نهـــــــاية دالــــــــة عدديــــــــة

القدرات المنتظرة

حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية واللاجذرية. حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية

1. نـــــــهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

ا -تمهيد لتكن f دالة عددية بحيث $f(x)=x^3$

1. ارسم المنحنى الممثل للدالة f
2. اتمم الجدول التالي

x	$-10^{10^{100}}$	$-10^{10^{12}}$	$-10^{10^{9}}$	-10^{100}	-10	10	10^{100}	$10^{10^{9}}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

3. مستعينا بالمنحنى والجدول

أ - ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f عندما يأخذ x قيمة اكبر فاكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

ب- ماذا تستنتج أيضا بالنسبة للدالة f عندما يأخذ x قيمة اصغر واصغر سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$

ب- نهايـــات اعتـــياديــــة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

2. نهاية منتـــــــهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

أ - نهاية منهية عند $+\infty$

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

اذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$

ب -نهاية منهية عند $-\infty$

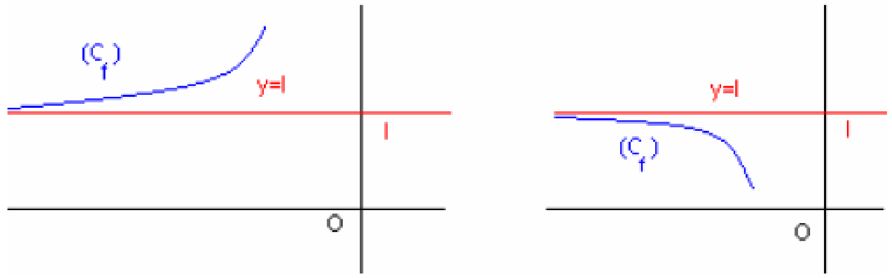
لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

اذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=l$

ج -ملاحظات

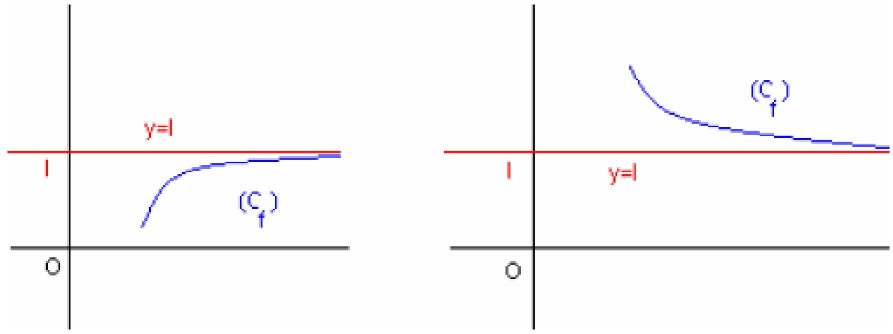
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول x إلى $-\infty$



* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول x إلى $+\infty$



- إذا كانت f زوجية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- إذا كانت f فردية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

www.bramaths.com Brahim Ajghaider

د - خاصيـــة

لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

- اذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ أو $(-\infty)$ فان هذه النهاية وحيدة
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-l)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-l)=0$

ه - نهايات اعتيادية

$$\forall(k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^* \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

3. النهاية المنتهية واللا منتهية لدالة في نقطة

أ - نهاية منتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{a} f=l$

ب - خاصية

ليكن a و l عددين حقيقين $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$

إذا كان $f(x)$ تقبل l في a عان النهاية وحيدة

ج نهاية لامنتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{a} f=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{a} f=-\infty$

4. النهاية على اليمين -النهاية على اليسار لدالة في نقطة

أ -خاصيات

ليكن a و l عددين حقيقيين

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=-\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=-\infty$

ب - نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$$ إذا كان n زوجيا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$$ إذا كان n فرديا

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

لتكن f دالة عددية

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ تكافئ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ تكافئ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ تكافئ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

5. العمليات على النهايات

أ - النهاية والمجموع

نقبل جميع العمليات الآتية

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان x يؤول الى $+\infty$ او الى $-\infty$ او الى a على اليمين او a على اليسار

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

ب النهايات والجداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f \times g$
l	l'	$l \times l'$
l $\quad l \neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l
l $\quad l \neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

ج النهاية والخارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية g	نهاية f
$\frac{l}{l'}$	l' و $l'\neq 0$	l
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
$+\infty$	0^+	$l\succ 0$ أو $+\infty$
$-\infty$	0^+	$l\prec 0$ أو $-\infty$
$-\infty$	0^-	$l\succ 0$ أو $+\infty$
$+\infty$	0^-	$l\prec 0$ أو $-\infty$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	l حيث $l\neq 0$	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	l حيث $l\neq 0$	$-\infty$

د -نهاية دالة حدودية – دالة جذرية

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$ في حالة $Q(a)\neq 0$

إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي $P(x)$ و $Q(x)$ الأكبر درجة فان

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^n$$ و $$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

و $$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$$ و $$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$$

6. نهايات الدوال اللاجدرية

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من شكل $[a;+\infty[$

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $l\geq 0$ فان $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $l\geq 0$ فان $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$

ملحوظة

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان x يؤول الى $+\infty$ او الى $-\infty$ او الى a على اليمين او a على اليسار

7. النهايات والترتيب

f و g و h دوال عددية و $I=]x_0-\alpha;x_0+\alpha[-\{x_0\}$ ضمن حيز تعريف هذه الدوال

* إذا كان لكل x من I , $|f(x)-l|\leq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=0$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$
* إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ وكان $g\geq h\geq f$ على I فان $\lim_{x\to x_0} h(x)=l$
* إذا كان لكل x من I , $f(x)\geq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$
* إذا كان لكل x من I , $f(x)\leq u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ملحوظة

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان x يؤول الى $+\infty$ او الى $-\infty$ او الى a على اليمين او a على اليسار

8. نهايات الدوال المثلـــــــــــــــــثية

خصـــــــــائص ونتائـــــــــــــج

لكل عدد حقيقي a

$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ و $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$

لكل عدد حقيقي a حيث $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

$\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$