدينا : $\begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} (z - a_1) = e^{\frac{-i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases}$

أي : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\boxed{\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b}\left(\frac{z - b}{z - a}\right)}$

بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(A_1) = A$ و $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $\frac{a}{b} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتابتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

إذن : $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1}$

و لدينا كذلك : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

إذن : $\boxed{\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1}$

و من هذه النتيجة نكتب : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نحن الآن مُسَلحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(2)\quad \boxed{\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)} \quad \text{و} \quad \boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = 1} \quad (1)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال 2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{i\pi}{3}}z \\ b_1 = -e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{-i\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{b}{a}\right)z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b}+\frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(a + \left(\frac{b}{a}\right)^2 z\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)(z-a)} = \frac{a - \frac{a}{b}z}{z-a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b}\right)(-b+z)}{(z-a)} = \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{\left(\frac{z-b_1}{z-a_1}\right) = \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)}$

II 3 ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

$\boxed{A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}} \Leftrightarrow \boxed{A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}}$

لدينا : $\boxed{A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}} \Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{0-a}{0-b}\right) \times \left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \boxed{A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}}$

التمرين الثالث

1 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0[n]$

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$

و منه : $(\exists m\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 3^n - 2^n = mn \quad \twoheadrightarrow (1)$

ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $(\exists s\epsilon\mathbb{N})\ ;\ n = ps \quad \twoheadrightarrow (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = \underbrace{ms}_{\epsilon\,\mathbb{N}}\,p$

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $3^n - 2^n \equiv 0[p] \quad \twoheadrightarrow (3)$

لكي نبرهن على أن $p \geq 5$ يكفي أن نُفَنِّد العبارتين $p = 2$ و $p = 3$

نفترض أن $p = 2$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$

إذن حسب الافتراض : $3^n - 2^n \equiv 0\,[2] \quad \twoheadrightarrow (4)$

و نعلم أنه كيفما كان $n\epsilon\mathbb{N}$ لدينا : $2^n \equiv 0[2] \quad \twoheadrightarrow (5)$

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0\,[2]$

يعني : $3^n \equiv 0\,[2]$ و منه : 2 يقسم 3^n أي : $\boxed{2 \text{ يقسم } 3 \times 3^{n-1}}$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \twoheadrightarrow (7)$

(6) من (6) و (7) نستنتج إذن حسب $(Gauss)$ أن : 2 يقسم 3

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 2$

نفترض أن $p = 3$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$

إذن حسب الافتراض نكتب : $3^n - 2^n \equiv 0\,[3] \quad \twoheadrightarrow (8)$

و نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -3^n \equiv 0\,[3] \quad \twoheadrightarrow (9)$

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف: $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0\,[3]$

يعني : $-2^n \equiv 0\,[3]$ أي : $2^n \equiv 0\,[3]$

يعني : 3 يقسم 2^n و منه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1} \twoheadrightarrow (10)$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن : $2^{n-1} \wedge 3 = 1\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \twoheadrightarrow (11)$

من (10) و (11) نستنتج حسب $Gauss$ أن : 3 يقسم 2

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 3$

خلاصة السؤال أ) :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$ و $p \geq 5$

1 ب

نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $p\wedge 2=1$

و منه حسب $Fermat$: $2^{p-1}\equiv 1\,[p]$

و بنفس الطريقة p عدد أولي يُخالف العدد الأولي 3 إذن : $p\wedge 3=1$

و منه حسب $Fermat$: $3^{p-1}\equiv 1\,[p]$

1 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $n\wedge(p-1)=1$ ثم نستعمل $Bezout$.
في البداية وجب التذكير بخاصية قوية و مهمة تربط بين مفهوم التفكيك إلى جداء عوامل أولية و مفهوم القاسم المشترك الأكبر . و سوف أُذَكّر بها باستعمال أمثلة فقط دون الخوض في متاهات الرموز الرياضية.

لاحظ الأمثلة التالية :

$$\left|\begin{array}{l}(2^3\times 5^4\times 7^6)\ \wedge\ (2^1\times 5^6\times 7^3\times 11^2)=(2^1\times 5^4\times 7^3)\\(2^5\times 7^8)\ \wedge\ (3^4\times 11^6)=1\\(2^7\times 3^4\times 13)\ \wedge\ (13\times 11^4)=13\\(13^5\times 2^7\times 3^2)\wedge(5^5\times 7\times 11^2)=1\end{array}\right.$$

بالعودة إلى السؤال ج) : ليكن $p^{\alpha_1}\times {p_2}^{\alpha_2}\times {p_3}^{\alpha_3}\times\cdots\times {p_i}^{\alpha_i}$ تفكيك العدد n إلى جداء عوامل أولية بحيث : $p<p_2<\cdots<p_i$

و ليكن $q^{r_1}\times {q_2}^{r_2}\times {q_3}^{r_3}\times\cdots\times {q_j}^{r_j}$ تفكيك العدد $(p-1)$ إلى جداء عوامل أولية بحيث : $q<q_2<\cdots<q_j$

بما أن p هو أصغر قاسم أولي للعدد n و بما أن $(p-1)<p$

فإن : $q<q_1<q_2<\cdots<q_j<\boldsymbol{p}<p_2<\cdots<p_i$

نلاحظ أن الأعداد الأولية $q.$ كلها تخالف الأعداد الأولية $p.$ إذن :

$$(p^{\alpha_1}\times {p_2}^{\alpha_2}\times\cdots\times {p_i}^{\alpha_i})\wedge(q^{r_1}\times {q_2}^{r_2}\times\cdots\times {q_j}^{r_j})=1$$

يعني : $n\wedge(p-1)=1$

و منه حسب $Bezout$: $\exists\,(a,u)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ an+u(p-1)=1$

نضع $b=-u$ إذن : $\exists\,(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ an-b(p-1)=1$ $(12)\twoheadrightarrow$

ملاحظة 1) : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال مبرهنة $Besout$ العكسية ما يلي :

$$(*)\ \to\ \left|\begin{array}{l}a\wedge b=1\\\boxed{a\wedge(p-1)=1}\\n\wedge b=1\\n\wedge(p-1)=1\end{array}\right.$$

خلاصة السؤال ج) : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 و يحقق $3^n-2^n\equiv 0\,[n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة فإنه يوجد عددان نسبيان a و b بحيث : $an-b(p-1)=1$

1 د

ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$.

يعني : $\begin{cases}(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\\a=q(p-1)+r\\0\leq r<p-1\end{cases}$

ملاحظة 2) : قبل أن نجيب على السؤال د) لاحظ أنه بإمكاننا أن نبين أن $r>0$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا : $r\geq 0$ إذن $r=0$ أو $r>0$.

نفترض أن $r=0$ إذن : $a=q(p-1)$

يعني : $(p-1)$ يقسم a و منه : $a\wedge(p-1)=(p-1)$

إذن حسب النتيجة $(*)$: $(p-1)=1$

يعني : $p=2$. و هذا تناقض لأن $p\geq 5$

إذن : $0<r<(p-1)$

نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرحة مع r ، إلى السؤال د) .

و ننطلق من التعبير التالي : $a=q(p-1)+r$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على :

$$an=qn(p-1)+rn$$

يعني : $rn=an-qn(p-1)$ $(\mathbf{13})\twoheadrightarrow$

و لدينا حسب النتيجة (12) : $an=1+b(p-1)$

نُعَوّض an بالتعبير $1+b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد :

$$rn=1+b(p-1)-qn(p-1)$$

أي : $rn=1+(b-qn)(p-1)$

نضع : $k=(b-qn)$ إذن : $rn=1+k(p-1)$

و لإتمام الجواب يكفي أن نُبرهن أن $k\in\mathbb{N}^*$

لدينا : $(b,q,n)\in\mathbb{Z}^3$ إذن : $k\in\mathbb{Z}$

و نَفْصل هنا بين ثلاث حالات و هي : $\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$ أو $\boldsymbol{k}<0$ أو $\boldsymbol{k}>0$

نفترض أن : $k=0$ إذن : $b=qn$

نُعوض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12) : $an-qn(p-1)=1$

و منه حسب النتيجة (13) : $rn=1$

أي : n يقسم 1 يعني : $n=1$

و هذا **تناقض** لأن : $n>1$ إذن : $k\neq 0$ $\twoheadrightarrow$ $(\star)$

نفترض أن : $k<0$ إذن : $b<qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب قطعا $-(p-1)$ نجد :

$$-b(p-1)>-qn(p-1)$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكمية an نجد :

$$an-b(p-1)>an-qn(p-1)$$

إذن باستعمال النتيجتين (12) و (13) نجد : $1>rn$ $(\mathbf{14})\twoheadrightarrow$

و لدينا : $r>0$ و $n>1$ إذن : $rn>r$ $(\mathbf{15})\twoheadrightarrow$

من (14) و (15) نستنتج أن : $1>rn>r$ يعني : $1>r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن : $r=0$ و هذا **تناقض** لأن $r\neq 0$ حسب **الملاحظة 2)** .

إذن : $k>0$ يعني : $k\in\mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال د) : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn=1+k(p-1)$

أو بتعبير جميل : $(\exists k\in\mathbb{N}^*)\ ;\ rn=1+k(p-1)$ $(\mathbf{16})\twoheadrightarrow$

2

باستعمال البرهان بالخلف ، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق : $3^n-2^n\equiv 0\,[n]$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

ننطلق من النتيجتين : $\begin{cases}2^{p-1}\equiv 1\,[p]\\3^{p-1}\equiv 1\,[p]\end{cases}$

بما أن : $(k\in\mathbb{N}^*)$ فإن : $\begin{cases}2^{k(p-1)}\equiv 1\,[p]\\3^{k(p-1)}\equiv 1\,[p]\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}-2\times 2^{k(p-1)}\equiv -2\,[p]\\3\times 3^{k(p-1)}\equiv 3\,[p]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}-2^{1+k(p-1)}\equiv -2\,[p]\\3^{1+k(p-1)}\equiv 3\,[p]\end{cases}$

و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب : $\begin{cases} -2^{rn} \equiv -2\ [p] \\ 3^{rn} \equiv 3\ [p] \end{cases}$

نجمع هاتين المتوافقتين طرفا بطرف نجد : $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1\ [p]$ $\twoheadleftarrow$ **(17)**

و لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

إذن : $3^n \equiv 2^n\ [p]$

و بما أن $(r \in \mathbb{N}^*)$ فإن : $3^{rn} \equiv 2^{rn}\ [p]$

و منه : $2^{rn} - 3^{rn} \equiv 0\ [p]$ $\twoheadleftarrow$ **(18)**

نجمع المتوافقتين (17) و (18) طرفا بطرف نجد :

$$3^{rn} - 2^{rn} + 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 1 + 0\ [p]$$

يعني : $0 \equiv 1\ [p]$ يعني كذلك : $1 \equiv 0\ [p]$ أي : p يقسم 1

و منه $p = 1$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه .

و هذا **تناقض** لأن $p \geq 5$ إذن n لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التمرين بأكمله :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\ ;\ 3^n - 2^n \not\equiv 0\ [n]}$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x \ln x}\ ;\ \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$

نضع : $\varphi(x) = x \ln x$

إذن :
$$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+} \left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right)}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\left(\dfrac{x\ln x - 1\ln 1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)} = \frac{1}{\varphi'_d(1)}$$

و لدينا : $\varphi(x) = x\ln x$ إذن : $\varphi'(x) = \ln x + 1$

يعني : $\varphi'_d(1) = \varphi'_g(1) = \varphi'(x) = \ln(1) + 1 = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = \dfrac{1}{\varphi'_d(1)} = \dfrac{1}{1} = 1 = h(1)$

إذن : $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

1 ب

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة و القابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. إذن : v قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

و لدينا : $v'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

- إذا كان : $x = 1$ فإن : $v'(x) = 0$
- إذا كان : $x > 1$ فإن : $v'(x) < 0$
- إذا كان : $x < 1$ فإن : $v'(x) > 0$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to0^+} v(x) = \lim_{x\to0^+} (\ln x - x + 1)$$
$$= \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - x + 1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
v	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $]0;+\infty[$.
- تزايدية على المجال $]0;1]$.
- تناقصية على المجال $[1;+\infty[$
- $v(1) = -2$

إذن -2 قيمة قصوية للدالة v على المجال $]0;+\infty[$.

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ v(x) \leq -2 < 0$

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ v(x) < 0$

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ \ln x - x + 1 < 0$

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ \ln x < x - 1$

و بما أن : $]1;+\infty[\ \subset\ ]0;+\infty[$

فإن : $\forall\, x \in\,]1;+\infty[\ ;\ \ln x < x - 1$

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$. لدينا : $h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}$

إذن :
$$h'(x) = \frac{x\ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{x\ln x - (x\ln x + x - \ln x - 1)}{(x\ln x)^2}$$
$$= \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

و نعلم أن : $(\forall x > 1)\ ;\ (\ln x - x + 1) < 0$

و كذلك : $(\forall x > 1)\ ;\ (x\ln x)^2 > 0$

إذن : $(\forall x > 1)\ ;\ \dfrac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} < 0$

يعني : $(\forall x > 1)\ ;\ h'(x) < 0$

أي أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

2 أ

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\ln x}\right)-\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)-\left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \left(\frac{1}{+\infty}\right)-\left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

نُلخص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
h	$1 \searrow 0$

2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ بحيث :

$$h(\,[1;+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x)\ ;\ h(1)\right] =]0;1]$$

إذن : h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]0;1]$.

أي : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \exists!\, y \in\,]0;1]\ :\ y = h(x)$

أو بتعبير آخر : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \exists!\, h(x) \in\,]0;1]$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني

1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

لاحظ في البداية أن : $(t\ln t)' = 1+\ln t$

نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t-\ln t}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t}{t\ln t}\right)dt - \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\frac{(t\ln t)'}{t\ln t}\,dt - \int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,dt$$
$$= [\ln(t\ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2}$$
$$= (\ln(x^2\ln(x^2)) - \ln(x\ln x)) - (\ln(x^2)-\ln x)$$
$$= \ln\left(\frac{x^2\ln(x^2)}{x\ln x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \ln\left(\frac{2x^2\ln(x)}{x\ln x}\right) - \ln(x)$$
$$= \ln(2x)-\ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x>1)\ ;\ \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2}$

1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

$$g(x)-\ln 2 = \int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,dt - \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}}{t\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)dt$$

1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع : $\sqrt{t} = u$

إذن : $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ يعني : $dt = 2u\,du$

- إذا كان $t = x$ فإن : $u = \sqrt{x}$
- إذا كان $t = x^2$ فإن : $u = x$

إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)dt = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u^2\ln(u^2)}\right)(2u\,du)$$
$$= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{2u^2\ln u}\right)(2u\,du)$$
$$= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u\ln u}\right)du$$

إذن : $(\forall x>1)\ ;\ g(x)-\ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{1}{u\ln u}\right)du$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels

2 أ

ليكن $x > 1$ و ليكن $t \in [\sqrt{x};x]$.

لدينا الدالة f تناقصية على المجال $[1;+\infty[$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[\sqrt{x};x]$ لأن $x>1$.

بما أن : $\sqrt{x}\leq t\leq x$ فإن : $h(x)\leq h(t)\leq h(\sqrt{x})$

يعني : $h(x) \leq \left(\frac{t-1}{t\ln t}\right) \leq h(\sqrt{x})$

إذن : $\int_{\sqrt{x}}^{x} h(x)\,dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} h(\sqrt{x})\,dt$

يعني : $h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}1\,dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x}1\,dt$

يعني : $h(x)\,[t]_{\sqrt{x}}^{x} \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq h(\sqrt{x})\,[t]_{\sqrt{x}}^{x}$

يعني : $h(x)(x-\sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج) $(\forall x>1)$ نكتب :

$$(*)\quad \boxed{h(x)(x-\sqrt{x}) \leq g(x)-\ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

2 ب

نضرب أطراف التأطير $(*)$ في العدد الموجب قطعا $\left(\frac{1}{x-1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x-1} \leq \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير على يمين 1 نجد :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}h(x)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x}) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(\sqrt{x})$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x)}_{x\to 1^+ \;\to\; \frac{1}{2}} \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x-1} \leq \underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})}_{x\to 1^+ \;\to\; \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

و بالتالي : $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g'_d(1) = \frac{1}{2}$.

2 ج

لدينا حسب التأطير الوارد في السؤال 2) أ) :

$$(\forall x > 1) \;;\; g(x) \geq h(x)(x-\sqrt{x}) + \ln 2$$

لنحسب نهاية $(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x-1)}{x\ln x}+\ln 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-1)}{x\ln x}+\ln 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)+\ln 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{0^+}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)+\ln 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(+\infty)(1-0)(1-0)+\ln 2$$

$$= (+\infty)(1)(1)+\ln 2 = +\infty$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) \;;\; g(x) \geq \underbrace{h(x)(x-\sqrt{x}) + \ln 2}_{x\to+\infty \;\to\; +\infty}$$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التأطير الثمين المحصل عليه في السؤال 2) أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا و هي : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. لدينا :

$$(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2 \leq g(x) \leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})+\ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln x}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x)+\frac{\ln 2}{x}$$

$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0)+\frac{\ln 2}{+\infty} = (1-0)(0)+0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=\sqrt{x}}}\left(1-\frac{1}{t}\right)h(t)+\frac{\ln 2}{t^2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(0)+\frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln x}{x}}_{x\to+\infty \;\to\; \mathbf{0}} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}}_{x\to+\infty \;\to\; \mathbf{0}}$$

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$

3 أ

أذكّر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I و بالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تنعدم في a و تحقق :

$$\begin{array}{ll} F : I \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

انتهى التذكير .

ليكن a عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $]1;+\infty[$

و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $]1;+\infty[$ و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تنعدم في a و معرفة بما يلي :

$$\begin{array}{ll} v :]1;+\infty[\longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x u(t)\,dt \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt \;;\; x > 1 \\ &= \int_x^{a} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt \\ &= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt - \int_a^{x} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt \\ &= v(x^2) - v(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x) = v(x^2) - v(x)\,;\; x > 1$

انطلاقا من الدوال $x \to x$ و v و $x \to x^2$ نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مركب دالتين ، أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned} (\forall x > 1) \;;\; g'(x) &= \left(v(x^2) - v(x)\right)' \\ &= 2x\, v'(x^2) - v'(x) \\ &= 2x\, u(x^2) - u(x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2}\ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{2x}{2x\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \frac{x}{x\ln x} - \frac{\sqrt{x}}{x\ln x} = \frac{x-\sqrt{x}}{x\ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2\ln\left(\sqrt{x}^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x > 1) \;;\; g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})}$

3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) من الجزء الأول :

$$(\forall x \geq 1) \;;\; 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن : $x \geq 1 \implies \sqrt{x} \geq 1$

إذن : $(\forall x \geq 1) \;;\; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

و منه : $(\forall x \geq 1) \;;\; 0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \geq 1) \;;\; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

و من هذه الكتابة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

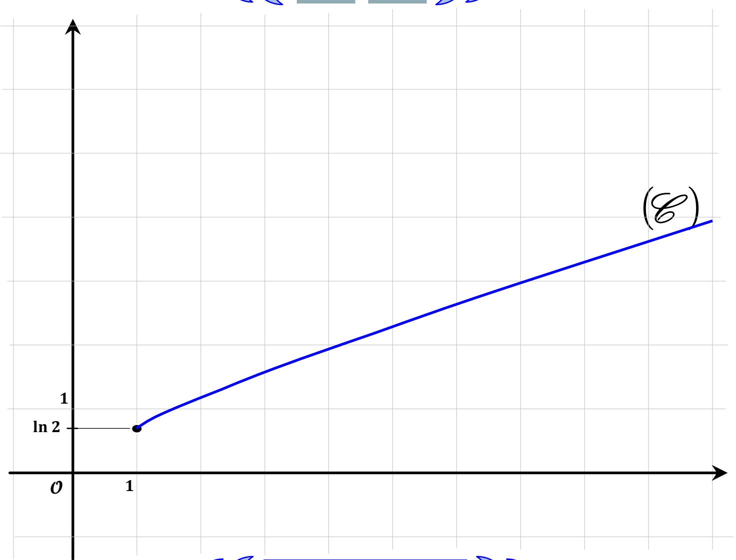
و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

- g معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$
- g تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$\ln 2 \nearrow +\infty$

3 ج



الجزء الثالث

1 I

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

لدينا : $k(x) = g(x) - x + 1$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$

فإن : k قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا : $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني :

$$(\forall x \geq 1) \;;\; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

إذن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ g'(x) < 1$

و منه : $(\forall x \geq 1)\ ;\ g'(x) - 1 < 0$

أي : $(\forall x \geq 1)\ ;\ k'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة k تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$.

إذن k تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو صورته بالدالة k .

و لدينا $k([1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} k(x)\ ;\ k(1)\right]$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} k(x) &= \lim_{x\to+\infty}(g(x)-x+1) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}-1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(0-1+\frac{1}{+\infty}\right)(+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty\end{aligned}$$

و بالتالي : k تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]-\infty;\ln 2]$.

I - 2

لدينا : $\ln 2 > 0$ إذن : $0 \in]-\infty;\ln 2]$

و بما أن k تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالدالة k في المجال $[1;+\infty[$.

يعني بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ;\ k(\alpha) = 0$

يعني : $\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ;\ g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

يعني : $\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ;\ 1 + g(\alpha) = \alpha$

أو بتعبير لطيف : المعادلة $1 + g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;+\infty[$ و هو α .

II - 1 - أ

باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة (P_n) التالية :

$(P_n) :\ (\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات : $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن : العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و نفترض أن : $1 \leq u_n < \alpha$

نُدخل على هذا التأطير الدالة التزايدية قطعا g نحصل على :

$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$

ثم نضيف 1 لكل طرف : $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن : باستعمال النتائج السابقة نكتب : $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n \geq 0 \end{cases}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

أي : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

II - 1 - ب

لدينا حسب آخر نتيجة : $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_n < \alpha$

نُدخل الدالة التناقصية قطعا k على هذه المتفاوتة نجد :

$(\forall n \geq 0)\ ;\ k(u_n) > k(\alpha)$

و بما أن : $k(\alpha) = 0$ فإن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ k(u_n) > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ g(u_n) - u_n + 1 > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 + g(u_n) > u_n$

و منه : $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_{n+1} > u_n$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

II - 1 - ج

لدينا $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية قطعا .

و بما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_n < \alpha$ حسب 1) أ))

فإنها متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $1 + g(\ell) = \ell$

و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال $]1;+\infty[$ و هو α .

إذن : $\ell = \lim_{n\infty}(u_n) = \alpha$

II - 2 - أ

نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي : $\psi(x) = 1 + g(x)$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

و منه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $]1;+\infty[$.

نختار المجال $[u_n;\alpha]$ الذي يوجد ضمن $]1;+\infty[$

(و ذلك لأن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$)

إذن بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF)

على الدالة ψ في المجال $[u_n\ ;\alpha]$ نجد :

$$\exists\, c \in]u_n;\alpha[\ ;\ \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

لدينا : $\begin{cases} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{cases}$

إذن : $\exists\, c \in]u_n;\alpha[\ ;\ \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$

يعني : $(*)\quad \exists\, c \in]u_n;\alpha[\ ;\ \left|\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| = |\psi'(c)|$

لدينا : $\psi'(c) = g'(c)$ و $c \in]u_n;\alpha[$

إذن : $1 \leq u_n < c < \alpha$ أي : $c \geq 1$

و منه حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني : $0 < g'(c) \leq \dfrac{1}{2}$

إذن : $|\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \dfrac{1}{2}$

أي : $(**)\quad |\psi'(c)| \leq \dfrac{1}{2}$

إذن باستعمال الكتابتين $(*)$ و $(**)$ نكتب :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ \left|\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leq \frac{1}{2}$$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$

II 2 ب

لدينا : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$

إذن بتغيير $(n+1)$ بـ n نجد : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_{n-1} - \alpha|$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|u_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|u_{n-3} - \alpha|$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha|$$

إذن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع .

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

من أجل $n = 0$ لدينا : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}$ و نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

بما أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

فإن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.

و بالتالي حسب مبدأ الترجع :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

II 2 ج

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعا و أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\boxed{(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}}}$$

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n - \alpha) = 0$

أي : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

I لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

I 1 بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G . — 0,50 ن

I 2 نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية

و نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G بما يلي : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

I 2 أ بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$. — 0,75 ن

I 2 ب استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . — 0,50 ن

II نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II 1 أ تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ — 0,50 ن

II 1 ب تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$. — 0,50 ن

ثم استنتج أن المصفوفة $(A+I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده .

II 2 لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b) = a \cdot I + b \cdot A$. — 0,75 ن

و نعتبر المجموعة : $E = \{ \ M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

I 1 حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . — 1,00 ن

I 2 أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X . — 0,50 ن

II ننجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

$N = \{$ الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء $\}$.

$R = \{$ الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء $\}$.

$E = \{$ جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء $\}$.

0,50 ن	II 1	بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$
0,50 ن	II 2	أحسب $p(E)$
0,50 ن	II 3	أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق .

التمرين الثالث : (3,5ن)

I ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

0,50 ن	I 1	بين أن : $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلي المعادلة (E) .
	I 2	نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$.
0,50 ن	I 2 أ	بين أن : $a - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$
1,00 ن	I 2 ب	استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 .

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نفترض أن $\Re(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

0,50 ن	II 1	حدد لحقي كل من J و K منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a .
0,50 ن	II 2	ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

0,50 ن	II 3	أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع : (8,25 ن)

1 لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ن	1 أ	بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
0,50 ن	1 ب	أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = 0$)
0,50 ن	1 ج	بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ :

$$(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

0,50 ن	1 د	ضع جدول تغيرات الدالة f .

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

و ليكن $(\mathscr{C}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2 **أ** حدد دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$. — 0,25 ن

2 **ب** بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t$ — 0,50 ن

2 **ج** بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\displaystyle\int_e^x\frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$ — 0,75 ن

2 **د** استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$ — 0,50 ن

2 **هـ** بين أن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما . — 0,50 ن

2 **ز** أنشئ $(\mathscr{C}_F)$ (نأخذ من أجل ذلك $F(1)\approx 0{,}5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}4$) — 1,00 ن

3 لكل x من المجال $[0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=x-F(x)$.

3 **أ** بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ . — 0,75 ن

3 **ب** بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0,+\infty[$. — 0,50 ن

3 **ج** بين أن : $\alpha_n\geq n\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\infty}\alpha_n$ — 0,50 ن

4 **أ** بين أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ 0<\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$ — 0,50 ن

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

4 **ب** أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$ — 0,50 ن

التمرين الخامس : (1,75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\left(\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n=\ln(u_n)$

1 تحقق أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ v_n=n^2[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))]$ — 0,25 ن

2 باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : — 0,50 ن

$$(\forall n\geq 1),(\exists\, c\,\epsilon\,]\,n\,;n+1\,[\,)\ ;\ v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$$

3 بين أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ \dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{(1+(1+n)^2)arctan(n+1)}$ — 0,50 ن

4 أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}u_n$ — 0,50 ن

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

I 1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x * y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 1 < x * y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x * y > 1$ و $x * y < 2$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} > 0 \text{ و } \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} < 2$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; \alpha+\beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

إلى العمل : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$.

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$.

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$.

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعا .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعا .

إذن : جداؤهما كمية موجبة قطعا . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x * y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$
$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا التالية :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نحصل على : $$\frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} > 1$$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x * y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x * y < 2}$ (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2)$
$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)]$
$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نجد : $$2 > \frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$$

يعني : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 2 > x * y}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; 1 < x * y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; x * y \in G$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 أ

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f \; : \; (\mathbb{R}_+^*,\times) & \longmapsto & (G,*) \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}}$$

لكي يكون التطبيق f تشاكلا يكفي أن نتحقق من أن :

$\forall \, x,y \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; f(x \times y) = f(x) * f(y)$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $$f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right) * \left(\frac{y+2}{y+1}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x \times y)$$

إذن : $\boxed{f(x) * f(y) = f(x \times y)}$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$(\forall y \in G) \, , (\exists! \, x \in \mathbb{R}_+^*) \; : \; f(x) = y$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقا تقابليا عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ y .

ليكن y عنصرا من المجموعة G و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = y$.

هذه المعادلة تصبح : $\dfrac{x+2}{x+1} = y$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

نجد : $(x+2) = y(x+1)$

يعني : $x+2 = xy+y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\dfrac{1}{1-y}$

نجد : $x = \dfrac{y-2}{1-y}$

نلاحظ أن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

أي وجود عدد آخر y' يحقق $x = \dfrac{y'-2}{1-y'}$

فإنه سوف نحصل على : $\dfrac{y-2}{1-y} = \dfrac{y'-2}{1-y'}$

أي : $y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$

أي : $(y-y')=0$ أي : $y=y'$

و بالتالي فإن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\dfrac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall\, y \in\,]1,2[\ ;\ \dfrac{y-2}{1-y}>0$

لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(y-2)<0$

و لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(1-y)<0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميتان سالبتان قطعا.

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\forall\, y \in\,]1,2[\ ;\ \dfrac{y-2}{1-y}>0$

إذن : $(\forall y\in G),\left(\exists!\, x=\dfrac{y-2}{1-y}\in\mathbb{R}_+^*\right)\ :\ f(x)=y$

يعني أن f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G .

خلاصة : $\boxed{f \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}_+^*,\times) \text{ نحو } (G,*)}$.

ب 2 I

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ عن طريق التطبيق f .

و من ثم :

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن $\top$ تبادلي أو تجميعي في F .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر المحايد للقانون $\top$ في F .

إذا كان x' هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ بالنسبة للقانون $\top$ في F

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f\ :\ (\mathbb{R}_+^*,\times)\ \longmapsto\ (G,*)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ عن طريق التطبيق f .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$

أي العدد $\frac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن تتحقق من أن :

$$(\forall x\in G)\ ;\ x*\frac{3}{2}=\frac{3}{2}*x=x$$

أ 1 II

تذكير : لتكن $(E,*,\top)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E .

نقول بأن عنصرا x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x\neq e \\ \exists\, y\in E\setminus\{e\}\ ;\ x\top y=y\top x=e\end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ التي صفرها $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}A^3&=A\times A\times A\\&=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathcal{O}\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^3=\mathcal{O}}$

لدينا المصفوفة $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A\neq\mathcal{O}$

و لدينا : $A^3=A\times A^2=\mathcal{O}$

مع : $A^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathcal{O}$

إذن نستنتج أن $A\neq\mathcal{O}$ و توجد مصفوفة و هي A^2 تخالف $\mathcal{O}$

و تحقق $A\times A^2=A^2\times A=\mathcal{O}$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

ب 1 II

$$\begin{aligned}(A^2-A+I)\times(A+I)&=A^3+A^2-A^2-A+A+I\\&=A^3+I=\mathcal{O}+I=I\end{aligned}$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة (A^2-A+I) عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A+I)\times(A^2-A+I)=(A^2-A+I)\times(A+I)=I$

و بالتالي $(A+I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة (A^2-A+I) .

و لدينا : $(A+I)=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}(A^2-A+I)&=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-3&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

II 2

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{pmatrix}\forall\, x,y\in E\\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix} \;;\; \begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y \\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x \\ (\alpha\times\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x) \\ 1\cdot x = x\end{cases}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$
و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .
في البداية نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتان من E .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= aI+bA-cI-dA \\ &= (a-c)I+(b-d)A \\ &= M(\,a-c\;;b-d\,)\in E \end{aligned}$$

إذن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $\boxed{(E,+) \text{ زمرة تبادلية}}$ $\mathbf{(1)}$
نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$
و ذلك لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\,,\forall\alpha\in\mathbb{R}\;;\;\alpha\cdot M(a,b)=M(\alpha a,\alpha b)\in E$

إذن :
$$\begin{pmatrix}\forall\, A,B\in E\\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix} \;;\; \begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B \\ (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A \\ (\alpha\times\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A) \\ 1\cdot A = A\end{cases} \quad \mathbf{(2)}$$

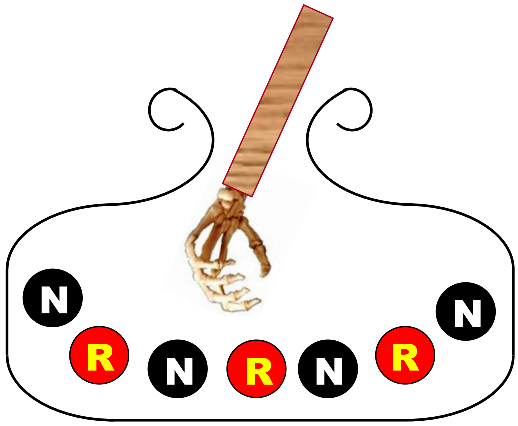
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
نعتبر الأسرة (I,A) .
من الواضح أن الأسرة (I,A) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.
لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\;;\;M(a,b)=aI+bA$
يعني أن كل مصفوفة من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين I و A
لنبين الآن أن الأسرة (I,A) حرة .
من أجل ذلك ننطلق من تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$a\cdot I+b\cdot A=\mathcal{O}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3b&2b\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&3b&2b\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=0\\ b=0\end{cases}$$

إذن الأسرة (I,A) حرة .
و بما أن (I,A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

التمرين الثاني

I 1



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل 7^4 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega)=7^4=2401$
بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$
قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X \;:\; \{0,1,2,3,4\} &\longmapsto [0,1] \\ k &\longmapsto P_X(k)=p[X=k] \end{aligned}$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

لنحسب : $p[X=0]$

الحدث $[X=0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4 امكانية لسحب الكرات الأربع .
إذن : $\boxed{p[X=0]=\dfrac{3^4}{7^4}=\dfrac{81}{2401}}$

لنحسب : $p[X=1]$

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :
4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء
C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء
3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء
إذن : $\boxed{p[X=1]=\dfrac{4^1\times C_4^1\times 3^3}{7^4}=\dfrac{432}{2401}}$

لنحسب : $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين .
و من أجل ذلك لدينا :
4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .
C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .
3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .
إذن : $\boxed{p[X=2]=\dfrac{4^2\times C_4^2\times 3^2}{7^4}=\dfrac{864}{2401}}$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :

3^1 إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4^3 إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $\boxed{p[X=3] = \dfrac{3^1\times C_4^1\times 4^3}{7^4} = \dfrac{768}{2401}}$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $\boxed{p[X=4] = \dfrac{4^4}{7^4} = \dfrac{256}{2401}}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X\ :\ \{0,1,2,3,4\}\ \longmapsto\ [0,1]$$

$$\begin{aligned}
0 &\longmapsto P_X(0) = \frac{81}{2401}\\
1 &\longmapsto P_X(1) = \frac{432}{2401}\\
2 &\longmapsto P_X(2) = \frac{864}{2401}\\
3 &\longmapsto P_X(3) = \frac{768}{2401}\\
4 &\longmapsto P_X(4) = \frac{256}{2401}
\end{aligned}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\frac{81}{2401}+\frac{432}{2401}+\frac{864}{2401}+\frac{768}{2401}+\frac{256}{2401}=1$$

2 I

$$E(X) = \sum_{0}^{4} k\cdot p[X=k]$$

$$= 0\left(\frac{81}{2401}\right)+1\left(\frac{432}{2401}\right)+2\left(\frac{864}{2401}\right)+3\left(\frac{768}{2401}\right)+4\left(\frac{256}{2401}\right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$

1 II

لدينا : $p(E\cap N) = p_N(E)\times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحبات متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزيء الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى

E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية

E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E = E_1\cap E_2\cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1)\times p_N(E_2)\times p_N(E_3)$

يعني :
$$\begin{aligned}
p(E\cap N) &= p_N(E)\times p(N)\\
&= p_N(E_1)\times p_N(E_2)\times p_N(E_3)\times p(N)\\
&= \frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}\times\frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \boxed{\frac{12}{55}}
\end{aligned}$$

2 II

$$\begin{aligned}
p(E) &= p(E\cap N)+p(E\cap R)\\
&= \frac{12}{55}+p_R(E_1)\times p_R(E_2)\times p_R(E_3)\times p(R)\\
&= \frac{12}{55}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{7}\\
&= \frac{12}{55}+\frac{72}{9240} = \boxed{\frac{87}{385}}
\end{aligned}$$

3 II

لنحسب : $p_E(R)$

$$\begin{aligned}
p_E(R) &= \frac{p(R\cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E)\times p(R)}{p(E)}\\
&= \frac{p_R(E_1)\times p_R(E_2)\times p_R(E_3)\times p(R)}{p(E)}\\
&= \frac{\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \boxed{\frac{1}{29}}
\end{aligned}$$

التمرين الثالث

1 I

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2\,z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$$

لدينا :
$$\begin{aligned}
\Delta &= 4(a-1)^2-8(a-1)^2\\
&= -4(a-1)^2\\
&= \big(2i(a-1)\big)^2
\end{aligned}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$z_1 = \frac{2(a-1)+2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1)-2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$

أ 2 I

لدينا $a=e^{i\theta}$ مع $0<\theta<\pi$ إذن : $(a-1)=e^{i\theta}-1$

$$\begin{aligned}
(a-1) = e^{i\theta}-1 &= \cos\theta+i\sin\theta-1\\
&= \cos(\theta)-1+i\sin(\theta)
\end{aligned}$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1)=r\,e^{i\varphi}$.

يعني : $\cos(\theta)-1+i\sin(\theta) = r\cos(\varphi)+i\,r\sin(\varphi)$

أي :
$$\begin{cases}\cos(\theta)-1 = r\cos(\varphi)\\ \sin(\theta) = r\sin(\varphi)\end{cases}$$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta)-1)^2+sin^2\theta = r^2(cos^2\theta+sin^2\theta)$

يعني : $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta = r^2$

يعني : $2(1-\cos\theta) = r^2$

يعني : $2\left(1 - \left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)\right) = r^2$

يعني : $2\left(2 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = r^2$

يعني : $4\left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = r^2$

يعني : $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = r^2$

يعني : $r = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $r > 0$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننطلق من الكتابة $\sin\theta = r\sin\varphi$

يعني : $\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\varphi)$

يعني : $\cancel{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cancel{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

يعني : $\frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني $\varphi \equiv \frac{\theta - \pi}{2}\ [2\pi]$

إذن : $\boxed{(a-1) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}}$

ب 2 I

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

إذن :

$$z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

1 II

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

إذن : $\boxed{aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}}$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

إذن : $\boxed{aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}}$

2 II

لدينا r_1 دوران مركزه J و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

و لدينا $r_1(C) = C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C') - aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C) - aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left(c' - \frac{a+i}{2}\right) = i\left(i - \frac{a+i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A) = A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A') - aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A) - aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left(a' - \frac{a-i}{2}\right) = i\left(a - \frac{a-i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن : $\boxed{c' = z_2 \quad \text{و} \quad a' = z_1}$

3 II

لدينا :

$$\frac{a' - c'}{a-1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}} = \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)} = \frac{i\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}} = i$$

إذن : $\frac{a' - c'}{a-1} = i$ و منه : $\arg\left(\frac{a' - c'}{a-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.

أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B' \in (AB')$ و $(A'C') \perp (AB')$.

التمرين الرابع

أ 1

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + (x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0^+)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 = f(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (+\infty)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} x\,(\ln x)^2=0$$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)$ نجد :

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-1-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(-x(\ln x)^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=(-0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}\left(1+\sqrt{1+(0)^2}\right)}\right)=(0)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

إذن :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=0$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و $f_d'(0)=0$.

1 ج

<u>**تذكير**</u> : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I .

و كانت f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J .

إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كان : $g(I)\subseteq J$

لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$

نضع : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

و نضع : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ \psi(x)=x\ln x$

إذن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\varphi\circ\psi\ (x)$

لدينا ψ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و φ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن تكون الدالة $\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

إذا كان : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $\psi(x)=x\ln x\ \epsilon\ \left[\frac{1}{e},+\infty\right[\subset\mathbb{R}$

إذن : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

إذن الدالة $f=\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$. لدينا :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}=(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}}$$

إذن :

$$f'(x)=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}-1}(1+(x\ln x)^2)'$$

$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(x\ln x)'$$

$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(1+\ln x)$$

$$=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :

$$(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1 د

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x>0)\ ;\ (1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1+\ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2 أ

لدينا :

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx$$

$$=\ln(|\ln x|)+c\quad ;\quad c\epsilon\mathbb{R}$$

بما أن : $x\ \epsilon\ [e;+\infty[$ فإن : $\ln x\geq 1$

نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x\to\ln(\ln x)$ دالة أصلية

للدالة $x\to\frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e;+\infty[$.

و أشير إلى أن $x\to\ln(\ln x)$ دالة معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$

إذن فهي متصلة على $[e,+\infty[$ لأن : $[e,+\infty[\ \subset\ ]1,+\infty[$.

ب 2

ليكن t عنصرا من المجال $[e,+\infty[$.

ننطلق من المتفاوتة $1 > 0$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(t\ln t)^2 < 1+(t\ln t)^2$

و منه : $\sqrt{(t\ln t)^2} < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$ **(1)**

و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t\ln t \geq e > 1$

نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t > 1$

التي تصبح : $(\forall t \geq e)\ ;\ (t\ln t)^2 > 1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(\forall t \geq e)\ ;\ 2\,(t\ln t)^2 > 1+(t\ln t)^2$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ \sqrt{2}\,t\ln t > \sqrt{1+(t\ln t)^2}$ **(2)**

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}\,t\ln t}$$

ج 2

من خلال آخر تأطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t\ln t}\right) < \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} < \frac{1}{t\ln t}$$

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x \geq e$.

نُدخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التأطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_e^x \left(\frac{1}{t\ln t}\right) dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \int_e^x \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln(\ln t)\right]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \left[\ln(\ln t)\right]_e^x$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$

د 2

لدينا حسب آخر تأطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)}_{x\to+\infty\ \searrow\ +\infty} < \int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\ln(\ln x)}_{x\to+\infty\ \searrow\ +\infty}$$

و هذا يعني حسب خاصية التأطير و النهايات أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_e^x f(t)\,dt = +\infty}$$

إذن :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^e f(t)\,dt + \int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^e f(t)\,dt\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \binom{constante}{réelle} + \lim_{x\to+\infty} \left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= (+\infty) + (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$ **(1)**

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا x نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) \times \frac{\ln x}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right) \times \frac{\ln x}{x} \\
&= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ y=\ln x}} \frac{\ln y}{y} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) = 0}$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)}_{x\to+\infty\ \searrow\ \mathbf{0}} < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{x\to+\infty\ \searrow\ \mathbf{0}}$$

و منه حسب خاصية النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt = 0}$$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)}_{0}\\ &= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\begin{matrix}constante\\ réelle\end{matrix}\right)+0=0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall\, x\in[0,+\infty[\ ;\ F'(x)=f(x)$

و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall\, x\in]0,+\infty[)\ ;F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

عندما تنعدم الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x=1$ أو $x=\frac{1}{e}$

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .

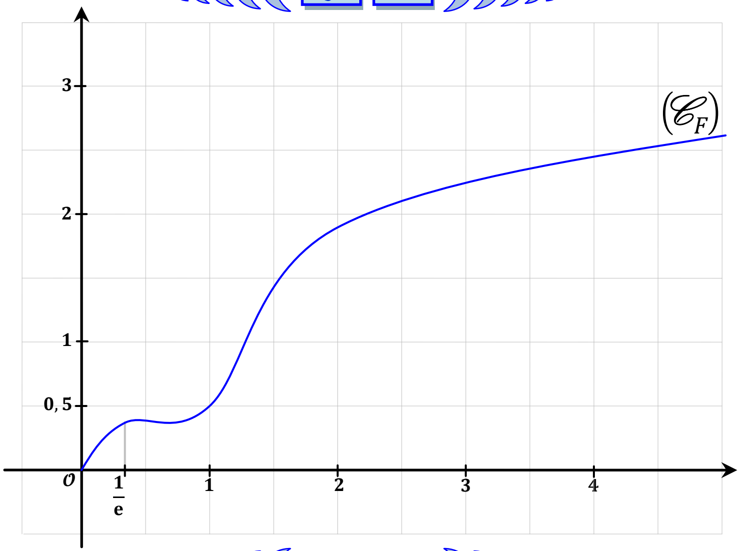
و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$

و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$.

لأن : $\forall\, x\in]0,+\infty[\ ;\ F''(x)=f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(\mathscr{C}_F)$		$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ محدب	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	

2 ز



3 أ

نستعمل النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-F(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{F(x)}{x}\right)\\ &=(+\infty)(1-0)=+\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=x-F(x)$

و لدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ بحيث : $F'(x)=f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=1$

يعني : $1-f(x)$ أي : $\varphi'(x)=0$

<u>إذا كان</u> $0\leq x\leq\frac{1}{e}$ فإن $f(0)\geq f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

إذن : $1\geq f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

<u>إذا كان</u> $\frac{1}{e}\leq x\leq 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f(x)\leq f(1)$

لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f(x)\leq 1$ يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

<u>إذا كان</u> : $x\geq 1$ فإن : $f(x)\leq f(1)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$.

إذن : $f(x)\leq 1$ يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$.

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

<u>خلاصة</u> : $\boxed{\varphi \text{ دالة تزايدية قطعا على المجال } [0,+\infty[}$

3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو صورته $\varphi([0,+\infty[)$.

و لدينا : $\varphi([0,+\infty[) = \left[\varphi(0)\,;\, \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right[= [0,+\infty[$

إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$.

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall\, y \in [0,+\infty[)\,,(\exists!\, x \in [0,+\infty[)\ ;\ \varphi(x) = y$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0,+\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ α_n في المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا

و هو α_n في المجال $[0,+\infty[$ و ذلك كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

أو بتعبير أخير : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,(\exists!\ \alpha_n \geq 0)\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq 0$

إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

يعني أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ F(\alpha_n) \geq 0$ (1)

و نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \geq 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq n$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq \underbrace{n}_{\xrightarrow[n\infty]{} +\infty}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty}$

4 أ

ليكن $n \geq 1$ و $n\in\mathbb{N}$.

لدينا الدالة F متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ ;\ F'(x) = f(x)$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في أي مجال محدود يوجد ضمن $[0,+\infty[$.

<u>**في المرحلة الأولى**</u> : نختار المجال $[0;\alpha_n]$.

لدينا $[0;\alpha_n] \subset [0,+\infty[$ لأن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq 0$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر c من المجال $]0;\alpha_n[$ بحيث :

$$\frac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$$

يعني : $0 < c < \alpha_n$ و $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا : $0 < c < \alpha_n$ إذن : $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

و منه : $1 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$ (*)

بما أن $\alpha_n \geq n \geq 1$ فإن $n \in [1;+\infty[$ و $\alpha_n \in [1;+\infty[$

لدينا $\alpha_n \geq n$ إذن $f(\alpha_n) \leq f(n)$ لأن f تناقصية على $[1;+\infty[$

إذن بالرجوع إلى التأطير (*) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)}$ (1)

في المرحلة الثانية نُطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في $[0;n]$

إذن يوجد عنصر ε من $]0;n[$ بحيث :

$$\boxed{\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)}$$

يعني : $0 < \varepsilon < n$ و $\dfrac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا : $0 < \varepsilon < n$ إذن : $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني : $1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $0 < 1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني : $0 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $\boxed{-f(n) < \dfrac{-F(n)}{n} < 0}$ (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)}$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح : $\boxed{\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)}$ (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)}\ (\star)$$

4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{F(n)}{n} + f(n)\right) = 0$

و منه فإن التأطير $(\star)$ يُصبح :

$$(\forall n \geq 1)\ ;\ \underbrace{0}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}} < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \underbrace{\frac{F(n)}{n} + f(n)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\blacksquare)\quad \boxed{\lim_{n\infty}\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}=0}$$

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ \varphi(x)=x-F(x)$

لدينا $\alpha_n\geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n)=\alpha_n-F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n)=n$

إذن : $n=\alpha_n-F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n)=\alpha_n-n$

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}=\dfrac{\alpha_n-n}{\alpha_n}=1-\dfrac{n}{\alpha_n}$

يعني : $\lim\limits_{n\infty}\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}=\lim\limits_{n\infty}\left(1-\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$

يعني : $0=1-\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$ يعني : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)=1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)=1}$

التمرين الخامس

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n\geq 1$

لدينا :

$$v_n=\ln(u_n)=\ln\left(\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right)=n^2\ln\left(\frac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)=n^2[\ln(arctan(n))-\ln(arctan(n+1))]$$

2

نعتبر f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln(arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة f متصلة على $]0;+\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

لأن ln دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $arctan$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $]0;+\infty[\subset\mathbb{R}$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f في أي مجال محدود و يوجد ضمن $]0;+\infty[$

ليكن $n\geq 1$ و نختار المجال $[n\,;\,n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]n\,;n+1[$ بحيث :

$$(**)\quad \boxed{\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(c)}$$

لدينا : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x)=\frac{(arctan(x))'}{arctan(x)}=\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{arctan(x)}=\frac{1}{(1+x^2)\,arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية $(**)$ نجد :

$$\boxed{\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=\frac{1}{(1+c^2)\,arctan(c)}}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n+1))-\ln(arctan(n))=\frac{1}{(1+c^2)\,arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(arctan(n))-\ln(arctan(n+1))=\frac{-1}{(1+c^2)\,arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2[\ln(arctan(n))-\ln(arctan(n+1))]=\frac{-n^2}{(1+c^2)\,arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال 1) نجد :

$$\boxed{v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)\,arctan(c)}}$$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall n\geq 1)\,,(\exists\,c\,\epsilon\,]n;n+1[)\ ;\ v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)\,arctan(c)}}$$

3

لدينا : $n<c<n+1$

نُدخل الدالة $arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

$(1)\quad arctan(n)<arctan(c)<arctan(n+1)$

و لدينا كذلك : $n<c<n+1$

إذن : $(1+n^2)<(1+c^2)<1+(n+1)^2\quad(2)$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{(1+n^2)arctan(n)<(1+c^2)arctan(c)<(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$

نُدخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\boxed{\frac{1}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}<\frac{1}{(1+c^2)arctan(c)}<\frac{1}{(1+n^2)arctan(n)}}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\boxed{\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}<\frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}<\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال 2) نجد :

$$\boxed{\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}<v_n<\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}}$$

$(\otimes)$

4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}}$$ و $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}}$$

لدينا :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$
$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{-n^2}{n^2+2n+2}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}$$
$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{-n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$
$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير $(\otimes)$ يُصبح :

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}} < v_n < \underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $\boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-2}{\pi}}$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n\infty} v_n\right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}}$

و الحمد لله رب العالمين

الأستاذ بدر الدين الفاتحي
http:/www.professeurbadr.blogspot.com
gsm/ : 06 60 34 41 36
نسخة أكتوبر 2013