الجداء السلمي و تطبيقاته في الفضاء

I-الجداء السلمي

1- الجداء السلمي لمتجهتين مستقيمتين

تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين مستقيميتين من الفضاء V_3

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بـ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف كما يلي.

* إذا كان للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ نفس المنحى فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

* إذا كان للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ منحيان متعاكسان فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

* إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

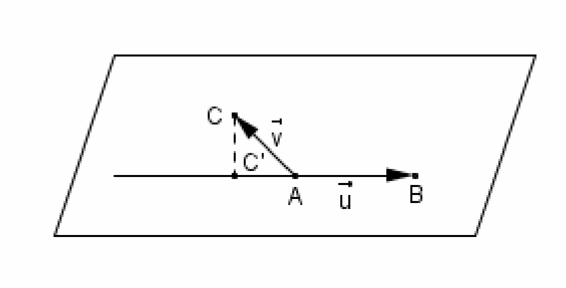
2- الجداء السلمي لمتجهتين غير مستقيمتين

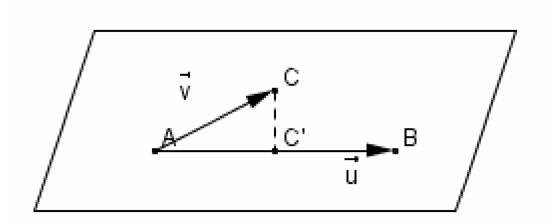
تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير مستقيميتين من الفضاء V_3 و A نقطة من الفضاء E .

توجد نقطتان B وC من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي المعرف $\vec{u}\cdot\vec{v}$ كما يلي

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ حيث C' المسقط العمودي لـ C على (AB)





$\left[\widehat{BAC}\right]$ زاوية منفرجة

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC'$

$\left[\widehat{BAC}\right]$ زاوية حادة

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC'$

2- صغة مثلثة للجداء السلمي

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و A و B وC ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ وθ قياس الزاوية $\left[\widehat{BAC}\right]$ وC' المسقط العمودي لـ C على (AB)

* إذا كان $0\leq\theta\prec\frac{\pi}{2}$ فان $\left[\widehat{BAC}\right]$ زاوية حادة

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC'$ و حيث $AC'=AC\cdot\cos\theta$

فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\cos\theta$

* إذا كان $\frac{\pi}{2}\prec\theta\leq\pi$ فان $\left[\widehat{BAC}\right]$ زاوية منفرجة

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC'$ و حيث $AC'=AC\cdot\cos\left(\pi-\theta\right)=-AC\cos\theta$

فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\cos\theta$

* إذا كان $\theta=\frac{\pi}{2}$ فان $AC'=0$ و منه $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذن $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\cos\frac{\pi}{2}$

خاصية

إذا كانت $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و A و B وC ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ وθ قياس الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\cos\theta$

نتيجة

إذا كانت $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 وθ قياس الزاوية $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\theta$

خاصة

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ حيث C' ; D' المسقطان العموديان لـ C ; D على (AB) بالتوالي.

3- خاصيات

أ- تعامد متجهتين :

تعريف

لتكن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متجهتين من الفضاء V_3.

تكون $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

ملاحظة المتجهة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء V_3

ب- منظم متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة وA و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ومنه $\vec{u}\cdot\vec{u}=AB^2$

إذن لكل متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ $\vec{u}\cdot\vec{u}\succ 0$

العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ $\vec{u}$ و يكتب $\vec{u}^2$

العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ويكتب $\|\vec{u}\|$

ملاحظة * $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$

ج- خاصيات

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\in V_3^3$	**متطابقات هامة** $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
* $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$	
* $\vec{u}\cdot\alpha\vec{v}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$	

II- صيــــــغ تحليلـــــــة

1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان

تعريف

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائـــــية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.

$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أسا س للفضاء V_3

يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى.

يكون الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ متعامد و ممنظم (أو المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ تعامد وممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

2- الصيغة التحليلة للجداء السلمي

أ- خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

ملاحظة

إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $\vec{u}\cdot\vec{k}=z$; $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$; $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$

ب- الصيغة التحليلة لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

*- إذا كانت $\vec{u}(x;y;z)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

*- اذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ بالنسبة للمعلم.م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

فان $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

ج – تعامد متجهتين

خاصية

$\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتان من فضاء منسوب إلى معلم.م.م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$\vec{u}\perp\vec{v}'$ اذا وفقط اذا كان $xx'+yy'+zz'=0$

تمرين

1- حدد متجهة $\vec{w}$ واحدية وعمودية على $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-2;0)$

2 - حدد متجهة $\vec{w}$ عمودية على $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;1)$ و $\|\vec{w}\|=\sqrt{3}$

تمرين

نعتبر $A\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ و $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$ و $C\left(-1;-1;-\sqrt{2}\right)$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية