

## الحساب المتجهي

### القدرات المنتظرة

- \*- إنشاء متجهة من شكل  $a\vec{u} + b\vec{v}$ .
- \*- التعبير عن مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس.
- \*- حل مسائل هندسية باستعمال الأداة الهندسية.

### (I) - تساوي متجهتين - جمع المتجهات

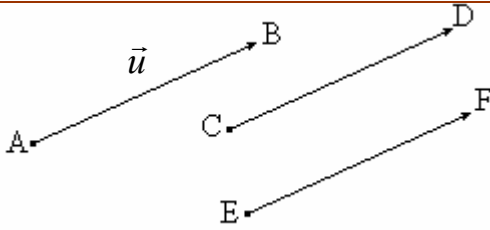
#### 1- أنشطة

- 1- ليكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى  
أنشئ M و N حيث  $\vec{BM} = \vec{AC}$  و  $\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{AD}$  قارن  $\vec{BD}$  و  $\vec{MN}$
- 2- ليكن ABCD متوازي الأضلاع مركزه O  
أنشئ M حيث  $\vec{OM} = \vec{AB} + \vec{AD}$  و أنشئ I حيث  $\vec{DI} = \vec{OD} - \vec{BC}$   
أثبت أن  $\vec{CM} = \vec{AO}$
- 3- ليكن A و B و C و D و E و F نقاطا  
اختصر  $\vec{BE} + \vec{DF} + \vec{EF} + \vec{AB} + \vec{ED} + \vec{FA}$

#### 2- تساوي متجهتين

##### ب- تعريف

تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF} \text{ نكتب}$$

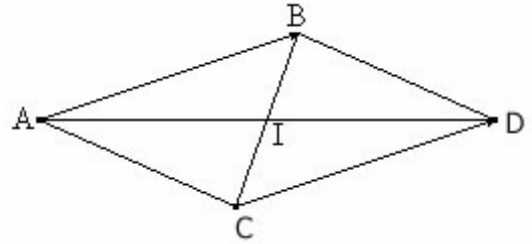
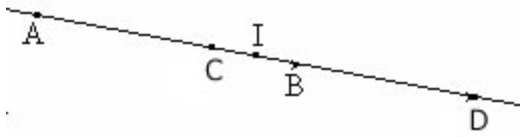
#### ج- المتجهة المنعدمة

\*- المتجهة المنعدمة  $\vec{0}$ :  $\vec{0} = \vec{MM}$  لكل نقطة M من المستوى

#### د - خاصيات

##### خاصية 1

A و B و C و D أربع نقط من المستوى  
 $\vec{AB} = \vec{CD}$  إذا وفقط إذا كان للقطعتين  $[AD]$  و  $[BC]$  نفس المنتصف



I منتصف القطعتين  $[BC]$  و  $[AD]$

##### خاصية 2

إذا كانت A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمة في المستوى فان :  
 $\vec{AB} = \vec{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $ABDC$  متوازي الأضلاع

##### نتيجة

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى  
 $\vec{AB} = \vec{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $\vec{AC} = \vec{BD}$  (تبديل الوسطين)  
 $\vec{AB} = \vec{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $\vec{DB} = \vec{CA}$  (تبديل الطرفين)

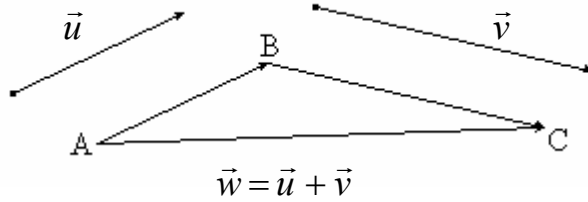
### 3- مجموع متجهتين -علاقة شال

أ-  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان في المستوى

لتكن  $A$  نقطة من المستوى، توجد نقطة وحيدة  $B$  حيث  $\vec{AB} = \vec{u}$ .

توجد نقطة وحيدة  $C$  حيث  $\vec{BC} = \vec{v}$ .

النقطتان  $A$  و  $C$  تحددان متجهة وحيدة  $\vec{w} = \vec{AC}$



المتجهة  $\vec{w}$  هي مجموع المتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  نكتب  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$   $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

#### ب- علاقة شال

مهما كانت النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  من المستوى

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

#### ب- نتيجة

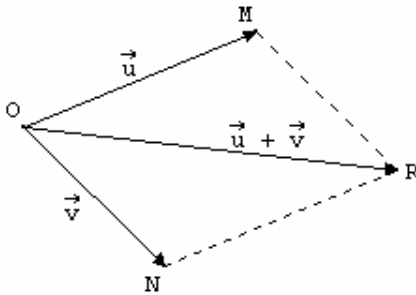
لتكن  $O$  و  $M$  و  $N$  و  $R$  أربع نقط من المستوى

$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OR}$  إذا وفقط إذا كان  $OMRN$  متوازي الأضلاع

ملاحظة

إذا كانت  $\vec{u} = \vec{OM}$  و  $\vec{v} = \vec{ON}$  فان

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{OR}$  حيث  $OMRN$  متوازي الأضلاع



#### ج- خاصيات

\*- لكل متجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$   $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

\*- لكل ثلاث متجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$   $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

\*- لكل متجهة  $\vec{u}$   $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

### 4- مقابل متجهة - فرق متجهتين

#### أ- مقابل متجهة

**تذكير** لتكن  $\vec{u} = \vec{AB}$  المسافة  $AB$  تسمى منظم المتجهة  $\vec{u}$  نكتب  $\|\vec{u}\| = AB$

#### تعريف

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة

مقابل المتجهة  $\vec{u}$  هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاهها مضاد

لمنحى المتجهة  $\vec{u}$  نرمز لها بالرمز  $-\vec{u}$

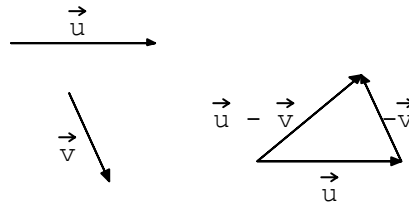
\*- لكل متجهة  $\vec{u}$  :  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

\* لكل نقطتين  $A$  و  $B$  من المستوى لدينا  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

المتجهتان  $\vec{AB}$  و  $\vec{BA}$  متقابلتان نكتب  $\vec{AB} = -\vec{BA}$

**ب- فرق متجهين**  
**تعريف**

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \quad \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ لكل متجهين}$$

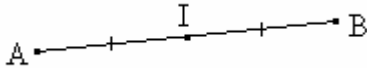


**خاصية**

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \quad C \text{ و } B \text{ و } A \text{ لكل ثلاث نقط}$$

**5- منتصف قطعة**  
**تعريف**

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ إذا وفقط إذا كان } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$



**خاصية**

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ إذا وفقط إذا كان } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

**تمرين**

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $E$  و  $F$  نقطتين حيث  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$  و  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن  $B$  منتصف  $[EF]$

**(II) ضرب متجهة في عدد حقيقي**  
**أنشطة**

**نشاط 1**

ليكن  $ABC$  مثلثا حيث  $AB = 6$  و  $M$  نقطة من  $[AB]$  حيث  $AM = 2$

الموازي للمستقيم  $(BC)$  و المار من  $M$  يقطع  $[AC]$  في  $N$

1- عبر عن  $\overrightarrow{MN}$  بدلالة  $\overrightarrow{BC}$

2- عبر عن  $\overrightarrow{MN}$  بدلالة  $\overrightarrow{BC}$

**نشاط 2**

ليكن  $ABC$  مثلثا نضع  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

أنشئ  $3\vec{u}$  و  $-2\vec{v}$  و  $3\vec{u} - 2\vec{v}$

**1 - تعريف**

$\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و  $k$  عدد حقيقي غير منعدم  
جاء المتجهة  $\vec{u}$  في العدد الحقيقي  $k$  هي المتجهة  $k\vec{u}$  حيث :

\*  $\vec{u}$  و  $k\vec{u}$  لهما نفس الاتجاه

$$* \|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$$

منحى  $\vec{u}$  إذا كان  $k > 0$

\* منحى  $k\vec{u}$  هو  
عكس منحى  $\vec{u}$  إذا كان  $k < 0$



## 2 - نتائج (نقلها)

$$\begin{aligned} \text{مهما تكن المتجهتان } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ و مهما يكن العددين الحقيقيين } \alpha \text{ و } \beta \text{ فان} \\ (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \\ \vec{u} = \vec{0} \text{ إذا و فقط إذا كان } \alpha = 0 \text{ أو } \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

### تمارين

1- بسط  $\vec{A} = 5(2\vec{u} - \vec{v}) - \frac{3}{2}(\vec{u} + 2\vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v})$

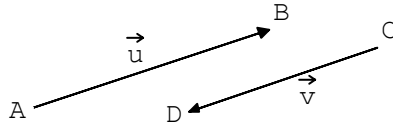
2- حدد  $x$  حيث  $2x \cdot \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$  علما أن  $\vec{u} \neq \vec{0}$

### (II) الاستقامية

#### 1- استقامية متجهتين

##### أ- تعريف

تكون متجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين إذا و فقط كانت احدهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



### ملاحظة

$\vec{0}$  مستقيمة مع أية متجهة

#### ب- خاصية و تعريف

لتكن  $A \neq B$  و  $C$  و  $B$  و  $A$  نقطة من المستوى حيث  $A \neq B$   
المتجهتان  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  مستقيمتان إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي  $\alpha$  حيث  
 $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$   
العدد الحقيقي  $\alpha$  يسمى أفصول  $C$  في المعلم  $(A; B)$

### مثال

$$\begin{aligned} \vec{AE} = -3\vec{AB} \quad \text{3- أفصول } E \text{ في المعلم } (A; B) \\ \vec{CF} = \sqrt{2} \cdot \vec{CD} \quad \text{2- أفصول } F \text{ في المعلم } (C; D) \end{aligned}$$

### تمرين

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $M$  أربع نقط و  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين حيث  $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$   
و  $\vec{v} = 2\vec{BA} - 6\vec{BC}$   
1- بين أن  $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$   
2- بين أن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان

### ج- خاصية

$$I \text{ منتصف } [AB] \text{ تكافئ } \vec{AB} = 2\vec{AI} \text{ (و تكافئ أيضا } \vec{AB} = 2\vec{IB} \text{)}$$

### 2- استقامية ثلاث نقط

#### تعريف

لتكن  $A \neq B$  و  $C$  و  $B$  و  $A$  نقطة من المستوى حيث  $A \neq B$   
تكون النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي  $\alpha$  حيث  
 $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

### تمرين

ليكن  $ABCD$  متوازي الأضلاع و  $P$  و  $Q$  نقطتين حيث  $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AD}$

- 1- انشئ الشكل
- 2- عبر عن  $\overrightarrow{CP}$  و  $\overrightarrow{CQ}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AD}$
- 3- استنتج أن النقط  $P$  و  $Q$  و  $C$  مستقيمية

### 3- توازي مستقيمين خاصية

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقطا من المستوى حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$   
 $(AB) \parallel (CD)$  إذا و فقط إذا كان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  مستقيمتين

### تمرين

ليكن  $ABC$  مثلثا و  $I$  و  $J$  نقطتين حيث  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$

- 1- عبر عن  $\overrightarrow{IC}$  و  $\overrightarrow{BJ}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$
- 2- استنتج أن  $(IC) \parallel (BJ)$