Baccalauréat sciences mathématiques session de juin 2007

10 juin 2007

EXERCICE :1

I

Soit $E = \mathbb{R} - \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ et pour tout (a,b) de E^2 on pose :
$a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1-a Verifier que pour tout couple (a,b) de E^2 :
$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

1-b En déduire que $\perp$ est une lois de composition interne dans E

2 Montrer que $(E, \perp)$ est un groupe commutatif.

II $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 . On rappel que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un anneau unitaire d'élément unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \bullet)$ est est un espace vectoriel réel .
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}$ qui s'écrient sous la forme $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$ tel que $a \in E$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1-a Verifier que : $A^2 - 2A$ et que $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$.

1-b Montrer que $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}, +)$.

2 On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (E, \perp) & \to & (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times) \\ a : & \mapsto & \varphi(a) = M(a) \end{array}$$

(a) Montrer que φ est un isomrphisme.

(b) En déduire la structure de $(\mathcal{F}, \times)$

EXERCICE :2

Soit a un nombre complexe différent de i et de $-i$.

I

1-a Verifier que le nombre $u = a + i$ est une solution de l'equation : $(E) : z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$.

1-b Determiner v la deuxième solution de l'équation (E)

2 On suppose $\mid a \mid = 1$.

(a) Montrer que $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$.

(b) Verifier que :$u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$.

(c) En déduire que : $arg(u) \equiv \frac{1}{2}arg(a) + \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$

3 Montrer que $\mid u \mid + \mid v \mid \geq 2$

II Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit m un nombre réel strictement positif et (E_m) l'ensemble des points $M(a)$ du plan complexe tel que $\mid u \mid + \mid v \mid = m$

1. Montrer que (E_m) est une ellipse de centre O .
2. On pose $a = x + iy$ avec sx et y sont des réels .
   (a) Montrer que $x^2 + (1 - \frac{4}{m^2})y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$ est une equation cartésienne de l'ellipse (E_m) .
   (b) Tracer (E_4)
3. On considère les deux points $A(\sqrt{3})$ et $B(2i)$ les sommets de l'ellipse (E_4) . Montrer que la droite (AB) est tangente à $(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}})$.

EXERCICE :3

1. On considère l'equation $(E) : 195x - 232y = 1$
   (a) Determiner le plus grand diviseur commun des deux nombres 195 et 232 .
   (b) Montrer que l' ensemble des solutions de l'equation (E) est $S = \{(163 + 232k; 137 + 195k)/k \in \mathbb{Z}\}$
   (c) determiner l'unique entier d vérifiant $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1 \quad [232]$.

2. Montrer que 233 est un ombre premier .
3. Soit A l'ensemble des nombres entiers naturels compris entr e 0 et 232 et on considère f l'application de A vers A définie par pour tout a de A $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233 . On admet que $(\forall a \in A - \{0\}) : a^{232} \equiv 1 \quad [233]$
   (a) Montrer que pour tout a et b de A si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.
   (b) Soient a et b deux éléments de A tel que $f(a) = b$ determiner a en fonction de b.
   (c) En déduire que l'application f est une bijection et determiner sa bijection réciproque f^{-1}

EXERCICE :4

I : On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$
2. Montrer que $x = 0$ est la solution unique de l'équation $g(x) = 0$

II : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) & = \frac{x}{e^x - 1} \quad ; x \neq 0 \\ f(0) & = 0 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction f dan un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer les deux limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f dans $\mathbb{R}^*$
   (a) calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f
4. On considére l'intégrale $J(x) = \int_0^x te^{-t}$ avec x est un nombre réel .
   (a) Au moyen d'une intégration par parties , montrer que : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$.
   (b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$.
   (c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$.

(d) En déduire que la fonction f est derivable en 0 et que : $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. On note f" la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $f"(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(e^x(x-2)+2+x)$.

(b) Etudier le signe de $e^x(x-2)+2+x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:$f"(x) > 0$.

(d) Tracer $(\mathcal{C})$.

III :On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $f(u_n) = u_{n+1}$

1. Montrer que $x = \ln 2$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

2-a Montrer que que pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $\mid f'(x) \mid \leq \frac{1}{2}$.

2-b Montrer que pour out n de $\mathbb{N}$: $\mid u_{n+1} - \ln 2 \mid \leq \frac{1}{2} \mid u_n - \ln 2 \mid$.

3 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et determiner sa limite .

IV : Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} F(x) &= \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1} \quad x \neq 0 \\ F(0) &= 0 \end{cases}$$

1-a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$.

1-b Montrer que F est continue en 0 .

1-c Montrer que F est derivable en 0 et que $F'(0)1$.

2-a Montrer que F est derivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$

2-b Étudier le sens de variation de la fonction F .

FIN DU SUJET