الجداء السلمي في $\mathcal{V}_3$ + الفلكة + الجداء المتجهي

محدّدة ثلاث متّجهات: $\vec{u}(x\,,\,y\,,\,z)$ و $\vec{v}(x'\,,\,y'\,,\,z')$ و $\vec{w}(x''\,,\,y''\,,\,z'')$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}.$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$.

استقامية متّجهتين: $\vec{u}(x\,,\,y\,,\,z)$ و $\vec{v}(x'\,,\,y'\,,\,z')$

نضع $d_1=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}$ و $d_2=\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}$ و $d_3=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow d_1=d_2=d_3=0$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين $\Leftrightarrow$ ($d_1\neq 0$ أو $d_2\neq 0$ أو $d_3\neq 0$)

الجداء المتّجهي: للمتّجهتين الغير مستقيميتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المتّجهة $\vec{\omega}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ بحيث: $\vec{\omega}\perp\vec{u}$ و $\vec{\omega}\perp\vec{v}$ و $(\vec{u},\vec{v},\vec{\omega})$ أساس مباشر و $\|\vec{\omega}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\sin(\overline{\vec{u},\vec{v}})|$

إحداثيات الجداء المتّجهي: للمتّجهتين $\vec{u}(x\,,\,y\,,\,z)$ و $\vec{v}(x'\,,\,y'\,,\,z')$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\right)$$

مسافة النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ **عن المستوى** $(\mathscr{P}):ax+by+cz+d=0$ هي:

$$d(\,A,(\mathscr{P})\,)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

حيث E نقطة من $(\mathscr{P})$ و $\vec{n}$ متّجهة منظمية عليه

مسافة النقطة A عن المستقيم $\mathscr{D}(B,\vec{u})$: $d(\,A,(\mathscr{D})\,)=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

رَجُل أمبير: ليكن $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم في الفضاء.

رجل أمبير هو رجل خيالي يقف على O متكئاً على $(O,\vec{k})$ و ينظر إلى $(O,\vec{i})$.

نقول إنّ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر إذا كان $(O,\vec{j})$ على يسار رجل أمبير.

نقول إنّ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ غير مباشر إذا لم يكن $(O,\vec{j})$ على يسار رجل أمبير.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}\;+\;\vec{v}\wedge\vec{w}$$
$$(k\vec{u})\wedge\vec{v}=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}\;+\;\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow$ ($\vec{v}=\vec{o}$ أو $\vec{u}=\vec{o}$ أو $\vec{u}\perp\vec{v}$)

متّجهة منظمية على مستوى: $(\mathscr{P}):ax+by+cz+d=0$ المتّجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية عليه.

مستوى معرّف بنقطة و متّجهة منظمية عليه: $M(x,y,z)\in\mathscr{P}(A\,,\,\vec{n}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

مستوى معرّف بنقطة و متّجهتين غير مستقيميتين: $M(x,y,z)\in\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}\,,\,\vec{u}\,,\,\vec{v})=0$

مستوى معرّف بثلاث نقط غير مستقيمية: $M\in(ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})=0$.

مستوى معرّف بثلاث نقط غير مستقيمية: $M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

فلكة معرّفة بالمركز و الشّعاع: $M(x,y,z)\in S(\Omega,R) \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

فلكة معرّفة بأحد أقطارها: $M(x,y,z)\in S([AB]) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

المماس لفلكة في نقطة: $M(x,y,z)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ ، حيث Ω مركز الفلكة و A نقطة التّماس

$$\vec{u}(x\,,\,y\,,\,z)\;\;;\;\;\vec{v}(x'\,,\,y'\,,\,z')$$
$$\vec{u}+\vec{v}(x+x'\,,\,y+y'\,,\,z+z')$$
$$k\vec{u}(kx\,,\,ky\,,\,kz)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\times x')\;+\;(y\times y')\;+\;(z\times z')$$
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A\,,\,z_B-z_A)$$
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

مجموعة النّقط: ($x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ معادلة فلكة) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-4d\geq 0$

في هذه الحالة: المركز $\Omega(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2})$ و الشّعاع $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.

مساحة مثلث: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

مساحة متوازي أضلاع: $S_{ABCD}=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

$$(\vec{u}\perp\vec{v}\text{ و }\vec{u}\perp\vec{w})\Leftrightarrow\mathscr{D}(\vec{u})\perp\mathscr{P}(\vec{v},\vec{w})$$
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0 \Leftrightarrow \mathscr{D}(\vec{u})\,//\,\mathscr{P}(\vec{v},\vec{w})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{n}=\vec{o} \Leftrightarrow \mathscr{D}(\vec{u})\perp\mathscr{P}(\vec{n})$$
$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \mathscr{D}(\vec{u})\,//\,\mathscr{P}(\vec{n})$$

تمثيل بارمتري للفلكة $S(\Omega,R)$

$$\begin{cases}x=x_\Omega+R\sin\alpha\cos\theta\\ y=y_\Omega+R\sin\alpha\sin\theta\;\;;\;\;(\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^2\\ z=z_\Omega+R\cos\alpha\end{cases}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=0 \Leftrightarrow \mathscr{P}(\vec{n})\perp\mathscr{P}'(\vec{n}')$$
$$\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{o} \Leftrightarrow \mathscr{P}(\vec{n})\,//\,\mathscr{P}'(\vec{n}')$$
$$\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq\vec{o} \Rightarrow \mathscr{P}(\vec{n})\cap\mathscr{P}'(\vec{n}')=\mathscr{D}(\vec{n}\wedge\vec{n}')$$

تقاطع مستوى $(\mathscr{P})$ و فلكة $S(\Omega,R)$

- إذا كان $d(\Omega\,,(\mathscr{P})\,)>R$ فإنّ $(\mathscr{P})\cap(S)=\varnothing$.
- إذا كان $d(\Omega\,,(\mathscr{P})\,)=R$ فإنّ $(\mathscr{P})\cap(S)=\{H\}$ و لدينا $(\Omega H)\perp(\mathscr{P})$
$(\mathscr{P})$ مماس ل (S) في H و النقطة H هي المسقط العمودي ل Ω على $(\mathscr{P})$
- إذا كان $d=d(\Omega\,,(\mathscr{P})\,)<R$ فإنّ $(\mathscr{P})\cap(S)=(\mathscr{C})$.
الدائرة $(\mathscr{C})$ شعاعها هو $r=\sqrt{R^2-d^2}$ و مركزها هو تقاطُع المستوى $(\mathscr{P})$
و المستقيم العمودي عليه المارّ من Ω .

تقاطُع مستقيم $(\mathscr{D})$ و فلكة $S(\Omega,R)$

- إذا كان $d(\Omega\,,(\mathscr{D})\,)>R$ فإنّ $(\mathscr{D})\cap(S)=\varnothing$.
- إذا كان $d(\Omega\,,(\mathscr{D})\,)=R$ فإنّ $(\mathscr{D})\cap(S)=\{H\}$.
المستقيم $(\mathscr{D})$ مماس ل (S) في H و لدينا $(\Omega H)\perp(\mathscr{D})$
النّقطة H هي المسقط العمودي ل Ω على $(\mathscr{D})$.
- إذا كان $d=d(\Omega\,,(\mathscr{P})\,)<R$ فإنّ $(\mathscr{D})\cap(S)=\{A,B\}$.
النّقطتان تحدّدان بتعويض تمثيل بارمتري ل $(\mathscr{D})$ في معادلة (S) .