السعيد العمري

سلسلة

النجم

في

الرياضيات - الفيزياء - الكيمياء

شعبة العلوم الفيزيائية

الرياضيات

الدوال الأسية

I. الدالة الأسية النبيرية :

1 : تعريفها :

دالة اللوغاريتم النبيري دالة متصلة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}^{*+}$، إذًا تقبل دالة عكسية يرمز لها e^x أو $\exp(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة الأسية النبيرية.

مع $e^0 = 1$ و $\forall x \in \mathbb{R}; \quad e^x > 0$

و $\forall x \in \mathbb{R}; y \in]0;+\infty[\quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

2 : خاصيات :

لتكن x و y أعداد حقيقية :

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{xy} = (e^x)^y = (e^y)^x$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

لتكن $x \in]0,+\infty[$: $e^{\ln x} = x$

لتكن $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$

II. مشتقة الدالة الأسية :

نعلم أن الدالة ln قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومشتقتها لا تنعدم على $]0;+\infty[$ فإن الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = e^x$$

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I حيث

$$\forall x \in I : \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

III. النهايات الاعتيادية :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

VI/ الدالة الأسية للأساس a ؛ مع $a>0$ و $a \neq 1$.

ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a>0$ و $a \neq 1$.
الدالة a^x المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة الأسية للأساس a ويرمز لها بـ $\exp_a(x)$ وتحقق : $a^x = e^{x \ln a}$. $\forall x \in \mathbb{R}$

ملاحظة: جميع خصائص الدالة الأسية النيبيرية تبقى صالحة للدالة الأسية ذات الأساس a.

- إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln a<0$.
- إذا كان $a>1$ فإن $\ln a>0$.

تطبيقات:

1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

- $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
- $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
- $\frac{1}{2}e^{2x} - \sqrt{2}e^x - 1 = 0$
- $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} - 3 = 0$

2: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية:

$$\begin{cases} e^x - 3^y = 1 \\ 3 \times 2^x - 2 \times 3^y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{2x} . e^{y} = e^2 \\ \ln(3x) + \ln(3+2y) = 2\ln 3 \end{cases}$$

3: أحسب مشتقة الدوال التالية:

$f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = e^x \ln(e^x + 2)$

$f(x) = 2^x(e^x - 3x + 1)$.

تمارين في الدوال الأسية

تمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي: $f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1: حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2: أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

4: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب: أعط جدول تغيرات الدالة f.

5: بين أن $A(0, \frac{1}{2})$ مركز تماثل المنحنى (C).

6: أنشئ المنحنى (C)

تمرين 2:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1: بين أن الدالة f فردية.

2: أ: أحسب $\lim_{|x| \to +\infty} f(x)$

ب: حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

3: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

4: أنشئ المنحنى (C) (الوحدة $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$).

تمرين 3:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي: $f(x) = \frac{3 - 2x}{4} e^{2x}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1: أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

3: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

4: أ: أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب: حدد نقطة انعطاف المنحنى (C) ثم ادرس تقعره.

5: أ: أعط معادلة ديكارتية للمماس الخاص للمنحنى (C) في النقطة $I(0, \frac{3}{4})$

ب: حدد تقاطع المنحنى (C) ومحوري المعلم.

6: أنشئ المنحنى (C).

تمرين 4:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x - 2 - \frac{4}{e^x - 1}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

الوحدة $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

1: حدد D مجموعة تعريف الدالة f. ثم بين أن f دالة فردية.

2: أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

4: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من D.

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

5: بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2, 3[$.

6: أنشئ المنحنى (C).

تمرين 5:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^2 - 1 - (x-1)e^x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

نضع $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5cm$

1: بين أن $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xe^x\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{xe^x} - \frac{x-1}{e^x}\right)$

2: أ: أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب: حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

3: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب: ضع الجدول الخاص بتغيرات الدالة f

4: أحسب $f(1)$ ثم أرسم المنحنى (C).

تمرين 6:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x+1}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1: أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

3: أ: بين أن $\forall x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x+1}$

ب: حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

4: أ: أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب: أدرس تقعر المنحنى (C) وحدد نقطة انعطافه

ج: أوجد المعادلة الديكارتية لمماس المنحنى (C) في نقطة انعطافه

5: بين أن (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $\alpha \in \left]-\frac{3}{2}; -1\right[$.

6: أنشئ المنحنى (C)

تمرين 7:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} e^x$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1: حدد D مجموعة تعريف f.

2: أحسب نهايات f عند محدات D.

3: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

4: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من D

ب: بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 + x - 1$

ج: ضع جدول تغيرات الدالة f.

5: أ: حل في D المعادلة $f(x) = 0$

ب: استنتج تقاطع (C) و محور الأفاصيل

6: أنشئ المنحنى (C)

7: ليكن m بارامتر حقيقي حيث $m > 1$

ناقش حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة

$$x(e^x - m) + e^x = 0$$

تمرين 8 :

I : لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$h(x) = e^{x} - x - 1$

1 : أحسب $h'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

2 : ضع جدول تغيرات الدالة h.

3 : استنتج أنه لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $h(x) > 0$

II : لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = e^{x}(e^{x} - 2x) - 1$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 : بين أن $\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f(x) = xe^{x}\left(\frac{e^{x}}{x} - 2\right) - 1$

2 : أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3 : أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

4 : أ : بين أن $f'(x) = 2e^{x} h(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب : ضع جدول تغيرات الدالة f.

5 : أنشئ المنحنى (C) (دراسة تقعر المنحنى (C) غير مطلوبة).

تمرين 9 :

I : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$g(x) = (2 - x)e^{-x} + 1$

1 : أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.

2 : استنتج إشارة الدالة $g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II : لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = (x - 1)e^{-x} + x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 : أحسب نهايات f عند محدات $\mathbb{R}$.

2 : أ : أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب : ضع جدول تغيرات الدالة f.

3 : أ : بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب : حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ج : أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ).

4 : أنشئ المنحنى (C).

تمرين 10:

I: ليكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:

$$g(x) = (x-1)e^x + 1$$

1: أحسب $g'(x)$ لكل x من IR.

2: ضع جدول تغيرات الدالة g

3: حدد إشارة الدالة $g(x)$ لكل x من IR.

II: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:

$$f(x) = (2x-3)e^{2x} + 4e^x - 1$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{I},\vec{J})$

1: أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

3: أ: بين أن $f'(x) = 4e^x g(x)$ لكل x من IR

ب: أعط جدول تغيرات الدالة f.

4: أنشئ المنحنى (C).

5: أ: بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية محددا مجموعة تعريفها D'.

ب: أنشئ المنحنى (C') الممثل للدالة العكسية.

تمرين 11:

I: لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:

$$g(x) = e^x + x - 1$$

1: أحسب $g'(x)$ لكل x من IR

2: ضع جدول تغيرات الدالة g

3: أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ لكل x من IR

II: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:

$$f(x) = x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{I},\vec{J})$.

1: أحسب نهايات الدالة f عند محدات IR.

2: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

3: أ: بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ لكل x من IR

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

4: بين أن النقطة $I(2;f(2))$ نقطة انعطاف المنحنى (C)

5: أنشئ المنحنى (C).

تمرين 12:

I: لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$g(x) = e^{x} - 1 + 3x$$

1: أدرس تغيرات الدالة g لكل x من $\mathbb{R}$

2: أحسب $g(0)$ واستنتج إشارة الدالة $g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = xe^{x} + x^{3} + x^{2} - x$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1: أحسب نهايات الدالة f عند محدات $\mathbb{R}$

2: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

3: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب: أنشر $(x+1)\,g(x)$

ج: استنتج أن $f'(x) = (x+1)\,g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

د: ضع جدول تغيرات الدالة f.

4: أنشئ المنحنى (C).

تمرين 13:

I: نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي: $g(x) = 1 - \frac{x}{e^{x}}$

1: أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

2: استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (x-1) + \frac{x+1}{e^{x}}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1: أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2: أ: بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب: حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

3: أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ).

4: أ: بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب: أعط جدول تغيرات الدالة f.

5: أدرس تقعر المنحنى (C) محددا نقطة انعطافه.

6: حدد المعادلة الديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة $O(0,0)$

7: أنشئ المنحنى (C)

تمرين 14:

I : لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$g(x) = xe^{x} + 1$$

1: أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2: ضع جدول تغيرات الدالة g

3: استنتج إشارة $g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:
$$f(x) = \frac{xe^{x} - 1}{xe^{x} + 1}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد منظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1: حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2: أحسب نهايات f عند محدات D.

3: حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

4: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من D

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f

5: بين أن $\exists! \alpha \in]\frac{1}{2}, 1[\; ; \; f(\alpha) = 0$ ثم أول النتيجة هندسياً.

6: أنشئ المنحنى (C)

تمرين 15:

I : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = 1 - (2x+1)e^{2x}$

1: أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

2: أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة g.

3: أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة g

II : لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$f(x) = x + 3 - xe^{2x}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد منظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1: أ: أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب: أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ج: حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

2: أدرس الوضع النسبي لـ (C) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$.

3: أ: بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

4: بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0 < \alpha < 1$

5: أنشئ المنحنى (C).

تمرين 16:

I: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = e^{x} - xe^{x} - 1$

1: أدرس تغيرات الدالة g.

2: استنتج إشارة الدالة g.

II: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^{x}-1} - 1 & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1: حدد D مجموعة تعريف f ثم أحسب نهايات f عند حدود D

2: ادرس اتصال f في النقطة 0.

3: أ: أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

ب: حدد وضع المنحنى (C) ومقاربه المائل.

4: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $D - \{0\}$.

ب: نقبل أن $f'(0) = -\frac{1}{2}$. ضع جدول تغيرات الدالة f.

5: أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن المنحنى (C) لا يقبل نقطة انعطاف)

تمرين 17:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{x}} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1: حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2: أحسب نهايات f عند حدات D.

3: أ: أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$

ب: استنتج أن f غير متصلة في النقطة 0.

4: أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 على اليسار ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيًا.

5: حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

6: أ: أحسب $f'(x)$ لكل x من $D - \{0\}$

ب: ضع جدول تغيرات الدالة f.

7: أرسم المنحنى (C).

تمرين 18 :

I : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي :

$g(x) = (1-x)e^{x} - 1$

1 : أ : بين أن $g'(x) = -xe^{x}$ لكل x من IR

ب : بين أن الدالة g تناقصية على $]0;+\infty[$ وتزايدية على $]-\infty,0]$

2 : ج : تحقق أن $g(0)=0$ واستنتج أن $g(x) \leq x$ لكل x من IR

II : لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :

$f(x) = (2-x)e^{x} - x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

1 : أ : بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

ب : بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه.

2 : أ : بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x$

ب : بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

3 : أ : بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من IR

ب : أول هندسيا النتيجة $f'(0)=0$.

ج : بين أن الدالة f تناقصية قطعا على IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

4 : بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في IR وأن $\frac{3}{2}<\alpha<2$ (نقبل أن $e^{3/2}>3$)

5 : أ : حل في IR المعادلة $f(x)+x=0$ واستنتج أن (C) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2,-2)$

ب : أدرس إشارة $f(x)+x$ على IR

ج : استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على $]-\infty,2[$ وتحت D على $]2;+\infty[$

6 : أ : بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو (0,2).

ب : أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7: أ: باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أنّ $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx = 3-\frac{4}{e}$

ب: استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

تمرين 19:

I: نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $g(x) = 1+4xe^{2x}$

1: بيّن أنّ $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

2: بيّن أنّ الدالة g تزايدية على المجال $[-\frac{1}{2};+\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty,-\frac{1}{2}]$.

3: أ: بيّن أنّ $g(-\frac{1}{2})=1-\frac{2}{e}$ ثم تحقق من أنّ $g(-\frac{1}{2})>0$.

ب: استنتج أنّ $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1: أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بيّن أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2: بيّن أنّ $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أنّ الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3: أ: أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ واستنتج أنّ (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

ب: أحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ واستنتج أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ج: حدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (C) ثم بيّن أنّ المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty,\frac{1}{2}[$ وفوق المستقيم (Δ) على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$.

4: أ: بيّن أنّ $y=x$ هي معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O.

ب: بيّن أنّ للمنحنى (C) نقطة انعطاف أفصولها $-\frac{1}{2}$. (تحديد أرتوب نقطة الانعطاف غير مطلوب).

5: أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6: أ: باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أنّ $\int_{0}^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx = 1-\frac{e}{2}$

ب: بيّن أنّ مساحة حيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي $(6-2e)\ cm^2$.

الحساب التكاملي

1. تكامل دالة متصلة على مجال I:

1-1. تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I ولتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I.

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b.

ونكتب:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

$$= F(b) - F(a).$$

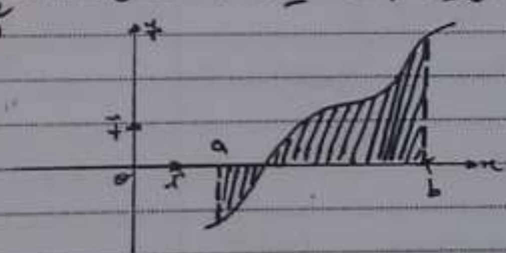
العددين a و b يسميا حدا التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. التأويل الهندسي للتكامل:

لتكن f دالة متصلة على مجال $I=[a.b]$ $(a<b)$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم.

مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx\ \|\vec{i}\|^2\ cm^2$$



ملاحظة: مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومستقيم (D) ذو المعادلة $y=\alpha x+\beta$ والمستقيمين ذو المعادلتين $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b |f(x)-y|\,dx\ \|\vec{i}\|^2\ cm^2.$$

ملاحظة: حجم الجسم المولد نتيجة دوران المنحنى (C) حول محور الأفاصيل بين المستقيمين ذو المعادلتين $x=a$ و $x=b$ هو:

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx\ \|\vec{i}\|^3\ cm^3$$

3 : خاصيات التكامل :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b و c أعداد حقيقية من المجال I و ليكن λ عددا حقيقيا.

- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

لتكن f و g دالتين متصلتين على I :

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

II بعض طرق حساب التكامل :

1: جدول الدوال الأصلية :

الدالة f	الدالة الأصلية F	المجال I
$u'(x).(u(x))^n \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}+c$	$I=D_{u'}$
$u'(x).(u(x))^r \quad r\neq -1$	$\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+c$	$I=D_{u'}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \quad u(x)>0$	$2\sqrt{u(x)}+c$	$I=D_{u'}$
$\frac{u'(x)}{u(x)} \quad u(x)\neq 0$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	$I=D_{u'}$
$u'(x)\,e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c$	$I=D_{u'}$
$e^{ax} \quad a\neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}+c$	$I=\mathbb{R}$
$\frac{1}{ax} \quad x\neq 0 ; a\neq 0$	$\frac{1}{a}\ln\lvert x\rvert+c$	$I=\mathbb{R}^*$

المجال I	الدالة الأصلية F	الدالة f
$I = \mathbb{R}$	$-\cos x + c$	$\sin x$
$I = \mathbb{R}$	$\sin(x) + c$	$\cos x$
$I = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan(x) + c$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$I = \mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$I = \mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

2: المكاملة بالاجزاء:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a.b]$
و u' و v' دالتين متصلتين على المجال $[a.b]$.

$$\int_a^b (u'.v)\,dx = \big[u.v\big]_a^b - \int_a^b (u.v')\,dx$$

3: الاخطاط:
صيغة أولير:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

III/ التكامل والترتيب:

1: خاصيات:

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال $[a.b]$.

$$f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

$$f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0.$$

2: القيمة الوسطية لدالة f على مجال I .

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ حيث $(a<b)$ و

حيث: $m \leq f(x) \leq M$ $\quad (m,M) \in \mathbb{R}^2$

لدينا: $$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

إذا: $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

إذا: $$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

العدد $A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى القيمة الوسطية للدالة f على المجال $[a,b]$.

ملاحظة: إذا كانت f متصلة على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\exists\, c \in [a,b] \;;\; f(c) = A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

تمارين في الحساب التكاملي

تمرين 1:

أحسب التكاملات التالية:

$A_3=\int_1^4\left(x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}\right)dx$	$A_2=\int_0^1(3x^2+4x-5)\,dx$	$A_1=\int_1^2(x^2+x+1)\,dx$
$A_6=\int_0^1(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-x)\,dx$	$A_5=\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$	$A_4=\int_1^2\frac{\sqrt{x}+x}{x}\,dx$
$A_9=\int_2^4\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$	$A_8=\int_0^2\frac{e^{2x}-e^x}{e^x}\,dx$	$A_7=\int_{-1}^1(e^{-x}+2e^x)\,dx$
$A_{12}=\int_0^1\frac{3}{5x+1}\,dx$	$A_{11}=\int_0^2\frac{1}{x+1}\,dx$	$A_{10}=\int_0^1\left(e^{2x}-\frac{1}{e^x+1}\right)dx$
$A_{15}=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$	$A_{14}=\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}\frac{1}{x\ln x}\,dx$	$A_{13}=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx$
$A_{18}=\int_1^e\frac{(3+2\ln x)^3}{x}\,dx$	$A_{17}=\int_1^e\frac{1}{x(2+\ln x)}\,dx$	$A_{16}=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$
$A_{21}=\int_0^2\lvert x^2+x-2\rvert\,dx$	$A_{20}=\int_0^2 x\,\lvert x-1\rvert\,dx$	$A_{19}=\int_1^3\lvert x-2\rvert\,dx$
$A_{24}=\int_1^{e^2}\frac{\lvert\ln(x)-1\rvert}{x}\,dx$	$A_{23}=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\lvert\ln x\rvert}{x}\,dx$	$A_{22}=\int_1^3(2-\lvert x^2-4\rvert)\,dx$
$A_{27}=\int_0^{\pi}\lvert\sin x\rvert\,dx$	$A_{26}=\int_1^e\frac{\lvert\ln(x)+2\rvert}{x}\,dx$	$A_{25}=\int_{-1}^2 e^x\lvert e^x-1\rvert\,dx$
$A_{30}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert\sin x-1\rvert\,dx$	$A_{29}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\lvert\tan x\rvert\,dx$	$A_{28}=\int_0^{\pi}\lvert\cos x\rvert\,dx$

تمرين 2:

باستعمال التكامل بالأجزاء أحسب التكاملات التالية:

$A_3=\int_0^{\pi}(x+2)\sin(2x)\,dx$	$A_2=\int_0^{\pi}x\cos x\,dx$	$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x\,dx$
$A_6=\int_0^{\pi}(x+1)\cos(3x+\pi)\,dx$	$A_5=\int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx$	$A_4=\int_0^2 x\cos(\pi x)\,dx$

$A_9=\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$	$A_8=\int_1^{2} x\ln x\,dx$	$A_7=\int_1^{e}\ln x\,dx$
$A_{12}=\int_0^{1} x\ln(x+1)\,dx$	$A_{11}=\int_1^{2}(x^2+1)\ln x\,dx$	$A_{10}=\int_1^{2}\left(\frac{1}{x}+x\right)\ln x\,dx$
$A_{15}=\int_1^{2}\frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$	$A_{14}=\int_1^{e}(\sqrt{x}+1)\ln x\,dx$	$A_{13}=\int_1^{3}(x^2-2x)\ln x\,dx$
$A_{18}=\int_0^{1}(3x+1)e^{2x}\,dx$	$A_{17}=\int_0^{1}(x+1)e^{x}\,dx$	$A_{16}=\int_0^{1} xe^{x}\,dx$
$A_{21}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2+1)\cos x\,dx$	$A_{20}=\int_0^{1}(x^2+3x+1)e^{x}\,dx$	$A_{19}=\int_e^{1}(x+1)e^{3x}\,dx$
$A_{24}=\int_0^{1}\left((x+1)e^{x}\right)^2\,dx$	$A_{23}=\int_0^{1}(x^2+1)e^{-x}\,dx$	$A_{22}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)\sin x\,dx$
$A_{27}=$	$A_{26}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{x}\sin x\,dx$	$A_{25}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx$
$A_{30}=\int_1^{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$	$A_{29}=\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ln(e^{x}+1)$	$A_{28}=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

تمرين 3 :

باستعمال الاخطاط أحسب التكاملات التالية :

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx \quad \text{و} \quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx \quad \text{و} \quad I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(x)\,dx$$

تمرين 4 :

نعتبر التكاملين I و J المعرفين بما يلي :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx$$

1 : أحسب $I+J$

2 : أحسب $I-J$ $\quad(\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$ لاحظ أن$)$

3 : استنتج قيمة كل من I و J

تمرين 5 :
نعتبر التكاملين I و J المعرفين كما يلي :

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+4\cos x}\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+4\cos x}$$

1 : أحسب التكامل I.
2 : أحسب $I+2J$.
3 : استنتج قيمة التكامل J.

تمرين 6 :
نعتبر التكاملين I و J المعرفين كما يلي :

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

1 : أحسب $I+J$
2 : أحسب $I-J$
3 : استنتج قيمة I و J.

تمرين 7 :
نعتبر التكاملين I و J المعرفين بما يلي :

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\cos(4x)\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x).\sin(4x)\,dx$$

1 : أحسب $I+J$
2 : أحسب $I-J$
3 : استنتج قيمة I و J.

تمرين 8 :
1 : بين أن $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ $\forall x\in \mathbb{R}^*-\{-1\}$

2 : أحسب قيمة التكامل $I=\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2+x}\,dx$

3 : باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب التكامل $J=\int_{1}^{3} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$

تمرين 9:

1: بين أن $\forall x \in \mathbb{R}; \quad \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$

2: احسب قيمة التكامل $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

3: باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب $J = \int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx$

تمرين 10:

1: أوجد a و b من R بحيث: $\forall x \in \mathbb{R}-\{3;-3\} \quad \frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$

2: احسب التكامل $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2-9}\,dx$

تمرين 11:

1: عين a و b و c بحيث $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}; \quad \frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$

2: احسب التكامل $I = \int_0^2 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

3: باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب: $A = \int_0^2 x\ln(x+1)\,dx$

تمرين 12:

1: بين أن $\forall x \in \mathbb{R}; \quad \frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2: استنتج قيمة التكامل $A = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx$

3: باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب: $I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,dx$

تمرين 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$

1: عين a و b بحيث

$$f(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x+1}$$

2: احسب التكامل: $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

3: باستعمال المكاملة بالاجزاء احسب: $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}\,dx$

تمرين 14:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{x-1}{x}\ln x$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 1cm).

1: بين أن الدالة $H: x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(x)$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال I.

2: بين أن $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$

3: باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e \ln x\,dx = 1$

4: أ: تحقق أن $f(x) = \ln(x) - \frac{\ln x}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$

ب: أدرس إشارة الدالة $f(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$

ج: أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

تمرين 15:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x\,e^{\frac{x^2}{2}+1} & ; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x+2}{x}\,e^{\frac{x}{2}} & ; x > 0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1: أ: بين أن الدالة $F(x) = \frac{x+4}{x}e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f^2 على $\mathbb{R}^{*+}$.

ب: ليكن $1<\lambda$. أحسب الحجم $V(\lambda)$ للمجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الأفاصيل والمحدد بالمستقيمين $x=1$ و $x=\lambda$.

ج: أحسب النهاية $\lim_{\lambda \to +\infty} V(\lambda)$.

2: حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الحامل والمستقيم $x=-1$.

الأعداد العقدية الجزء 2

1- المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في $\mathbb{C}$:

أ: المعادلة $z^2=a$ مع $a\in\mathbb{R}$:

ليكن a عدداً حقيقياً غير معدوم.

المعادلة $z^2=a$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما:

- إذا كان $a>0$ فإن $z=\sqrt{a}$ أو $z=-\sqrt{a}$
- إذا كان $a<0$ فإن $z=i\sqrt{-a}$ أو $z=-i\sqrt{-a}$

ب: المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $(b,c)\in\mathbb{R}^2$:

لتكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a\neq 0$.

لحل المعادلة $(E): az^2+bz+c=0$ في $\mathbb{C}$ يجب احترام إشارة المميز الخاص بالمعادلة: $\Delta=b^2-4ac$

- إذا كان $\Delta>0$ فإن: $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta=0$ فإن $z=-\dfrac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن: $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

ملاحظة: ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة: $(E): az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$.

- $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$
- $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ و $z_1\cdot z_2=\dfrac{c}{a}$

2- الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

1: تعريف:

ليكن z عدداً عقدياً معياره $r>0$ و عمدة θ.

الشكل الأسي للعدد العقدي z هو: $z=re^{i\theta}$.

2: خاصيات:

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث $z=re^{i\theta}$ و $z'=r'e^{i\theta'}$

- $z\cdot z'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

- $-z = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

د- صيغتا أولير

نعلم أن

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

إذن .

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

العلاقتين تستعملان لخطاط $\sin^n\theta$ و $\cos^n\theta$ وذلك من أجل التكاملات

ملاحظة: صيغة موافر هي:

مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

III/ التحويلات الاعتيادية:

ليكن r الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ وليكن $M(z)$ و $M'(z')$. الكتابة المركبة للدوران r هي:

$$r(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

لتكن t الانسحاب ذات الشعاع $\vec{u}$ لاحقته $z_{\vec{u}}$ ولتكن $M(z)$ و $M'(z')$. الكتابة المركبة للانسحاب t هي:

$$t(M) = M' \Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}}$$

ليكن h التحاكي ذو المركز $\Omega(\omega)$ ونسبته $k \in \mathbb{R}$ وليكن $M(z)$ و $M'(z')$. الكتابة المركبة للتحاكي h هي:

$$h(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

تمارين في الأعداد العقدية

تمرين 1:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

$z^2 - 4z + 2 = 0$

$z^2 - z + 2 = 0$

$z^2 + 2z + 3 = 0$

$2z^2 - z + 3 = 0$

$z^2 - 6z + 13 = 0$

$(iz+1)^2 - 6(iz+1) - 7 = 0$

$3(z+2)^2 + 2(z+2) + 3 = 0$

$z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$

$(2z+1+i)^2 + 2\sqrt{2}(2z+1+i) + 4 = 0$

$z^2 - (i\sin\theta)z - \frac{1}{4} = 0 \qquad \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0 \qquad \alpha \in]0, \pi[$

$z^2 + 2(1-\cos\alpha)z + 2(1-\cos\alpha) = 0 \qquad \alpha \in]0, \pi[$

تمرين 2:

حدد الشكل الأسي للأعداد العقدية التالية: ($\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = 2 - 2i \qquad z_3 = -\sqrt{3} + i$

$z_4 = (1+i)(1-i\sqrt{3}) \qquad z_5 = (1-i)(\sqrt{3}+i) \qquad z_6 = \frac{-1-i}{1+\sqrt{3}i}$

$z_7 = \frac{2+2i}{\sqrt{3}-3i} \qquad z_8 = \frac{1-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i} \qquad z_9 = 1 + i\tan\theta$

$z_{10} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta \qquad z_{11} = 1 - \cos\theta + i\sin\theta \qquad z_{12} = 1 + e^{i2\theta}$

تمرين 3:

1: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$.

2: ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $(E): z^2 - z + 1 = 0$

أحسب الشكل الجبري للأعداد العقدية u و v و w دون حل المعادلة (E) بحيث:

$u = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

$v = (z_1^2 + z_2^2)^2$

$w = z_1^3 + z_2^3$

تمرين 14:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ نعتبر النقط A و B و Ω التي لاحقاتها على التوالي:

$a = 1+2i$ و $b = 2+3i$ و $\omega = 1+i$

1: بين أن التمثيل العقدي للتحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته $k=3$ هو $z' = 3z - 2 - 2i$

2: نعتبر النقط C و D بحيث $C = h(A)$ و $D = h(B)$.

أ: حدد c و d لحقي النقطتين C و D على التوالي.

ب: اكتب العدد $\frac{d-c}{b-a}$ على الشكل الجبري

ج: بين أن $CD = 3AB$

تمرين 15:

نعتبر النقط A و B و I التي لاحقاتها على التوالي: $z_A = 3+2i$ و $z_B = -3$ و $z_I = 1-2i$

1: مثل النقط A و B و I في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$

2: أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث IAB.

3: ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته $k=2$.

أ: أوجد الكتابة العقدية للتحاكي h.

ب: أحسب z_C لحق النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي h.

ج: حدد لحق النقطة D مرجح النقط المتزنة $(A, 1)$ و $(B, -1)$ و $(C, 1)$

تمرين 16:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1: أ: حدد z_1 و z_2 حيث $Im(z_1) > 0$ حلي المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ وذلك في $\mathbb{C}$.

ب: أكتب كل من z_1 و z_2 و $2 + \bar{z_1}$ و $2 + z_2$ على الشكل الأسي

2: ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ونعتبر النقط A و B و C التي لاحقاتها على التوالي $a = 2+2i$ و $b = 1-i\sqrt{3}$ و $c = 1+i\sqrt{3}$

أ: أوجد الكتابة العقدية للدوران R.

ب: حدد a' و b' لحقي A' و B' صورتي A و B بالدوران R.

ج: تحقق أن $b - a = (\sqrt{3}+2)(b' - a)$. واستنتج أن النقط A و B و B' نقط مستقيمية.

د: بين أن المثلث $BB'A'$ قائم الزاوية.

تمرين 27

المستوي العقدي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$

2: نعتبر النقط A وB وC التي لاحقاتها على التوالي: $a=1+i$ و $b=\bar{a}$ و $c=2b$

أ: حدد الشكل الأسي للأعداد العقدية a و b.

ب: بين أن النقط A وB وC تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها I ذات اللحق $z_I=3$ وشعاعها $r=\sqrt{5}$.

ج: أحسب $\frac{c-3}{a-3}$. ما طبيعة المثلث IAC؟

3: لتكن E صورة النقطة O بالإزاحة ذات المتجهة $2\vec{IC}$.
حدد z_E لحق النقطة E.

4: لتكن D صورة النقطة E بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$
حدد d لحق النقطة D.

5: بين أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

تمرين 28

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطة $A(-i)$.

1: لتكن B صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه $\Omega(1+i)$ ونسبته $k=-\frac{3}{2}$
بين أن $z_B=\frac{5}{2}+4i$

2: لتكن (C) صورة B بالدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $-\frac{\pi}{3}$
أ: أوجد الكتابة العقدية للدوران r.
ب: حدد لحق النقطة C.
ج: استنتج طبيعة المثلث ΩBC.

3: لتكن D النقطة ذات اللحق
$$z_D=-\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\frac{-10-3\sqrt{3}}{4}$$
أ: تحقق أن النقطة D هي صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{BC}$.
ب: ما طبيعة المثلث ABCD؟

تمرين 29

1: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2-2z+4=0$

2: أكتب حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي والأسي

3: نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط A و B و C التي لاحقاتها على التوالي . $z_A = 1+i$ و $z_B = 1-i$
و $z_C = 2z_B$
٢ : بيّن أن النقط A و B و C تنتمي إلى دائرة مركزها $I(3)$
و نصف قطرها $r=\sqrt{5}$
ب : بيّن أن A هي صورة C بالدوران R الذي مركزه I وزاويته $-\frac{\pi}{2}$
ج : حدد z'_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالانسحاب ذات الشعاع
المتجه $\vec{u}(2+i)$
د : حدد z''_A لاحقة النقطة A'' صورة النقطة A بالتحاكي h الذي
مركزه I ونسبته $k=2$.

تمرين 10 :

I : 1 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2+4z+8=0$
ب : أكتب حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي والأسي.
II نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$، النقط A و B و C التي لاحقاتها على التوالي هي $z_A = -2-2i$
و $z_B = 2$ و $z_C = -2+2i$
١ : أنشئ النقط A و B و C
2 : لتكن D و E نقطتان من المستوى العقدي لاحقاهما على التوالي
$z_D = -6$ و $z_E = 6$ و F صورة النقطة D بالدوران R الذي
مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.
أ : حدد الصيغة العقدية للدوران R.
ب : حدد z_F لاحقة النقطة F.
ج : تحقق أن : $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$

د : استنتج طبيعة المثلث AEF
3 : لتكن I منتصف $[EF]$. حدد صورة المثلث EBA بالدوران R'
الذي مركزه I وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

تمرين 11 :

I : 1 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
2 : أعط الشكل المثلثي والأسي لحلي المعادلة (E).
II في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ نعتبر النقطتين A و B التي لاحقاتها على التوالي : $a=\sqrt{3}+i$
و $b=\sqrt{3}-i$
1 : حدد ومثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق المعادلة :
$|z| = |z-\sqrt{3}+i|$

2: حدد الشكل المثلثي والاسي العدد $\frac{b}{a}$.
3: استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين، واعط قياس الزاوية $(\vec{OA},\vec{OB})$.
4: لتكن c نقطة في المستوى العقدي لحقها $c=-\sqrt{3}+i$ وليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى C (أي $R(A)=C$)
أ: حدد زاوية الدوران
ب: حدد طبيعة المثلث OAC.

تمرين 12:
في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O.\vec{u}.\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=-\sqrt{3}+i$ و $b=-2i$ و $c=\sqrt{3}+i$
1: أ: اكتب a و b و c على الشكل المثلثي
ب: حدد الشكل المثلثي للعددين $\frac{a}{b}$ و bc.
ج: بين أن $\left(\frac{c}{a}\right)^{2014}=\left[1;-\frac{\pi}{3}\right]$
2: أ: اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{b-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.
3: ليكن h التحاكي ذو الصيغة العقدية التالية $z'=5z-4+4i$.
أ: حدد عناصر التحاكي h (تحديد المركز و النسبة).
ب: حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h.

تمرين 13:
نعتبر الحدودية المعرفة ب: $z\in\mathbb{C};\ p(z)=z^3-z^2+3z+5$
1: تحقق أن $p(-1)=0$
2: حدد العددين العقديين a و b بحيث
$\forall z\in\mathbb{C}:\ p(z)=(z+1)(z^2+az+b)$
3: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+5=0$
4: استنتج مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$
5: نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C الحاقها على التوالي:
$z_A=-1$ و $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$
أ: حدد قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{BC},\vec{BA}})$
ب: بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين
ج: ليكن R الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{12}$.
ولتكن $I(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ نقطة في المستوى العقدي.
علما أن $z(B)=I$ أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الهندسة الفضائية

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

I. المتجهات في الفضاء:

1. استقامية متجهتين:

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين في الفضاء.

نقول إن المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا كانت جميع المحددات d_1 و d_2 و d_3 منعدمة. بحيث:

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \text{ و } d_2 = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \text{ و } d_3 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت أحد المحددات d_1 و d_2 و d_3 غير منعدم فإن المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين.

2. استوائية ثلاث متجهات:

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ و $\vec{w}(a'',b'',c'')$ ثلاث متجهات في الفضاء.

نقول إن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية إذا كان: $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

مع:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

II. المستقيم في الفضاء:

1. التمثيل البارامتري لمستقيم:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة موجهة للمستقيم (D).

$$M(x,y,z) \in (D) \iff \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad / \; t \in \mathbb{R}$$

2. المعادلتان الديكارتيتان لمستقيم:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) بحيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و $c\neq 0$.

المعادلات الديكارتيتان للمستقيم (D) محدد إنطلاقا من المساواة المتتالية :

$$\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$$

III. المستوى في الفضاء :

1. المستوى المار من نقطة وموجه بمتجهتين :

ليكن (P) المستوى المار من النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و موجه بمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$.

$$M(x;y;z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

2. المتجهة المنظمية على مستوى :

ليكن (P) المستوى ذو المعادلة : $(P): ax+by+cz+d=0$

المتجهة المنظمية على المستوى (P) هي المتجهة العمودية عليه يرمز لها ب $\vec{n}$ بحيث $\vec{n}(a,b,c)$.

3. المستوى المار من نقطة و له متجهة منظمية عليه :

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه .

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

4. توازي و تعامد مستويين :

ليكن (P) و (P') مستويين في الفضاء، و $\vec{n}$, $\vec{n'}$ متجهتين منظميتين على التوالي على (P) و (P') .

$$(P) \parallel (P') \Leftrightarrow \det(\vec{n}, \vec{n'}) = 0$$

$$(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$$

5. مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى في الفضاء ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ و $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة في الفضاء :

مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي : $d(A,(P)) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ملاحظة : $d(A,(P)) = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

IV. الجداء السلمي :

1. تعريف :

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين في الفضاء .

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو : $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa'+bb'+cc'$

ملاحظة : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ نقول إن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان .

2. المسافة :

لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان في الفضاء .

المسافة AB هي $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

V: الجداء المتجهي :

1: تعريف :

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين في الفضاء.
الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هو المتجهة المنظمية على المستوى المحدد بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

ملاحظات :

- إذا كان : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان.
- إذا كان $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{0}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.
- إذا كان $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C تحدد مستوى.
- $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$; $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$; $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$

2: مساحة المثلث ABC :

مساحة المثلث ABC هي : $S=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$

ملاحظة : $\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|.|\sin(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})|$

3: مسافة نقطة عن مستقيم :

ليكن (D) مستقيم مار من النقطة A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له.
مسافة نقطة M في الفضاء عن المستقيم (D) هي :

$$d(M;(D))=\frac{\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

ملاحظة : $d(M;(D))=0 \Leftrightarrow M\in(D)$

VI: دراسة تحليلية للفلكة :

1: الفلكة المعرفة بالمركز والشعاع :

لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها R.

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

2: الفلكة المعرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$.

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{BM}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

3: تقاطع فلكة ومستقيم :

لتكن (S) الفلكة ذات المركز Ω وشعاعها R وليكن (D) مستقيم في الفضاء.
لدراسة تقاطع المستقيم (D) والفلكة (S) يجب مقارنة $d(\Omega,(D))$ و الشعاع R.

• إذا كان $d(\Omega;(D)) > R$ فإن $(S) \cap (D) = \emptyset$

• إذا كان $d(\Omega,(D)) = R$ فإن $(S) \cap (D) = H$ في هذه الحالة

(S) و (D) يتقاطعان في نقطة وحيدة والمستقيم (D) مماس للفلكة

(S) في النقطة H.

• إذا كان $d(\Omega,(D)) < R$ فإن (S) و (D) يتقاطعان في نقطتين

I و J بحيث $J \neq I$.

4: تقاطع فلكة ومستوي:

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R و ليكن (P) مستوي

في الفضاء.

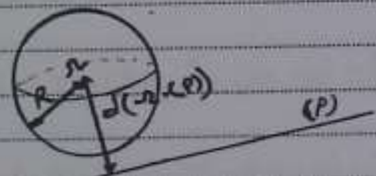
و لتكن H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (P)

لدراسة تقاطع المستوي (P) و الفلكة (S) يجب مقارنة المسافة

$d(\Omega,(P))$ و الشعاع R.

الحالة 1: إذا كان: $d(\Omega,(P)) > R$ فإن (S) و (P)

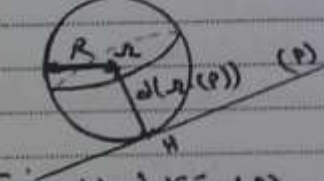
لا يتقاطعان.



الحالة 2: إذا كان: $d(\Omega,(P)) = R$ فإن (S) و (P) يتقاطعان

في نقطة وحيدة. في هذه الحالة (P) مماس للفلكة (S)

والمتجهة $\overrightarrow{\Omega H}$ منظمية على المستوي (P).



الحالة 3: إذا كان: $d(\Omega,(P)) < R$ فإن (S) و (P) يتقاطعان وفق

دائرة شعاعها $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ و مركزها H.

تمارين في الهندسية الفضائية

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

تمرين 11

نعتبر النقط $A(-1;2;1)$ و $B(1;-6;-1)$ و $C(2;2;2)$

1: أحسب $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C نقط غير مستقيمية

2: استنتج المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

3: ليكن (Q) المستوى ذو المعادلة $x+y-3z+2=0$ والمستوى (Q') ذو المعادلة $x-y+z-1=0$.

بين أن المستويين (Q) و (Q') متقاطعان ثم حدد تمثيلا بارامتريا لتقاطعهما

4: أكتب معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $I(0;1;-1)$ وشعاعها $R=2$

5: نعتبر النقطتين J و K بحيث $J(-2;0;0)$ و $K(1;0;1)$.

أ: أوجد التمثيل البارامتري للمستقيم (JK).

ب: حدد تقاطع المستقيم (JK) والفلكة (S).

تمرين 22

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ و $B(0;2;0)$ و $C(0;0;3)$

1: أحسب $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC.

2: بين أن $3x+3y+2z-6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

3: أ: نعتبر النقطة $D(2;2;\frac{2}{3})$.

تأكد أن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC).

ب: نعتبر الفلكة (S) التي مركزها D وتقطع المستوى (ABC) وفق دائرة مركزها A وشعاعها $\sqrt{3}$.

بين أن شعاع الفلكة (S) هو $R=\frac{7}{3}$.

4: نعتبر المستقيم (Δ) المار من النقطة $E(1;0;\frac{4}{3})$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(0;1;3)$

أ: تحقق أن النقطة E تنتمي إلى الفلكة (S)

ب: بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما.

تمرين 23:

نعتبر النقط $A(0;1;0)$ و $B(1;1;-1)$ و $C(-2;3;0)$ و الفلكة (S) التي معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-8z+15=0$$

1: حدد المركز Ω و الشعاع r للفلكة (S).

2: حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$.

3: حدد المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

4: أ: بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

ب: حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S).

تمرين 24:

نعتبر النقط $A(-3;0;0)$ و $B(1;-2;0)$ و $C(-1;0;-1)$

1: أ: حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$.

ب: استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2: لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(1;0;1)$ والمماسة للمستوى (ABC)

أ: بين أن شعاع الفلكة (S) هو $R=2$.

ب: أعط المعادلة الديكارتية للفلكة (S).

ج: حدد تقاطع المستوى (ABC) و الفلكة (S).

تمرين 25:

نعتبر النقط $A(1;0;-3)$ و $B(-1;2;1)$ و $C(1,1;-2)$ في الفضاء.

1: أ: حدد إحداثيات مثلوث $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$

ب: استنتج المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

2: نعتبر الفلكة (S) المعرفة بمعادلتها الديكارتية:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z+6=0$$

أ: حدد مركز وشعاع الفلكة (S).

ب: حدد تقاطع المستوى (ABC) والفلكة (S).

تمرين 26:

نعتبر النقط $A(2;0;2)$ و $B(3;2;1)$ والمستوى (P) ذو المعادلة:

$$x+y-z-3=0$$

1: حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على (P).

2: حدد تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P).

3: نعتبر الفلكة (S) معادلتها الديكارتية: $x^2+y^2+z^2-4x-4z+1=0$

أ: حدد مركز وشعاع الفلكة (S).

ب: حدد تقاطع المستوى (P) والفلكة (S)

ج: أحسب مسافة B عن المستقيم (D)

تمرين 7:

نعتبر النقط $A(1;0;1)$ و $B(-1;-1;0)$ و $C(1;1;2)$ و $E(1;1;-1)$

1: حدد مثلوث احداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

2: استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية وحدد معادلة المستوى (ABC).

3: لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2+2z-1=0$

أ: حدد مركز و شعاع الفلكة (S).

ب: أثبت أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

ج: حدد تقاطع المستوى (ABC) و الفلكة (S).

د: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في النقطة E.

تمرين 8:

نعتبر النقط $A(3;0;0)$ و $B(0;6;0)$ و $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$

1: حدد مثلوث احداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

2: حدد معادلة ديكارتية المستوى (ABC).

3: حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوى (ABC) والمار من النقطة D.

4: استنتج احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة (D) على المستوى (ABC).

5: أحسب مسافة النقطة D عن المستوى (ABC).

6: بين أن النقطة H تنتمي إلى الفلكة (S) التي أحد أقطارها [AD] ثم حدد معادلة الفلكة (S).

تمرين 9:

لتكن النقط $A(1;0;-2)$ و $B(1;1;-1)$ و $C(-3;0;0)$

1: أ: حدد احداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

ب: أعط معادلة ديكارتية المستوى (ABC).

2: لتكن (S) الفلكة المعرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$

أ: حدد مركز وشعاع الفلكة (S).

ب: أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مع Ω مركز الفلكة (S)

ج: استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

د: حدد تقاطع الفلكة (S) و المستوى (ABC).

3: حدد مسافة النقطة Ω عن المستقيم (OB).

4: أوجد التمثيل البارامتري للمستقيم (OB)

5: استنتج تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (OB).

التعداد والاحتمالات

I. التعداد:

1. رئيسي مجموعة منتهية:

لتكن E مجموعة منتهية ولتكن عناصرها مختلفة مثنى مثنى حيث عددها n ($n \in \mathbb{N}$).

رئيسي المجموعة E يرمز له ب $Card(E)$ ويعبر عن عدد عناصر المجموعة E ونكتب $card(E) = n$.

2. عدد التطبيقات:

إذا كان $card(E) = n$ و $Card(F) = P$ مع $(n, P) \in \mathbb{N}^2$ فإن عدد التطبيقات من المجموعة E نحو المجموعة F هو n^P.

3. الترتيبات:

كل تطبيق تبايني من $\{1, 2, \dots, n\}$ نحو E حيث $Card(E) = n$ و $n \geq p$ تسمى ترتيبة لـ p عنصر من n عنصر. عدد هذه الترتيبات هو:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

4. التبديلات:

كل تطبيق تبايني من E نحو E حيث $Card E = n$ يسمى تبديلة لـ n عنصر وعدد هذه التبديلات هو $n!$ وتقرأ n عاملي حيث:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

ملاحظة: $0! = 1$ و $1! = 1$.

5. التأليفات:

كل جزء من E حيث $Card E = n$ مكون من p عنصر ($p \leq n$) يسمى تأليفة p عنصر من n.

عدد التأليفات لـ p عنصر من بين n عنصر هو:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

ملاحظة: $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ أي $A_n^p = p!\, C_n^p$

خاصيات:

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$$

تطبيقات:

1) أحسب وبسط ما يلي: $\frac{A_8^3 \times A_{10}^3}{A_{10}^5}$ و A_{10}^4 و C_6^3

2: حل في N المعادلات التالية:

$A_n^2 = 15 - 3n$ $\quad$ $A_n^2 = 4n$

$A_n^2 = 8 + n$

$C_n^2 = 10$ $\quad$ $C_n^2 = 3C$

$3C_n^3 = 4C_n^2$ $\quad$ $C_n^3 = 5n$

$2C_n^2 + 6C_n^3 - 9n = 0$

II الاحتمالات:

1: تعاريف ومصطلحات:

- التجربة العشوائية هي التجربة التي أعيدت في نفس الظروف والشروط حيث يمكن أن تعطي نتائج مختلفة.
- يمكن لتجربة عشوائية أن تتكون من عدة تجارب عشوائية تسمى اختبارات.
- مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما تسمى كون الامكانيات يرمز لها ب Ω.
- كل عنصر من Ω يسمى امكانية
- كل جزء من Ω يسمى حدث.
- Ω يسمى الحدث الأكيد والمجموعة الخالية $\emptyset$ تسمى الحدث المستحيل
- إذا كان A حدثا من Ω فإن الجزء المتمم $\bar{A}$ للحدث A يسمى الحدث المضاد.
- نقول إن حدثين A و B غير منسجمين إذا كان $A \cap B = \emptyset$.

2: احتمال حدث معين:

ليكن A حدثا من Ω.

احتمال الحدث A يعبر عنه بالعلاقة: $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

مع $0 \le P(A) \le 1$.

إذا كان $P(A) = 1$ يكون الحدث A أكيدا وحقق $A = \Omega$

إذا كان $P(A) = 0$ فإن الحدث A يسمى مستحيلا وحقق $A = \emptyset$

ملاحظة: $P(\Omega) = 1$ و $P(\emptyset) = 0$.

3: الحدثين الغير المنسجمين:

ليكن A و B حدثين من Ω.

نقول إن A و B غير منسجمين إذا كان: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4: الحدث المضاد :

الحدث المضاد للحدث A يرمز له بالرمز $\bar{A}$ بحيث $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$ و يتحقق إذا: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5: الاحتمال الشرطي:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة بحيث $P(A) \neq 0$ احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق يرمز له ب $P_A(B)$ أو $P(B/A)$ و يحقق:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ملاحظة: نقول إن A و B مستقلان إذا كان $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

6: الاختبارات المتكررة:

ليكن A حدث مرتبط بتجربة عشوائية، وليكن احتمال الحدث A هو $P(A)$.

عندما نكرر الاختبار n مرة متتالية في نفس الظروف فإن احتمال تحقق الحدث A بالضبط k مرة مع $0 \leq k \leq n$ هو:

$$P(A)_k = C_n^k \cdot (P(A))^k (1 - P(A))^{n-k}$$

III: المتغير العشوائي - قانون الاحتمال:

1: قانون الاحتمال:

قانون الاحتمال هو تطبيق f يربط كل عنصر x_i من $X(\Omega)$ باحتمال الحدث $(X = x_i)$ أي $f(x_i) = P(X = x_i)$.

نرمز ب $X(\Omega)$ لمجموعة قيم التي يأخذها المتغير X حيث $X(\Omega) = \{X(\omega) / \omega \in \Omega\}$

ملاحظة: $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

2: الأمل الرياضي، التباين، الانحراف الطرازي:

يعبر عن الأمل الرياضي بالعلاقة: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

يعبر عن التباين ب: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - E(X))^2$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

يعبر عن الانحراف الطرازي ب: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

تمارين في الاحتمالات

تمرين 1

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وأربع كرات خضراء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1: ليكن Ω كون الامكانيات، أحسب card Ω.

2: احسب احتمال الاحداث التالية:

A: "الحصول على ثلاث كرات حمراء".

B: "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون".

C: "الحصول على الاقل على كرة حمراء".

D: "الحصول على الاكثر على كرة خضراء".

E: "الحصول على كرة واحدة تحمل لونا وكرتين تحملان اللون الآخر".

تمرين 2

يحتوي صندوق على ثلاث بيدقات حمراء وخمس بيدقات خضراء وبيدقتين بيضاوين.

I: نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيدقات من الصندوق.

1: أحسب card Ω مع Ω كون الامكانيات.

2: أحسب احتمال الحدث A: "الحصول على ثلاث بيدقات خضراء".

3: أحسب احتمال الحدث B: "الحصول على ثلاث بيدقات لها نفس اللون".

4: احسب احتمال كل من الاحداث التالية:

C: "الحصول على بيدقة بيضاء على الاقل".

D: "الحصول على بيدقتين فقط من نفس اللون".

5: ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أ: حدد قيم X.

ب: أحسب $P(X)$ في كل حالة من حالات قيم X.

II: نعيد البيدقات الثلاث المسحوبة سابقا إلى الصندوق ثم نسحب في هذه المرة ثلاث بيدقات بالتتابع وبدون إحلال، ونعتبر الحدثين:

A: "الحصول على بيدقة واحدة حمراء".

B: "الحصول على البيدقة الاولى بيضاء".

1: أحسب $P(A)$ و $P(B)$.

2: هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل جوابك.

تمرين 3 :

يحتوي صندوق على 10 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

6 كرات منها بيضاء مرقمة ب : 1 و 1 و 1 و 1 و 2 و 2 .

4 كرات سوداء مرقمة ب : 1 و 1 و 2 و 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1 : أحسب احتمال الأحداث التالية.

A : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون".

B : "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم".

C : "الكرات الثلاث المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 4".

D : "الكرات الثلاث المسحوبة مجموع أرقامها عددا فرديا موجبا".

2 : أحسب $P(A \cap B)$ و $P(A \cap C)$.

3 : علما أن الكرات المسحوبة لها نفس اللون ما هو احتمال "الحصول على ثلاث كرات لها نفس الرقم".

4 : نعيد التجربة السابقة أربع مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة في كل مرة إلى الصندوق.

ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على ثلاث كرات لها نفس اللون ؟

تمرين 4 :

يحتوي صندوق على خمس كرات سوداء وثلاث كرات بيضاء وكرتين حمراوين. كلها لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق.

1 : أحسب card عدد الامكانيات.

2 : أحسب احتمال "الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون".

3 : أحسب احتمال "الحصول على كرة واحدة حمراء فقط".

4 : أحسب احتمال : "الحصول على كرتين على الأقل لهما نفس اللون".

5 : أحسب احتمال : "الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى".

6 : أحسب احتمال : "الحصول على بيضاء على الأقل".

7 : أحسب احتمال : "الحصول على حمراوين على الأكثر".

تمرين 5 :

يحتوي صندوق على 8 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس، منها ثلاث كرات حمراء مرقمة ب 1 و 1 و 0 ، وثلاث كرات سوداء مرقمة ب : 2 و 1 و 0 وكرتين بيضاوين مرقمة ب 0 و 1 .

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق.

1: نعتبر الحدثين التاليين:

A: "سحب كرة من كل لون"

B: "الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم".

أ: أحسب احتمال كل من الأحداث: A و B و $A \cap B$.

ب: هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل جوابك.

2: ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1.

أ: حدد قانون احتمال X.

ب: أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والمغايرة $V(X)$.

3: نعيد نفس التجربة السابقة أربع مرات متتالية بإحلال.
أحسب احتمال الحصول على الحدث A ثلاث مرات بالضبط.

تمرين 6:

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ 1، 1، 2 وكريتين خضراوين رقماهما 1 و 2. ويحتوي صندوق U_2 على كريتين حمراوين وثلاث كرات خضراء وكرة واحدة سوداء.
جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

I: نسحب في آن واحد كريتين من الصندوق U_1.

1: بين أن احتمال الحصول على كريتين مختلفتي اللون هو $\frac{3}{5}$.

2: احسب احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم.

3: احسب احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم علما أنهما مختلفتي اللون.

4: نعيد التجربة السابقة ثلاث مرات، مع إرجاع الكريتين المسحوبتين في كل مرة إلى الصندوق.
ما هو احتمال سحب كريتين مختلفتي اللون مرتين بالضبط؟

II: نسحب الآن ثلاث كرات بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق U_2.
وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة.

1: بين أن $P(X=1)=\frac{9}{20}$

2: حدد قانون الاحتمال $P(X)$.

3: أحسب الأمل الرياضي والانحراف الطرازي.

III: نسحب الآن ثلاث كرات بالتتابع وبإحلال من الصندوق U_2.

1: أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون.

2: أحسب احتمال سحب ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى.

3: أحسب احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل.

تمرين 27

يحتوي صندوق على أربع كرات تحمل الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرة واحدة تحمل الرقم 3، لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال ثلاث كرات من الصندوق.

1: أحسب card Ω (عدد كل الامكانيات).

2: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات تحمل الرقم 1.

3: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات لها نفس الرقم.

4: ما هو احتمال الحصول على كرة واحدة تحمل رقما زوجيا.

5: ما هو احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم.

6: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات مختلفة الرقم مثنى مثنى.

7: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات مجموع أرقامها يساوي 5.

8: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات مجموع أرقامها عدد زوجيا.

9: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات جداء أرقامها أكبر أو يساوي 5

10: ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات جداء أرقامها يساوي 9.

تمرين 28

I: نعتبر صندوقا (U) يحتوي على عشر كرات، بحيث كرة واحدة تحمل الرقم 0، و خمس منها تحمل الرقم 1 و أربعة منها تحمل الرقم 2.

نسحب من الصندوق بالتتابع و بدون احلال ثلاث كرات.

جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1: أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات تحمل نفس الرقم.

2: احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات مختلفة مثنى مثنى.

3: احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات مجموع ارقامها تساوي 3.

4: احسب احتمال الحصول على كرة واحدة تحمل الرقم 1 علما أن مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 3.

5: ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بمجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

حدد قانون احتمال المتغير X.

II: ليكن U_1 صندوقا آخر يحتوي على 10 كرات بحيث كرتين منهن تحمل الرقم 0 و ثمانية منهن تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق U_1. ثم نضعهما في الصندوق U_2.

إذا كانت الكرتين المسحوبتين من U_1 لهما نفس الرقم نسحب عشوائيا

بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق ح$_2$.
إذا كانت الكريتين المسحوبتين من الصندوق ح$_1$ مختلفتي الرقم نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال ثلاث كرات من الصندوق ح$_2$.
في النهاية نحصل دائما في كلتا الحالتين على ثلاث كرات مسحوبة من الصندوق ح$_2$، وأن جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.
١: أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات لها نفس الرقم.
٢: أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات لها أرقام مختلفة مثنى مثنى.
٣: علما أن الكريتين المسحوبتين من الصندوق ح$_2$، ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات لها نفس الرقم؟

تمرين ٤٩:

يحتوي صندوق ح على خمس كرات مختلفة ومرقمة كما يلي: ٥، ٥، ٢، ١، ٢.
ونفترض أنه لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

I: نسحب تآنيا ثلاث كرات من الصندوق ح.
١: أحسب احتمال سحب ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى.
٢: أحسب احتمال سحب كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم ٥.
٣: أحسب احتمال سحب الكرة رقم ١ علما أن جداء أرقام الكرات المسحوبة منعدما.
٤: نعيد التجربة السابقة ثلاث مرات، ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى، مرتين بالضبط.

II: نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق ح:
ليكن x المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الأرقام الثلاث المسحوبة.
١: بين أن $P(X=2)=\frac{3}{10}$.
٢: حدد قانون احتمال x.
٣: أحسب الأمل الرياضي والمغايرة.

III: السحب المختلف:

نقوم بسحب ثلاث كرات على الشكل التالي: نسحب الكرة الأولى من الصندوق ح وننظر الى رقمها:
• إذا كان رقمها هو ٥، نحتفظ بها ونسحب كريتين من الصندوق ح بالتتابع وبإحلال.
• إذا لم يكن رقمها هو ٥ نحتفظ بها ونسحب كريتين بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق ح.
أحسب احتمال الحصول على الكرة رقم ١ لأول مرة في السحب الثالث.

الفيزياء والكيمياء

الاهتزازات الحرة في دارة RLC متوالية

I: الدارة المثالية LC: حيث انعدام المقاومة:

1: المعادلة التفاضلية التي يحققها u_c:

حسب قانون إضافية التوترات لدينا:

$$u_L + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + u_c = 0$$

لدينا: $i = C\frac{du_c}{dt}$ إذن:

$$L\frac{d\left(C\frac{du_c}{dt}\right)}{dt} + u_c = 0$$

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

2: حل المعادلة التفاضلية:

يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل: $u_c(t) = U_{cm}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

مع: $U_{cm}(V)$ يمثل الوسع وهو القيمة القصوية للتوتر u_c بين مربطي المكثف.

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ يمثل الدور وهو المدة الزمنية اللازمة لإنجاز ذبذبة واحدة وحدته (s).

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ يسمى النبض الخاص وحدته $rad.s^{-1}$.

φ (rad) يمثل الطور عند أصل التواريخ.

ملاحظة: انطلاقا من التعبير: $u_c(t) = U_{cm}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ نجد تعبير كل من الشحنة $q(t)$ حيث: $q(t) = Cu_c$ و تعبير شدة التيار المار في الدارة حيث: $i = C\frac{du_c}{dt}$

II: الدراسة الطاقية للدارة المثالية:

1: الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف:

يعبر عن الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف بالعلاقة: $E_e = \frac{1}{2}Cu_c^2$

مع $u_c(t) = U_{cm}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ إذن:

$$E_e = \frac{1}{2}CU_{cm}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

ب: الطاقة المغناطيسية المخزونة في الوشيعة:

يعبر عن الطاقة المغناطيسية المخزونة في الوشيعة بالعلاقة:

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

مع $i(t) = -C U_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ إذا:

$$E_m = \frac{1}{2} L C^2 U_m^2 \frac{4\pi^2}{T_0^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

ج: الطاقة الكلية في الدارة:

يعبر عن الطاقة الكلية في الدارة ب: $\mathcal{E}_T = E_e + E_m$

مع:

$$\mathcal{E}_T = \frac{1}{2} C U_m^2 \quad \text{أو} \quad \mathcal{E}_T = \frac{1}{2} L I_m^2$$

ملاحظة: مع غياب المقاومة تحفظ الطاقة الكلية في الدارة حيث $\frac{d\mathcal{E}_T}{dt} = 0$ وبالتالي $\mathcal{E}_T = cte$.

III: الدارة RLC:

1: المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C:

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_R + u_C = 0$

$$ri + L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i + u_C = 0$$

نعلم أن $i = C\frac{du_C}{dt}$ إذا: $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

ومنه: $$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R+r}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

ملاحظات: المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$ هي:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R+r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

: المعادلة التفاضلية لا تقبل حلا تحليليا.

2: تناقص الطاقة الكلية في الدارة:

نعلم أن $\mathcal{E}_T = E_e + E_m$ إذا:

$$\frac{d\mathcal{E}_T}{dt} = \frac{d(E_e + E_m)}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2\right)}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} C \cdot 2 u_C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2} L \cdot 2 \cdot i \frac{di}{dt}$$

$$= i \left(u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} \right)$$

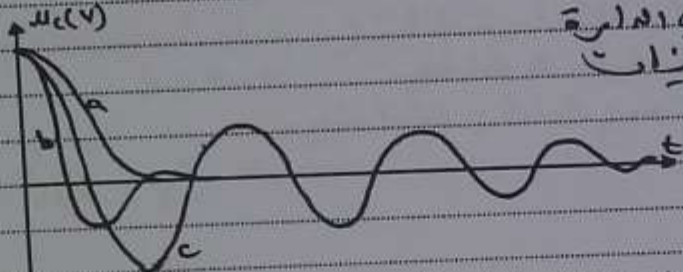
حسب المعادلة التفاضلية لدينا :
$$u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = -(R+r) C \frac{du_C}{dt}$$

إذن :
$$\frac{dE_T}{dt} = -(R+r) i^2$$

وهذا يدل على تناقص الطاقة الكلية في الدارة نتيجة وجود المقاومة التي تحول الطاقة إلى طاقة حرارية.

2-3 أنظمة الدارة RLC :

عند وجود المقاومة في الدارة نحصل على أحد المنحنيات



يتغير شكل المنحنيات فيما بينها والسبب هو نوع مقاومة الدارة.

المنحنى a : يمثل النظام الحرج ويتحقق ذلك عندما تكون مقاومة الدارة كبيرة جداً.

المنحنى b : يمثل النظام اللادوري ويتحقق عندما تكون المقاومة في الدارة متوسطة.

المنحنى c : يمثل نظام مشبه دوري دوره $T \simeq 2\pi\sqrt{LC}$ أي $T \simeq T_0$ ويتحقق هذا النظام عندما تكون المقاومة في الدارة صغيرة.

3- صيانة التذبذبات :

1-3 مبدأ الصيانة :

من أجل صيانة التذبذبات وبالتالي الحصول على تذبذبات جيبية نزود الدارة RLC بمولد مؤمثل يعوض للدارة الطاقة المفقودة بمفعول جول.

الجهد المضاف إلى الدارة توتره يتناسب اطراداً مع شدة التيار ويكتب على الشكل :
$$u_G = ki$$

نعد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_c :

حسب قانون إضافية التوترات :
$$u_L + u_R + u_c = u_G$$

$$ri + L\frac{di}{dt} + Ri + u_c = ki$$

$$L\frac{di}{dt} + (R + r - k)\,i + u_c = 0$$

$$Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R + r - k)\,c\,\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R + r - k}{L}\cdot\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{Lc}\,u_c = 0$$

ملاحظة: للحصول على دارة مثالية (تذبذبات جيبية مصانة) يجب ضبط المولد G على القيمة $K = R + r$

وبالتالي تصبح المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{Lc}\,u_c = 0$$

تمارين في الذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية

تمرين 1:

تشتمل الدارة الكهربائية الممثلة في الشكل 1 على مكثف سعته $C=5\mu F$ ووشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها مهملة وقاطع التيار K.

بعد شحن المكثف بمولد توتره الكهربائي $E=6V$ ومقاومته مهملة. نربطه في الدارة السابقة. ثم نغلق قاطع التيار في لحظة نعتبرها أصلاً للتواريخ.

1: أحسب الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف عند شحنه.

2: بتطبيق قانون إضافية التوترات أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C التوتر بين طرفي المكثف.

3: يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل $u_C(t)=U_{Cm}\cos(\alpha t+\varphi)$

أ: ما مدلول ووحدة كل من U_{Cm} و α و φ.

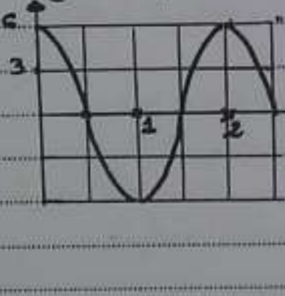
ب: بين أن $T_0=2\pi\sqrt{LC}$.

ج: يمثل المنحنى أسفله الممثل في الشكل 2 تغيرات u_C بدلالة الزمن. باعتمادك على هذا المنحنى حدد التعبير العددي للتوتر $u_C(t)$ ثم أحسب قيمة L معامل تحريض الوشيعة.

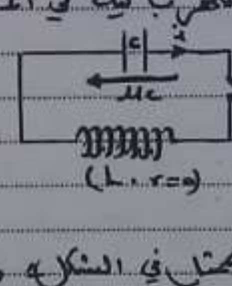
4: بين أن الدارة LC مثالية باستعمال المعادلة التفاضلية.

5: أوجد تعبير $i(t)$ شدة التيار بدلالة الزمن.

6: أحسب الطاقة المخزونة في الوشيعة $t_1=\frac{T_0}{4}$، ثم استنتج الطاقة الكهربائية في المكثف في اللحظة t_1.



الشكل 2



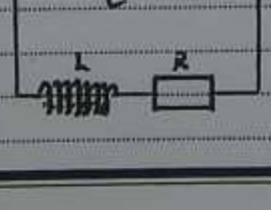
الشكل 1

تمرين 2:

نعتبر التركيب الممثل في الشكل 1 والمكون من:

- مكثف سعته $C=10\mu F$.
- وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها مهملة.
- موصل أومي مقاومته R.

علما أنه تم شحن المكثف تحت توتر U_0 قبل تركيبه عند اللحظة $t=0$ في الدارة.

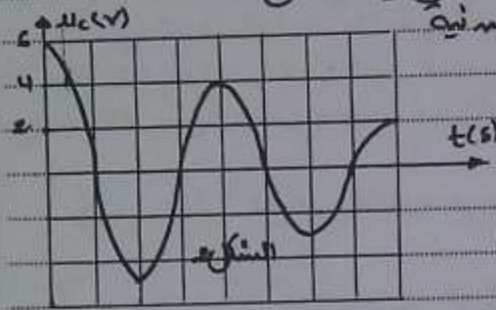


أ: أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها u_c التوتر بين طرفي المكثف.

ب: بيّن أن $dE_T = -Ri^2dt$. علل ذلك.

3: نعاين بواسطة راسم الاهتزاز المهبطي التوتر بين طرفي المكثف فنحصل على الرسم التذبذبي الممثل في الشكل 2.

أ: أوجد قيمة Q_0 الشحنة البدئية للمكثف.



ب: أوجد قيمة الطاقة الكلية في الدارة عند اللحظة $t = 2T$ حيث T شبه الدور.

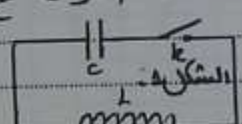
ج: أوجد قيمة الطاقة الكلية في الدارة عند اللحظة $t = 0$.

د: أوجد قيمة الطاقة المبددة في الدارة بين اللحظتين $t = 0$ و $t = 2T$.

تمرين 3:

الجزء الأول: الحالة التي تكون فيها مقاومة الوشيعة مهملة.

نعتبر التركيب الممثل في الشكل 1 والمكون من مكثف سعته c مشحون بتوتر $U_0 = 10V$، ووشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها مهملة، وقاطع التيار K.



عند اللحظة $t=0$ نغلق الدارة.

1: أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر المكثف.

2: يكتب تعبير كل من التوتر u_c بين مربطي المكثف والشدة i للتيار في هذه الدارة على الشكل التالي:

$u_c(t) = 10\cos(10^4\pi t)$ مع (u_c بالفولط V)

$i(t) = -\pi 10^{-2}\sin(10^4\pi t)$ مع (i بالأمبير A)

أ: علما أن $T_0 = 2\pi\sqrt{Lc}$ الدور الخاص، بيّن أن $u_c = U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ حل المعادلة التفاضلية السابقة.

ب: أوجد تعبير i بدلالة الزمن.

ج: بيّن أن قيمة c سعة المكثف هي $c = 0,1 \mu F$.

د: استنتج قيمة معامل التحريض L للوشيعة.

3: أ: بيّن أن $E_T = \frac{1}{2}cU_0^2$. ثم أحسب قيمتها.

ب: ليكن t_1 تاريخ اللحظة التي تكون فيها الطاقة المخزونة في المكثف، والطاقة المخزونة في الوشيعة متساويتين.

أ. احسب قيمة كل من التوتر u_c بين مربطي المكثفة وشدة التيار في الدارة عند اللحظة t_1.

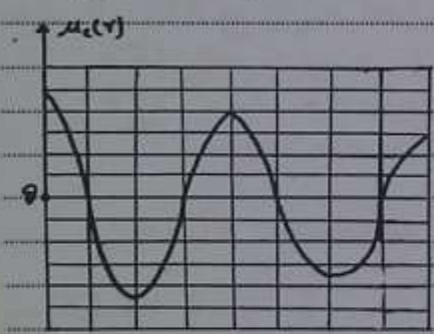
الجزء الثاني: الحالة التي تكون فيها مقاومة الوشيعة غير مهملة.
نعوض في التركيب السابق الممثل في الشكل 1 الوشيعة السابقة بوشيعة أخرى لها نفس معامل التحريض L، غير أن مقاومتها r غير مهملة.
بعد شحن المكثفة كليا من جديد في نفس ظروف الشحن السابقة حيث $U_0 = 10V$، نغلق الدارة في اللحظة $t=0$. باستعمال راسم الاهتزاز نعاين التوتر u_c بين مربطي المكثفة، فنحصل على الرسم التذبذبي الممثل في وثيقة الشكل 2.

1: أرسم التركيب الممثل في الشكل 1 ومثل عليه كيفية ربط الدارة براسم الاهتزاز.

2: علل شكل المنحنى الممثل في الشكل 2، وعين قيمة شبه الدور T وقارن مع قيمة الدور الخاص T_0.

3: بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها u_c تكتب على الشكل:

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_c}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_0^2}u_c = 0$$



4: حسب الشروط البدئية يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل:

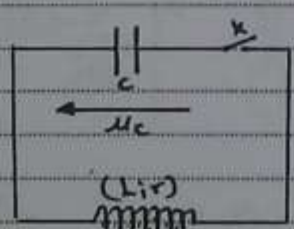
$$u_c(t) = U_0 e^{-\lambda t}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

أ: أوجد تعبير $\frac{u_c(0)}{u_c(T)}$ بدلالة λ و T.

ب: استنتج قيمة المقاومة r للوشيعة.

الحساسية الرأسية: $2V/div$ و الكسح الافقي: $5.10^{-5}s/div$

تمرين 24



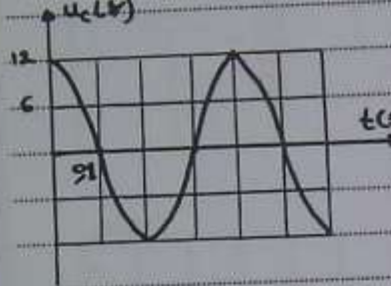
تتكون الدارة الممثلة في الشكل جانبه من:
- مكثف سعتها $C = 1\mu F$ مشحون بدئيا بتوتر $U_0 = 12V$
- وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها r غير مهملة.
- قاطع التيار K.

عند اللحظة $t=0$ نغلق الدارة.

1: أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_c توتر المكثف.

2: بين أن الطاقة الكلية في الدارة تتناقص مع مرور الزمن. فسر ذلك.

3: لصيانة التذبذبات نضيف إلى الدارة السابقة مولدا مؤمثلا توتره يتناسب طردا مع شدة التيار حيث $u_g = k\,i$ مع k قيمة قابلة للضبط. حيث تم ضبطها على القيمة $k = 50\,\Omega$.
نغلق الدارة في اللحظة $t=0$ فنربط الدارة بكاشف التذبذب ثم نلاحظ المنحنى $u_C(t)$ بدلالة الزمن كما هو مبين في الشكل 2.



أ: أوجد من جديد المعادلة التفاضلية التي تحققها u_C.

ب: حدد قيمة r للحصول على دارة مثالية.

ج: حدد مبيانيا قيمة T_0 ثم أحسب L معامل تحريض الوشيعة.

تمرين 5:

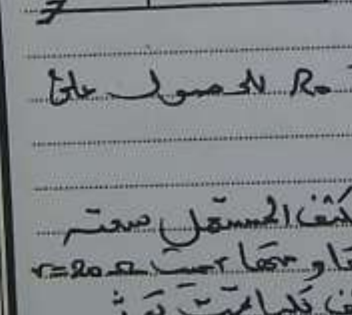
I: نشحن مكثفا سعته $C=0,1\mu F$ تحت توتر $U_0=12V$ ثم نركبه عند اللحظة $t=0$ مع وشيعة ذاتية معامل تحريضها $L=1H$ ومقاومتها r. ونضيف إليها موصلا أوميا مقاومته $R=35\Omega$ مركبا على التوالي مع المكثف والوشيعة.

1: أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C بين مربطي المكثف.

2: هل يمكن اعتبار الدارة مثالية؟ علل جوابك بحساب $\frac{dE_T}{dt}$.

3: علما أن $\alpha = \frac{r+R}{2L}$ و أن $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ بين أن $u_C(t) = U_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ حلا للمعادلة التفاضلية السابقة.

4: لصيانة التذبذبات ننجز التركيب جانبه



حيث $I^+ = I^- \approx 0$ و أن $U_{NP}=0$ والمضخم العملياتي يشتغل في النظام الخطي نفرض $R_1 = R_2$.

أ: أوجد تعبير u_g التوتر بين مربطي المولد بدلالة i و R_0.

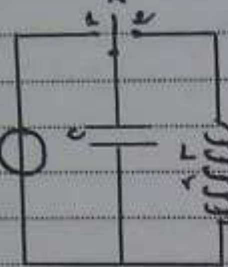
ب: أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C التوتر بين مربطي المكثف.

ج: علما أن مقاومة الوشيعة مهملة. ما قيمة R_0 للحصول على تذبذبات جيبية لا يتناقص وسعها.

تمرين 6:

ننجز التركيب التجريبي الممثل في الشكل 3، حيث المكثف المستعمل سعته $C=84\mu F$، والوشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها $r=20\Omega$. نضع قاطع التيار K على الموضع 1، فيشحن المكثف كليا تحت توتر

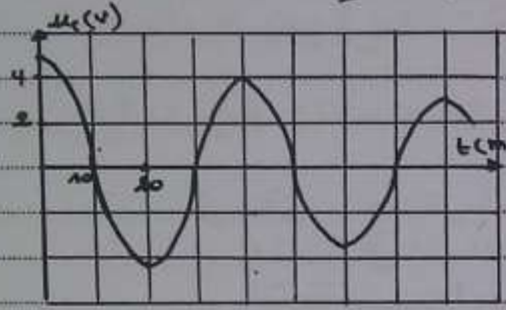
. $E = 5V$



نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 في اللحظة $t=0$ ونستعمل وسيط معلوماتي لمعاينة تغيرات التوتر u_c بين مربطي المكثف، فنحصل على الرسم البياني الممثل في الشكل 2.

1: مثل على الدارة كيفية ربط الوسيط المعلوماتي المستعمل لمعاينة التوتر u_c.

2: أحسب E_e الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف عند اللحظة $t=0$.



3: أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_c.

4: بين طبيعة النظام المحصل عليه من طرف الوسيط المعلوماتي، ثم عين من المبيان شبه الدور T للتذبذبات.

5: استنتج L معامل تحريض الوشيعة، علما أن شبه الدور T يساوي الدور الخاص T_0 للدارة المثالية (LC).

6: علل تناقص الطاقة للدارة خلال الزمن، ثم أحسب قيمتها عند اللحظة $t=T$.

7: أحسب الطاقة الضائعة بين اللحظتين $t_1=2T$ و $t=0$.

8: من أجل صيانة التذبذبات نضيف إلى الدارة السابقة عند اللحظة $t=2T$ مولدا G توتره يتناسب اطرادا مع شدة التيار حيث $u_G = R_0 i$ حيث R_0 ثابتة تم ضبطها على القيمة $R_0 = 20\Omega$.

أ: بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر بين مربطي المكثف هي: $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$

ب: باعتبار أصل التواريخ الجديد هو لحظة ربط المولد بالدارة rLC السابقة بين أن $u_c(t) = 3\cos(50\pi t)$ حل المعادلة التفاضلية السابقة مع $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

ج: أحسب قيمة شدة التيار القصوى المار في الدارة المثالية الجديدة.

د: عندما يكون $E_e = E_m$ أحسب التوتر u_c وشدة التيار المار في الدارة.

تمرين 17

نشحن مكثفا سعته $C = 1\,\mu F$ بواسطة مولد توتره الكهربائي $E = 12V$
ثم نربطه بوشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها r في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ.

I: باعتبار مقاومة الوشيعة مهملة.

1: أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها u_c التوتر بين مربطي المكثف.

2: تحقق أن $u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi\right)$ حلا للمعادلة التفاضلية.

3: علما أن $T_0 = 2ms$ أحسب قيمة معامل تحريض الوشيعة. نأخذ $\pi^2 = 10$

4: أوجد التعبير العددي للتوتر $u_c(t)$ بدلالة الزمن، ثم أحسب قيمته في اللحظة $t_1 = \frac{T_0}{2}$.

5: الطاقة الكلية في الدارة هي: $E_T = E_e + E_m$.

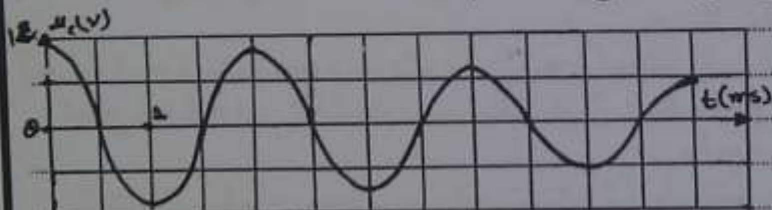
أ: بين أن الطاقة الكلية في الدارة تنحفظ.

ب: بين أن $E_T = \frac{1}{2} C U_m^2$ ثم أحسب قيمتها.

ج: بين أن $E_m = \frac{1}{2} C (U_m^2 - u_c^2)$ ثم أحسب قيمتها في اللحظة t_1.

II: باعتبار مقاومة الوشيعة غير مهملة.

معاينة التوتر u_c بين مربطي المكثف في هذه الحالة يعطي الرسم التذبذبي الممثل في الشكل أسفله.



1: ما النظام الذي يبرزه المنحنى أعلاه؟ ما السبب في ذلك.

2: أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_c بين مربطي المكثف.

3: باستعمال المعادلة التفاضلية بين أن $dE_T = -r i^2 dt$

4: أحسب تغير الطاقة الكلية في الدارة بين اللحظتين $t = 0$ و $t = 3T$، حيث T شبه الدور.

الموجات الكهرمغناطيسية - تضمين الوسع

I - 1: تضمين توتر جيبي:

1: الموجات الكهرمغناطيسية:

الموجات الكهرمغناطيسية تنتشر في مجال كهربائي مرفوقا بمجال مغناطيسي يتغيران وينتشران في الفضاء، وهي موجات هرتزية ترددها عالية تنتشر في الفراغ بسرعة ثابتة وهي سرعة انتشار الضوء $c = 3.10^{8}\ m.s^{-1}$ وتنتشر في الأوساط المتجانسة والعازلة وفي جميع الاتجاهات وفق مسار مستقيمي تتميز بترددها f وطول موجتها λ حيث $\lambda = \frac{c}{f}$.

ملاحظة: كلما كان تردد الموجة الكهرمغناطيسية عاليا كلما قطعت مسافة كبيرة، لهذا تستعمل كموجة حاملة لنقل المعلومات.

ملاحظة:

الموجات الهرتزية تتميز بالتردد f وطول الموجة λ حيث:

$10^{-3} m \leq \lambda \leq 10^{4} m$ أي $3.10^{5} Hz \leq f \leq 3.10^{11} Hz$

الموجات الضوئية تتميز بالتردد f وطول الموجة λ حيث:

$10^{-8} m \leq \lambda \leq 10^{-3} m$ أي $3.10^{11} Hz \leq f \leq 3.10^{16} Hz$

2: نقل المعلومات:

المعلومات التي يرغب في نقلها (صور، صوت ....) هي عبارة عن إشارات كهربائية تردداتها منخفضة يكون نقلها شبه مستحيل وذلك لتعرضها لعدة صعوبات منها:

- أبعاد الهوائي المستقبل لموجة معينة يقارب نصف طول الموجة المرسلة أي $L = \frac{\lambda}{2}$ وهذا مستحيل الحصول عليه في كل حالة.
- تتعرض الإشارات ذات الترددات المنخفضة إلى الخمود بالنسبة لمسافات طويلة.
- إرسال عدة إشارات في نفس الاتجاه، وفي نفس الوقت وبالتالي لا يمكن التمييز فيما بينها.

ولهذه الأسباب يتم تضمين الموجة الحاملة ذات الترددات المرتفعة $(f > 10^{5} Hz)$ وذلك لحمل الإشارة ذات التردد المنخفض.

3: الموجة الحاملة:

الموجة الحاملة عبارة عن توتر جيبي يكتب على الشكل:

$$P(t) = P_m \cos(2\pi F t + \varphi).$$

مع P_m (V) : الوسع

و F (Hz) : التردد

φ (rad) : الطور عند أصل التواريخ.

4-2- أنواع التضمين :

تضمين الموجة الحاملة يتجلى في تغيير وسعها أو ترددها أو طورها حسب الإشارة $s(t)$ التي تضم المعلومات.

- تضمين الوسع : حيث يتغير وسع الموجة الحاملة ويكونا F و φ ثابتين.

$$u(t) = U_m(t)\cos(2\pi F t + \varphi)$$

- تضمين التردد : حيث يتغير تردد الموجة الحاملة ويكونا U_m و φ ثابتين.

$$u(t) = U_m \cos(2\pi F(t)\cdot t + \varphi)$$

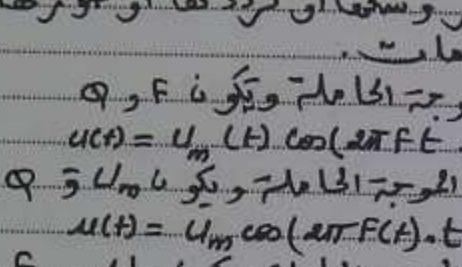
- تضمين الطور : حيث يتغير طور الموجة الحاملة ويكونا U_m و F ثابتين.

$$u(t) = U_m \cos(2\pi F t + \varphi(t))$$

ملاحظة : غالبا يتم استعمال التضمين بالوسع أو التضمين بالتردد.

II- تضمين الوسع :

1- الدارة المتكاملة المنجزة للجداء AD633 :



عند المدخل E_1 ندخل توتر الإشارة المضمِّنة ذات التردد المنخفض مع إضافة المركبة المستمرة U_0 حيث يسمى U_0 بتوتر الإزاحة فنحصل على التوتر $s(t)+U_0$ مع

$$s(t) = S_m \cos(2\pi f t)$$

عند المدخل E_2 يتم تركيب توتر الموجة الحاملة ذات التردد المرتفع حيث ترددها $F >> f$ ويعبر عنها بالتوتر الجيبي $P(t)$ حيث :

$$P(t) = P_m \cos(2\pi F t).$$

عند المخرج S نحصل على توتر الخروج حيث يسمى بالإشارة المضمَّنة $U_s(t)$ يعبر عنها كالتالي :

$$U_s(t) = k\,(s(t) + U_0)\cdot P(t)$$

إذن الدارة المتكاملة المنجزة للجداء AD633 هي تركيب إلكتروني يحول التوترين $(s(t)+U_0)$ و $P(t)$ إلى التوتر $U_s(t)$ وبالتالي الحصول على الإشارة مضمَّنة حيث تضيف ثابتة تميزها يرمز لها بـ k.

2- التوتر المضمَّن :

لدينا :

$$\begin{aligned} u_s(t) &= k\,(s(t) + U_0)\cdot P(t) \\ &= k\,(S_m \cos(2\pi f t) + U_0)\,P_m \cos(2\pi F t) \\ &= k P_m U_0 \left(1 + \frac{S_m}{U_0}\cos(2\pi f t)\right)\cdot \cos(2\pi F t). \end{aligned}$$

ملاحظة: للموجة المضمنة والموجة الحاملة نفس التردد إذن الوسع المضمن هو:

$$U_{sm}(t) = k P_m U_0 \left(1 + \frac{S_m}{U_0} \cos(2\pi f t)\right)$$

نضع $A = k P_m U_0$ ، $m = \frac{S_m}{U_0}$ إذن

$$U_{sm}(t) = A\left(1 + m \cos(2\pi f t)\right)$$

3: التمثيل الحديثي للوسع المضمن:

يكون الوسع المضمن قصوياً إذا كان $\cos(2\pi f t) = 1$ إذن.

$$U_{sm\,max} = A(1 + m)$$

يكون الوسع المضمن دنوياً إذا كان $\cos(2\pi f t) = -1$ إذن:

$$U_{sm\,min} = A(1 - m)$$

4: نسبة التضمين:

يعبر عن نسبة التضمين بالعلاقة: $m = \frac{S_m}{U_0}$.

ولدينا

$$U_{s\,max} - U_{s\,min} = 2Am$$

$$U_{s\,max} + U_{s\,min} = 2A$$

إذن:

$$m = \frac{U_{s\,max} - U_{s\,min}}{U_{s\,max} + U_{s\,min}}$$

5: جودة التضمين:

تتعلق جودة التضمين بإشارة $U_{s\,min}$:

- إذا كان $U_{s\,min} > 0$ فإن $m < 1$ ومنه $S_m < U_0$
  في هذه الحالة يكون التضمين جيداً.
- إذا كان $U_{s\,min} = 0$ فإن $m = 1$ ومنه $S_m = U_0$
  في هذه الحالة يسمى التضمين حرجاً.
- إذا كان $U_{s\,min} < 0$ فإن $m > 1$ ومنه $S_m > U_0$
  في هذه الحالة يكون التضمين رديئاً حيث تسمى الظاهرة بفوق التضمين.

ملاحظة: شروط الحصول على تضمين جيد هو استعمال موجة حاملة ذات تردد مرتفع جداً حيث $F \gg f$.

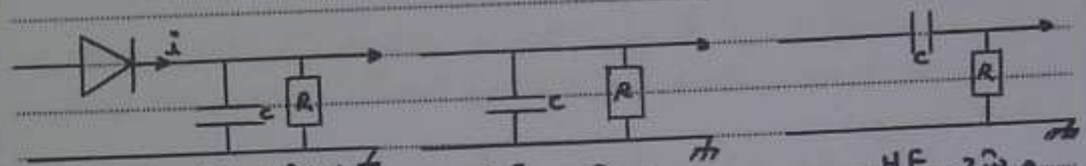
II: إزالة التضمين:

الهدف من إزالة التضمين هو استرجاع الإشارة المرسلة $s(t)$ ويمكن أن نقول أن إزالة التضمين هو العملية العكسية للتضمين حيث يتم من خلالها فصل الإشارة المضمنة والموجة الحاملة لهذا يستعمل تركيب خاص.

1 : تعريف المرشح :

- المرشح الممرر للتوترات العالية HF : يسمح بمرور الاشارات ذات الترددات المرتفعة HF ولا يسمح بمرور التوترات المستمرة.

- المرشح الممرر للتوترات المنخفضة BF : يسمح بمرور الاشارات ذات الترددات المنخفضة BF.



كاشف الغلاف — مرشح BF — مرشح HF

2 : مراحل إزالة التضمين :

المرحلة الاولى : إزالة التوترات السالبة بواسطة صمام ثنائي الموجود في دارة كاشف الغلاف.

المرحلة الثانية : الدارة RC المركبة على التوازي تقوم بإزالة الجزء المتبقي من الموجة الحاملة

ملاحظة : ينتج عن عملية شحن وتفريغ المكثف بكيفية سريعة جدا استرجاع قمم التوتر المضمن وبالتالي إزالة ما تبقى من الموجة الحاملة يشحن المكثف خلال نصف الدور $t = \frac{T_P}{2}$ وتفريغ يستلزم المدة $t = 5\tau = 5RC$ حيث لا يجد المكثف المدة اللازمة للتفريغ فتفاجئه عملية الشحن الموالية.

ملاحظة : للحصول على كشف غلاف جيد ينبغي أن تحقق ثابتة الزمن $\tau = RC$ للدارة RC المركبة على التوازي العلاقة التالية

$$T_P \ll \tau < T_S$$

T_P : دور الموجة الحاملة و T_S دور الاشارة المضمنة.

المرحلة الثالثة : إزالة المركبة المستمرة باستعمال الدارة RC المركبة على التوالي.

تمارين في تضمين الوسع

تمرين 1:

نطبق على مدخلي الدارة المتكاملة المجداء AD633 توترين جيبيين. $u_1(t)$ توتر الموجة الحاملة و $u_2(t)$ توتر الإشارة المضمِّنة فنحصل على توتر $s(t)$ تعبيره:

$$s(t)= k\left[0,5\cos(6,28.10^3 t)+0,7\right].\cos(6,28.10^4 t).$$

1: حدد f تردد الإشارة المضمِّنة و F تردد الموجة الحاملة.

2: أعط تعبير وسع التوتر المضمَّن $s(t)$ بدلالة الزمن.

3: حدد قيمة وسع $u_2(t)$ التوتر المضمِّن وقيمة المركبة المستمرة.

4: احسب قيمة نسبة التضمين، ماذا تستنتج؟

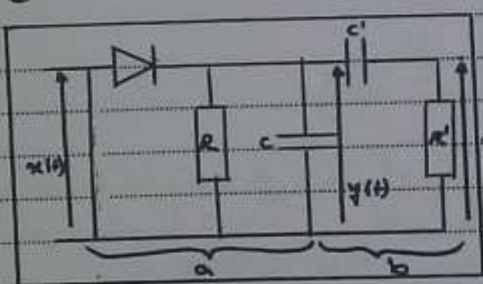
5: لإزالة التضمين نستعمل التركيب الممثل في الشكل 1 المكون من الجزئين a و b. انظر الشكل 1.

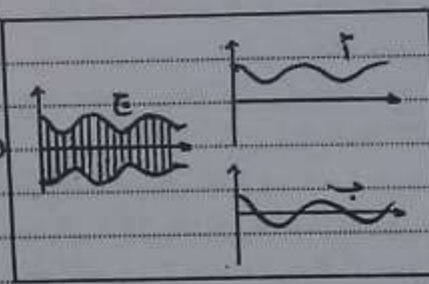
أ: ما هو دور الجزئين a و b.

ب: نستعمل موصل أومي مقاومته $R=100\Omega$ ومكثف سعته C من أجل كشف غلاف التوتر $s(t)$.

حدد قيم سعة المكثف التي تمكن من الحصول على كشف غلاف جيد.

ج: من بين منحنيات الشكل 2، حدد مع التعليل المنحنى الذي يوافق كل توتر من بين التوترات $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ الممثلة في الشكل 1.





تمرين 2:

خلال حصة أشغال تطبيقية أنجز تلاميذ القسم تركيب كهربائي لإرسال واستقبال إشارة كهربائية جيبية بواسطة هوائيين E_1 و E_2، حيث أن الهوائي E_1 يلعب دور الباعث والهوائي E_2 يلعب دور المستقبل.
لتحقيق هذا الهدف تم القيام بعملية تضمين الوسع أي تضمين إشارة كهربائية جيبية ذات تردد عال F_p تتكلف بنقل الإشارة المراد إرسالها

والتي تسمى بالموجة الحاملة.

I: عملية تضمين الوسع:

للقيام بعملية التضمين بالوسع أنجز التلاميذ التركيب الكهربائي التالي والذي يتكون من مركبة الكترونية تسمى بالدارة المتكاملة المنجزة للجداء.

نعطي: $u_1(t) = s(t) + U_0$ حيث $s(t)$ إشارة كهربائية جيبية تعتبر المعلومة المراد نقلها مع $s(t) = S_m \cos(2\pi f t)$،

الإشارة الحاملة: $P(t) = P_m \cos(2\pi F t)$.

بواسطة جهاز راسم التذبذب نعاين التوتر المضمن $u_s(t)$ عند مخرج الدارة المتكاملة المنجزة للجداء، حيث نلاحظ المنحنى الممثل في الشكل 2.

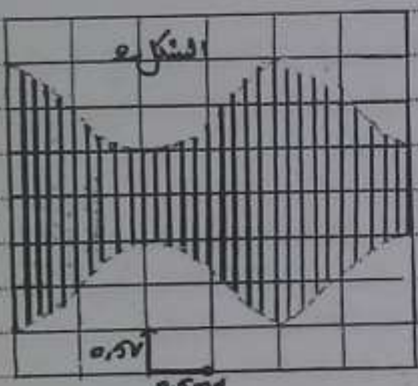
1: عند مخرج الدارة AD633 نحصل على التوتر $u_s(t) = k\, u_1(t).P(t)$ حيث k معامل التناسب يتعلق بالدارة AD633.

أ: من خلال معادلة الابعاد حدد بعد المعامل k.

ب: بين أن التوتر $u_s(t)$ يمكن أن يكتب على الشكل:

$$u_s(t) = U_m(t) \cos(2\pi F t)$$

حيث $U_m(t) = A(1 + m \cos(2\pi f t))$ محدداً تعبيري كل من A و m.



2: من خلال الشكل المحصل عليه في شاشة كاشف التذبذب حدد:

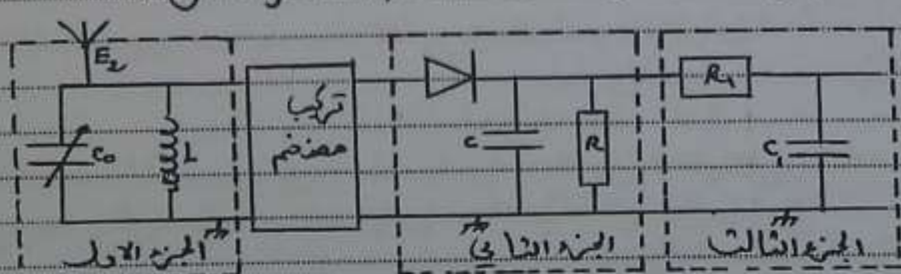
أ: قيمتي كل من الترددين f و F.

ب: القيمتين U_{smax} و U_{smin}.

ج: معامل التضمين m مع الاستنتاج.

II: عملية إزالة التضمين

بعيداً عن هذا التركيب تم تثبيت الهوائي المستقبل E_2 لالتقاط الإشارة المرسلة من طرف الهوائي E_1 حيث تم ربطه بدارة كهربائية مكونة من عدة أجزاء ذات وظائف مختلفة. أنظر الشكل 3.



1: يتكون الجزء الاول من وشيعة معامل تحريضها $L = 2{,}5\,mH$ ومكثف سعته C_0 قابلة للضبط، مركبين على التوازي.

أ: أعط تعبير التردد الخاص لهذه الدارة بدلالة L و C_0.

ب: حدد قيمة C_0 التي تمكن من انتقاء الاشارة المرسلة من طرف الهوائي E_2.

2: يحتوي الجزء الثاني على صمام ثنائي وموصل أومي مقاومته $R = 2\,k\Omega$ ومكثف سعته C.

أ: ما اسم هذا الجزء؟ وما هو دوره؟

ب: بين أن الجداء RC يدل على الزمن.

ج: ما هو الشرط الذي يجب أن يتحقق من أجل الحصول على إزالة تضمين جيد؟

د: من بين السعات التالية.

$10\,mF$ و $10\,\mu F$ و $100\,mF$ و $300\,\mu F$ و $500\,mF$ و $0{,}5\,\mu F$

حدد السعة C التي تحقق شرط الحصول على إزالة التضمين جيد.

3: ما هو دور الجزء الثالث.

تمرين 3:

نعطي: التوتر u_1 يوافق الموجة الحاملة $u_1(t) = P_m \cos(2\pi F t)$

التوتر u_2 يوافق الاشارة المراد ارسالها، اضافة الى المركبة المستمرة U_0: $u_2(t) = S_m \cos(2\pi f t) + U_0$

المركبة المستمرة $U_0 = 2{,}5\,V$ و المعامل $k = 0{,}132\ (S.I)$

التوتر u يوافق الاشارة المضمنة الوسع: $u(t) = k \cdot u_1(t) \cdot u_2(t)$

ليكن تعبير التوتر المضمن الوسع هو:

$u(t) = 0{,}167\left[25{,}2 + 13{,}9\cos(8{,}62 \cdot 10^4 t)\right] \cdot \cos(1{,}89 \cdot 10^6 t)$.

1: باستعمال معادلة الابعاد، أوجد وحدة المعامل k.

2: أحسب كلا من S_m و f على التوالي وسع وتردد الاشارة المراد ارسالها و P_m و F على التوالي وسع وتردد الموجة الحاملة.

3: حدد نسبة التضمين. ماذا تستنتج.

4: حدد قيمة $U_{s\,max}$ و $U_{s\,min}$ على التوالي القيمة القصوية والقيمة الدنوية للوسع المضمن.

5: بين أن التوتر $u(t)$ يساوي مجموع ثلاث دوال جيبية مختلفة التردد محدداً تردد كل منها.

6: أحسب Δf طيف الترددات.

7: أعط تعبير $u_3(t)$ التوتر المحصل عليه عند مخرج تركيب كاشف الغلاف.

8: استنتج تعبير التوتر الثاني المحصل عليه عند مخرج مرشح ممرر الترددات العالية.

تمرين 42

I : لإرسال موجة مضمّنة الوسع $u_s(t)$، نطبّق توترين جيبيين u_1 و u_2 على التوالي عند المدخلين E_1 و E_2 لدارة متكاملة منجزة للجداء، بحيث:

- التوتر $u_1(t)$ يوافق الموجة الحاملة: $u_1(t) = P_m \cos(2\pi F t)$
- التوتر $u_2(t)$ يوافق الإشارة المراد إرسالها، إضافة إلى المركبة المستمرة U_0 حيث: $u_2(t) = U_0 + S_m \cos(2\pi f t)$

1 : مثّل بتيانة التركيب الموافق لبث الموجة $u_s(t)$ عن الدارة AD633.

2 : عند مخرج الدارة S، نحصل على توتر مضمّن الوسع $u_s(t)$ حيث: $u_s(t) = k\,u_1(t).u_2(t)$ مع $k = 0{,}1\,V^{-1}$.

بيّن أن التوتر $u_s(t)$ يكتب على الشكل:

$$u_s(t) = A(1 + m\cos(2\pi f t))\cos(2\pi F t)$$

محددا تعبير كل من الثابتتين A و m.

3 : نعاين على شاشة راسم التذبذب، منحنى التوتر $u_s(t)$ عند مخرج الدارة حيث نلاحظ المنحنى الممثل في الشكل 1.

أ : عيّن مبيانيا كلا من T_1 دور الموجة الحاملة وترددها F.

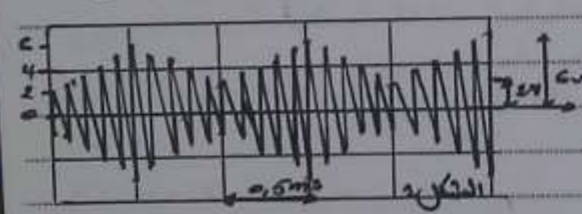
ب : عيّن مبيانيا كلا من T_2 دور الموجة المضمّنة وترددها f.

ج : عيّن القيمتين $U_{m\,max}$ و $U_{m\,min}$ للوسع المضمّن ثم حدد قيمة m. ماذا تستنتج.

4 : علما أن $S_m = 2V$ و أن $P_m = 6V$ أحسب قيمة كل من U_0 و A.

5 : بيّن أن التوتر $u_s(t)$ يمكن كتابته على شكل مجموع ثلاث دوال جيبية مختلفة التردد. ما قيمة طيف الترددات الخاص بهذه الحالة.

II : لاستقبال الموجة المحصل عليها سابقا $u_s(t)$، نستعمل التركيب الممثل في الشكل 2.



الشكل 1

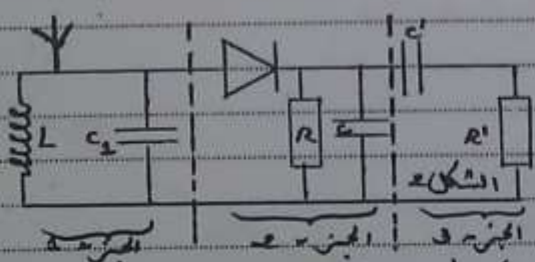
1 : أعط اسم كل من الجزء 1 والجزء 2 وحدد وظيفة كل منهما.

2 : أوجد قيمة C_1 سعة المكثف في الجزء 1، لكي يتم انتقاء الموجة $u_s(t)$، علما أن معامل تحريض الوشيعة $L = 10mH$.

3 : من بين القيم التالية:

$100k\Omega$; $500k\Omega$; $1000k\Omega$; $1500k\Omega$

حدد قيمة المقاومة R التي تحقق شرط الحصول على إزالة تضمين جيد. نعطي $C = 1\,nF$



الشكل 2

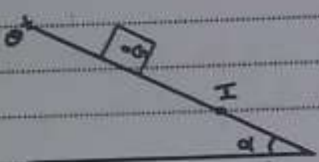
تمارين في الميكانيك

تمرين 1:

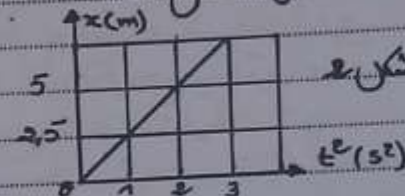
نطلق جسماً صلباً (S) كتلته $m=1kg$ فوق سطح مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوي الافقي من النقطة O بدون سرعة بدئية ليصل إلى النقطة I بسرعة v_I في اللحظة t_1. انظر الشكل 1.

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10\,m.s^{-2}$ و $OI=1m$.

مكنت الدراسة التجريبية من رسم المنحنى الممثل لتغيرات x بدلالة t^2 انظر الشكل 2.



الشكل 1



الشكل 2

1: باعتمادك على المنحنى الممثل في الشكل 2 أوجد تعبير x(t) ثم حدد طبيعة حركة الجسم (S).

2: أوجد تعبير السرعة v بدلالة الزمن ثم استنتج قيمة تسارع مركز عطالة الجسم.

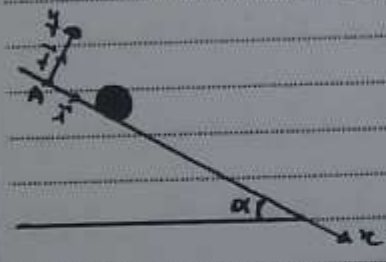
3: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) بين أن $a=g\sin\alpha$ ثم استنتج المقارنة بين الدراستين النظرية والتجريبية.

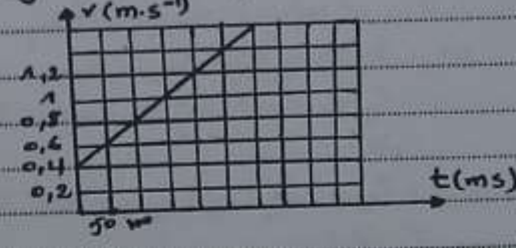
4: بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم (S) أوجد تعبير v_I بدلالة g و a و OI. أحسب v_I.

5: حدد لحظة وصول الجسم إلى الموضع I.

تمرين 2:

تتحرك كرية كتلتها $m=0,8kg$ على مسار مستقيمي طوله $AB=160cm$ مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوي الأفقي.





نطلق الكرية من الموضع A بسرعة بدئية v_A في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ. ونفرض حركة مركز قصور الكرية في المعلم الثابت $(A, \vec{i}, \vec{j})$ حيث A أصلا للأفاصيل. (أنظر الشكل 1). نعطي $g = 10 N.kg^{-1}$
يمثل منحنى الشكل 2 تغيرات سرعة الكرية بدلالة الزمن.

1. أ: باعتمادك على المنحنى الممثل في الشكل 2 حدد تعبير السرعة بدلالة الزمن.

ب: استنتج قيمة التسارع a_G. ما طبيعة حركة الكرية.

ج: حدد المعادلة الزمنية لحركة الكرية.

2. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

أ: حدد طبيعة تماس الكرية والمستوى المائل.

ب: أحسب R تأثير السطح المائل.

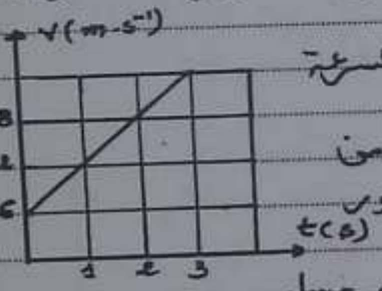
ج: أحسب k معامل الاحتكاك ثم استنتج φ زاوية الاحتكاك

3: بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم (S) أحسب سرعة الكرية عند الموضع B.

4: حدد لحظة وصول الجسم (S) إلى الموضع B.

تمرين 3:

نعتبر جسما نقطيا (S_1) في حركة مستقيمية وفق محور $x'x$ موجه في منحى الحركة.



يمثل المنحنى الممثل في الشكل جانبه تغيرات السرعة v للمتحرك (S_1) بدلالة الزمن. $v=f(t)$.

1: مبيانيا حدد تعبير السرعة بدلالة الزمن

2: احسب قيمة a_x تسارع مركز قصور الجسم (S_1). ما طبيعة حركته.

3: يتحرك جسم نقطي آخر (S_2) في نفس مسار حركة الجسم (S_1) وفي نفس المنحى بسرعة ثابتة $V_2 = 6 m.s^{-2}$
نعتبر أصل التواريخ $t=0$ اللحظة التي يتخذ فيها الجسمين (S_1) و(S_2) على التوالي الموضعين M_1 ذي الأفصول $x_{01}=0$ و M_2 ذي الأفصول $x_{02} = 1m$.

أ: ما طبيعة حركة الجسم (S_2) ثم أوجد المعادلة الزمنية $x_2(t)$ لحركة مركز قصوره.

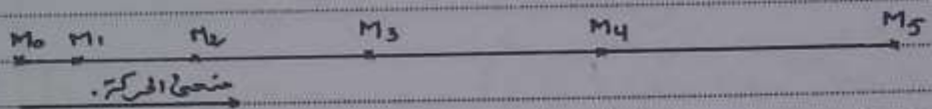
ب: أوجد المعادلة الزمنية $x_1(t)$ لحركة مركز قصور الجسم (S_1)

ج: أوجد قيمة t_R و x_R لحظة وأفصول إلتقاء الجسمين (S_1) و (S_2).

تمرين 14:

نطلق بدون سرعة ابتدائية جسما (S) كتلته m. فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة للمستوى الافقي. نعطي $m = 200g$

يمثل الشكل 1 أسفله تسجيل مواضع نقطة من الجسم (S) في مدد زمنية متتالية ومتساوية $\tau = 50ms$ ونعطي $g = 10 m.s^{-2}$



1: أحسب السرعة في الموضعين M_1 و M_2.

2: أحسب تسارع الجسم (S) ثم استنتج طبيعة حركة الجسم (S).

3: نختار معلما للفضاء (ox) أصله يطابق النقطة M_1 وموجه نحو منحى الحركة، ومعلما للزمن أصله يطابق النقطة M_2.

أ: أوجد المعادلة الزمنية $x = f(t)$ لحركة الجسم (S).

ب: أوجد تعبير $V = f(t)$. ثم أحسب لحظة وصول الجسم إلى الموضع A بالسرعة $V_A = 1,2 m.s^{-1}$.

ج: أحسب المسافة M_1A.

4: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن حركة الجسم (S) تتم باحتكاك.

5: أحسب K معامل الاحتكاك و φ زاوية الاحتكاك.

6: أوجد قيمة R تأثير المستوى المائل على الجسم (S).

تمرين 15:

نرسل رأسيا جسما صلبا (S) بسرعة بدئية قيمتها $V_0 = 7m.s^{-1}$.

نعتبر هنا السقوط حرا، وندرس في معلم غاليلي متعامد وممنظم $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{k})$ عمودي وموجه نحو الاسفل.

1: أجرد القوى الخارجية المطبقة على الجسم (S) مع تحديد القوى المهملة أمام وزن الجسم (S).

2: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن حدد قيمة a_z أنسوب تسارع G مركز قصور الجسم (S) على المحور $(O,\vec{k})$.

3: باعتبار $\vec{V_0}$ موجهة نحو الاسفل وأن $z_0 = 5m$ عند $t = 0$.

أ: أوجد تعبير $V_z(t)$ بدلالة الزمن.

ب: أوجد المعادلة الزمنية $z(t)$ بدلالة الزمن.

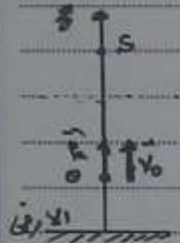
4: باعتبار $\vec{V_0}$ موجهة نحو الاعلى وأن $z_0 = 0$ عند $t = 0$.

أ: أوجد المعادلة الزمنية $z(t)$ في هذه الحالة.

ب: أوجد قيمة z_m الانسوب الموافق للارتفاع الاقصى لمركز قصور الجسم. نعطي $g = 10 m.s^{-2}$.

تمرين 6 :

من موضع O يوجد على ارتفاع h من سطح الأرض ، نرسل نحو الأعلى كرة (B) كتلتها m وبسرعة بدئية $V_0 = 4m.s^{-1}$. نهمل تأثير الهواء على الكرة ونأخذ $g = 10 m.s^{-2}$.



1 : أعط تعريف السقوط الحر في مجال الثقالة .

2 : بتطبيق القانون الثاني ، حدد مميزات متجهة تسارع G مركز قصور الكرة .

3 : نختار معلما غاليليا $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، حيث المتجهة $\vec{k}$ رأسية وموجهة نحو الأعلى . ونعتبر أصل التواريخ $t=0$ لحظة انطلاق الكرية من النقطة O أصل المعلم .

أ : أوجد تعبير السرعة V_G بدلالة الزمن .

ب : استنتج تعبير $z(t)$ أنسوب مركز القصور G على المحور الرأسي (Oz) .

ج : احسب التاريخ t_1 لحظة وصول G إلى قمة المسار S .

د : استنتج المسافة التي قطعها مركز قصور الجسم (S) بين اللحظتين $t=0$ و t_1 .

تمرين 7 :

تتكون سكة رأسية BCD من :

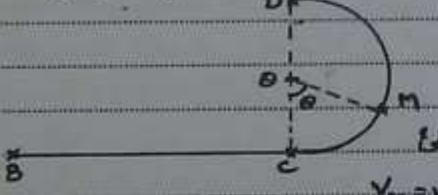
- جزء مستقيمي BC أفقي طوله $BC = 80cm$

- جزء CD عبارة عن نصف دائرة مركزها O وشعاعها $r = 30cm$.

نرسل جسما نقطيا (S) كتلته $m = 200g$ من النقطة B بسرعة $V_B = 2m.s^{-1}$. نعتبر أن قوة الاحتكاكات تبقى ثابتة طول الجزء BC شدتها f .

1 : باستعمال القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) خلال انتقاله من B إلى C ، أحسب الشدة f المكافئة لاحتكاكات علما أن $a = -2 m.s^{-2}$

2 : أحسب V_C سرعة مركز قصور الجسم في الموضع C بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية .



3 : يواصل الجسم (S) حركته على الجزء CD بدون احتكاك .

أ : بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم (S) بين أن $V_M = \sqrt{V_C^2 - 2gr(1-\cos\theta)}$

ب : أوجد تعبير شدة القوة $\vec{R}$ تأثير السكة CD على الجسم (S) في الموضع M بدلالة m و g و r و θ و V_C .

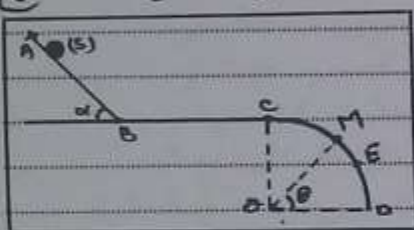
ج : ينفصل الجسم (s) عن السكة (CD) في النقطة M' عند الزاوية θ_{max} . حدد قيمة θ_{max} . نعطي $g = 10\ m.s^{-2}$.

تمرين 8 :

يتحرك جسم صلب (s) نعتبره نقطيا كتلته $m = 100g$ طول سكة ABCD المكونة من : الجزء AB مستقيمي طوله $AB = 1,5m$ مائل بزاوية $\alpha = 30°$ عن الخط الافقي والجزء BC أفقي والجزء CD دائري على شكل ربع دائرة مركزها O وشعاعها $r = 1m$. أنظر الشكل.

ينطلق الجسم (s) من الموضع A بدون سرعة بدئية.

أعطت الدراسة التجريبية لحركة الجسم (s) على الجزء AB قيمة التسارع $a = 3m.s^{-2}$. نعطي $g = 10 N.kg^{-1}$



1 : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن حركة (s) تتم باحتكاكات على الجزء AB

2 : أحسب شدة القوة f المكافئة للاحتكاكات .

3 : أوجد تعبير V_B بدلالة m و g و a و f و AB ثم أحسب V_B .

4 : يتابع الجسم (s) حركته على الجزء BCD بدون احتكاكات .

أ : ما قيمة V_C سرعة الجسم (s) عند النقطة C .

ب : استنتج طبيعة حركة الجسم (s) على الجزء BC .

5 : بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم (s) أوجد تعبير السرعة V_M عند الموضع M بدلالة V_B و g و r و θ .

6 : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أوجد تعبير R بدلالة m و g و r و θ و V_B عند الموضع M (R تأثير السكة CD على الجسم (s)).

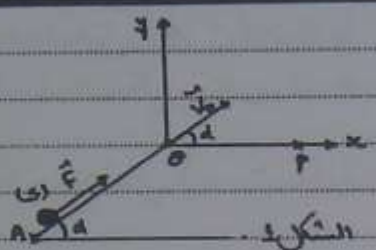
7 : ما قيمة الزاوية θ الموضع E حيث ينفصل الجسم (s) عن السكة حيث $\theta = (\widehat{\vec{OD}, \vec{OE}})$.

تمرين 9 :

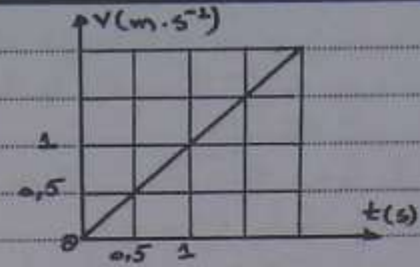
نعتبر جسما صلبا (s) كتلته $m = 200g$ قابل للانزلاق فوق سكة AO مستقيمية طولها $l = AO = 2m$ ومائلة بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الافقي.

عند أصل التواريخ $t_0 = 0$ نطبق ابتداءا من النقطة A على الجسم (s) قوة متجهتها $\vec{F}$ متوازية مع السكة AO وشدتها ثابتة $F = 1,5N$ ، كما يمثل الشكل 1 ، فيصعد الجسم ليصل إلى الموضع O بسرعة V_O .

يعطي المبيان الممثل في الشكل 2 ، تغيرات V متجهة سرعة G مركز قصور الجسم بدلالة الزمن على المحور AO . نأخذ $g = 9,8 m.s^{-2}$.



الشكل 1.



1: حدد مع التعليل، طبيعة حركة مركز قصور الجسم (S) على الجزء AO، ثم بيّن قيمة تسارع مركز قصور الجسم (S).

2: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أثبت أن تعبير شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ التي نعتبرها ثابتة خلال الحركة وموازية لـ AO هو: $f = F - m(g\sin\alpha + a)$ ثم أحسب قيمة f.

3: يصل الجسم (S) عند الموضع O في اللحظة $t_0 = 2s$. أحسب V_0 سرعة مركز قصور الجسم (S) في الموضع O.

4: يغادر الجسم (S) السكة عند الموضع O بسرعة V_0 في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ الجديدة.

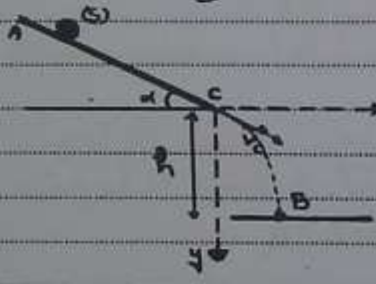
أ: أوجد المعادلتين الزمنيتين $x=f(t)$ و $y=g(t)$ لحركة مركز القصور G.

ب: أثبت أن تعبير معادلة المسار هو: $y(x) = -4{,}9x^2 + 1{,}37x$ ثم حدد طبيعة المسار.

ج: أحسب المسافة OP.

تمرين 14

عند اللحظة $t=0s$ ينزلق جسما صلبا (S) كتلته $m=10kg$ من النقطة A بدون سرعة ابتدائية، على مستوٍ مائل بزاوية $\alpha=30°$ ليصل إلى النقطة C عند اللحظة $t_1=0{,}8s$. ونأخذ $g=10m.s^{-2}$. نهمل جميع الاحتكاكات ونعتبر النقطة A أصلا للتواريخ والفواصل.



1: بيّن بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أن التسارع على المستوي المائل AC هو: $a = g\sin\alpha$ ثم أحسب قيمته.

2: أوجد تعبير السرعة بدلالة الزمن ثم أحسب V_C.

3: أوجد المعادلة الزمنية $x(t)$ ثم أحسب المسافة AC.

4: يغادر الجسم الصلب السكة AC عند النقطة C بسرعة $\vec{V}_C$

تشكل زاوية α مع المحور (Cx) ليسقط في النقطة B أرتوبها $y_B = 1,25m$
ندرس حركة الجسم (S) في المعلم $(C.x.y)$ ونعتبر النقطة C أصلاً جديداً للتواريخ.

أ: أوجد المعادلات الزمنية لإحداثيات مركز العطالة الجسم في المعلم $(C.x.y)$.

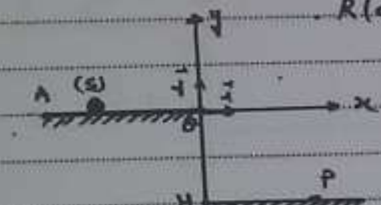
ب: استنتج معادلة المسار لمركز عطالة الجسم (S).

ج: أوجد إحداثيات نقطة السقوط B.

د: أحسب V_x و V_y إحداثيات السرعة $\vec{V}$ عند الموضع B ثم استنتج قيمة V_B.

تمرين 11:

نرسل جسما نقطيا (S) كتلته $m=100g$ عند اللحظة $t=0$ من الموضع A بسرعة بدئية $V_A = 3\,m.s^{-1}$ فينزلق باحتكاك على مسار أفقي AO، ليمر من النقطة O أصل المعلم $R(O.\vec{i}.\vec{j})$.



المعادلة الزمنية لحركة الجسم على المسار AO هي $x(t) = -t^2 + 3t - 2$.

1: أحسب a تسارع حركة الجسم (S). واستنتج طبيعة هذه الحركة.

2: أوجد التاريخ t_1 لحظة مرور الجسم (S) من النقطة O علماً أن سرعته في هذه النقطة O هي $V_O = 1\,m.s^{-1}$.

3: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أوجد تعبير f شدة قوة الاحتكاكات التي نعتبرها ثابتة. ثم أحسب قيمتها.

4: يغادر الجسم (S) المسار (AO) عند النقطة O بسرعة V_O لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ من جديد.

أ: أوجد التعبيرين العدديين للمعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$ لحركة الجسم (S).

ب: أثبت معادلة مسار حركة الجسم (S).

ج: يصل الجسم (S) إلى النقطة P أفصولها $x_P = 40cm$ عند اللحظة t_P. أحسب t_P و المسافة OH.

د: أحسب المعامل $k = \tan\beta$ مع β هي الزاوية التي تكونها السرعة V_P مع الخط الأفقي المار من النقطتين H و P $\beta = (\widehat{\vec{V}_P , \vec{HP}})$

ج: أحسب منظم السرعة V_P.

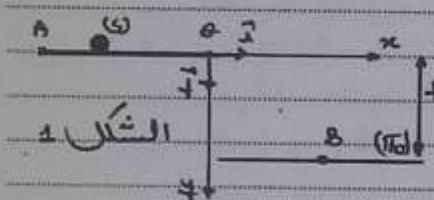
تمرين 12 :

نهمل تأثيرات الهواء ونأخذ $g = 10\,m.s^{-2}$.

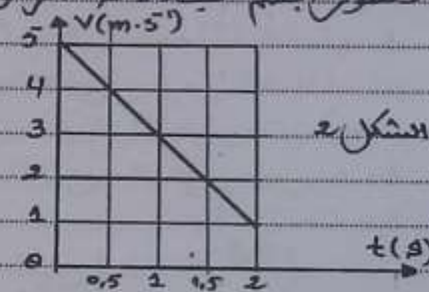
نعتبر جسما صلبا نقطيا (S) مركز قصوره G وكتلته $m = 100g$، ينزلق فوق سكة أفقية (AO)، ويغادرها عند الموضع O أصل المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ فيسقط تحت تأثير وزنه فقط عند النقطة B تنتمي إلى مستوى أفقي (π_0) حيث الارتفاع $h = 0,5m$. أنظر الشكل 1.

عند لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ $t_0 = 0s$ من النقطة A نرسل الجسم (S) بسرعة أفقية v_A، فينزلق فوق السكة (AO) باحتكاك تأثيره مكافئ لقوة $\vec{f}$ ثابتة وأفقية ومنحاها معاكس لمنحى الحركة.

يعطي المنحنى الممثل في الشكل 2، تغيرات v سرعة مركز قصور الجسم بدلالة الزمن بين الموضعين A و O.



الشكل 1



الشكل 2

1 : باعتمادك على المنحنى الممثل في الشكل 2 حدد :

أ : تعبير السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن.

ب : طبيعة حركة الجسم (S) فوق السكة الأفقية (AO).

ج : تسارع مركز قصور الجسم.

2 : أ : أوجد المعادلة الزمنية $x(t)$ التي تحققها أفصول الجسم (S) فوق السكة (AO) (نعتبر A أصلا للأفاصيل).

ب : أحسب المسافة AO بين الموضعين A و O علما أن لحظة وصول الجسم (S) إلى الموضع O هي $t_1 = 2s$

ج : أحسب v_O سرعة مركز قصور الجسم (S) عند الموضع O.

3 : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أحسب قيمة f شدة قوة الاحتكاك.

4 : عند لحظة نعتبرها أصلا جديدا للتواريخ $t = 0$ يغادر الجسم (S) السكة الأفقية بسرعة v_O.

أ : أوجد التعبير $y = f(x^2)$. ما طبيعة الدالة y.

ب : حدد قيمة t_B لحظة وصول G إلى النقطة B.

ج : أحسب v_B بطريقتين مختلفتين.

تمرين 13:

عند اللحظة $t=0$ تسقط قطرة ماء كروية الشكل شعاعها $R=25\,\mu m$ بدون سرعة بدئية، حيث تخضع خلال سقوطها إلى قوة احتكاك تعبيرها $\vec{f}=-k\vec{v}$ حيث k ثابتة.

نعطي الكتلة الحجمية للماء: $\rho_{eau}=10^{3}\,kg.m^{-3}$

الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_{air}=1{,}3\,kg.m^{-3}$

1: بين أن $\vec{F}_A$ دافعة أرخميدس مهملة أمام $\vec{P}$ وزن القطرة علما أن حجم كرة هو $V=\frac{4}{3}\pi R^{3}$.

2: بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v تكتب على الشكل: $\frac{dv}{dt}=B-Av$ محددا تعبير كل من A و B.

3: باستعمال معادلة الأبعاد حدد بعد كل من A و B.

4: ما العلاقة بين وزن القطرة وقوة الاحتكاك، عندما يصل مركز قصور القطرة إلى مرحلة النظام الدائم.

5: عبر عن v_{lim} السرعة الحدية بدلالة k و g و m.

6: تحقق أن: $v(t)=v_{lim}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ حل المعادلة التفاضلية.

7: أوجد قيمة الثابتة k علما أن $v_{lim}=7{,}56\,cm.s^{-1}$.

تمرين 14:

تسقط قطرة ماء كروية الشكل وشعاعها $r=1\,mm$ بدون سرعة بدئية، من النقطة O توجد على ارتفاع $h=1000\,m$ عن الأرض.

نعتبر لحظة بداية حركة القطرة أصلا للتواريخ والنقطة O أصلا للمحور (Oz) الموجه نحو الأسفل.

1: نعتبر أن القطرة تخضع لقوة واحدة هي وزنها. أوجد معادلتها الزمنية $z(t)$.

2: أحسب لحظة وصول القطرة إلى الأرض ثم أحسب سرعتها لحظة وصولها إلى سطح الأرض. هل تبدو هذه القيمة ممكنة؟

3: في الواقع تصل القطرة إلى سطح الأرض بسرعة $v_s=10\,m.s^{-1}$. فسر الفرق بين هذه القيمة وتلك المحصل عليها في السؤال السابق؟

4: أ: أعط تعبير شدة قوة دافعة أرخميدس المسلطة على القطرة، ثم أحسب قيمتها.

ب: قارن بين هذه الشدة الخاصة بدافعة أرخميدس وشدة وزن القطرة ماذا تستنتج؟

ك: ننمذج قوة الاحتكاك المسلطة على القطرة بقوة وحيدة عبرها $\vec{f} = -k \cdot r \cdot \vec{v}$ حيث k معامل ينبغي تحديده و r شعاع القطرة و $\vec{v}$ متجه سرعة القطرة.

أ: أثبت المعادلة التفاضلية لحركة القطرة.

ب: حدد تعبير السرعة الحدية بدلالة المعطيات.

ج: أحسب قيمة المعامل k و الزمن المميز للحركة τ.

نعطي: $v_l = 10 m.s^{-1}$ و $g = 9,8 m.s^{-2}$.

الكتلة الحجمية للماء: $\rho_{eau} = 10^3 kg.m^{-3}$

الكتلة الحجمية للهواء: $\rho_{air} = 1,2 kg.m^{-3}$

تمرين 15:

يتألف الضباب من قطرات دقيقة جداً من الماء، ويتكون الضباب عندما يلتقي الهواء الرطب بمنطقة باردة، فيصبح الهواء مشبعاً ببخار الماء الذي يتكثف على شكل قطرات صغيرة عالقة في الهواء.

نعتبر القطرة التي تشكلت خلال هذا التكاثف بالقرب من الارض صغيرة جداً، وكروية الشكل حجمها V وتقع على علو h من سطح الارض او توجد في مجال الثقالة المنتظم شدته $g = 9,8 m.s^{-2}$.

عند أصل التواريخ $t=0$، نفترض أن القطرة تنطلق من O بسرعة بدئية، من نقطة O أصل معلم الفضاء $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المكون من محور رأسي (OZ) موجه نحو الاسفل.

نعطي: $\rho_{eau} = 10^3 kg.m^{-3}$ و $\rho_{air} = 1,3 kg.m^{-3}$

كتلة القطرة $m = 5,4.10^{-6} g$.

تسمح الملاحظة الدقيقة للضباب بالقرب من سطح الارض بتقدير السرعة الحدية v_l لقطرات الماء.

لدراسة الحركة في الظروف الحقيقية، نهتم بكل القوى المؤثرة على قطرة من الضباب.

1: أ: أعط تعبير F_a شدة دافعة أرخميدس المطبقة على القطرة بدلالة حجمها V و g و ρ_{air}.

ب: أعط تعبير P شدة وزن القطرة بدلالة حجمها V و g و ρ_{eau}

ثم قارنها مع F_a. ماذا تستنتج؟

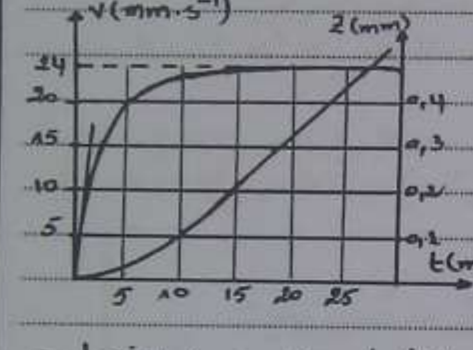
3: نعتبر وجود قوة الاحتكاك المائع $\vec{f}$ مطبقة على القطرة خلال حركتها حيث $\vec{f} = -\lambda v \vec{k}$ مع λ ثابتة.

أ: أثبت أن المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة القطرة تكتب على الشكل:
$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = A$$
مع تحديد تعبير A و τ.

ب: احسب a_0 التسارع البدئي في الحركة القطرة.

ج: اوجد تعبير السرعة الحدية v_ℓ لمركز قصور القطرة بدلالة m و g و λ.

4: مكنت دراسة تجريبية من قياس سرعة القطرة v وانسوبها z بدلالة الزمن، ودونت النتائج الممثلة في الشكل جانبه.



أ: عين بيانيا قيمة السرعة الحدية v_ℓ لحركة القطرة.

ب: باستعمال معادلة الابعاد حدد وحدة الثابتة λ. ثم حدد قيمتها.

تمرين 16:

عند اللحظة $t=0$ نحرر كرية من الالومنيوم شعاعها $R=17mm$ من النقطة O بدون سرعة بدئية في اناء به ماء.

نعطي: الكتلة الحجمية للماء: $\rho_{eau}=10^3 kg.m^{-3}$

كثافة الالومنيوم بالنسبة للماء هي

$d_{AL}=2,7$

ننمذج قوة احتكاك المائع بقوة تعبيرها $f = k v^2$ مع $k=0,22\pi\rho_{eau}R^2$ ؛ R شعاع الكرية.

نعطي $g=10\,m.s^{-2}$ شدة الثقالة.

1: أجرد القوى المطبقة على الكرية ومثلها بدون سلم.

2: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الكرية تكتب على الشكل:

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^2$$

حدد تعبير كل من A و B.

3: باستعمال معادلة الابعاد حدد بعد كل من A و B.

4: أحسب A و B.

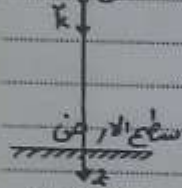
5: أحسب v_{lim} السرعة الحدية للكرية.

6: تخضع حركة مركز قصور الكرية عند اللحظة $t=0,4s$ إلى النظام الدائم.

باستعمال طريقة أولير أحسب السرعة والتسارع عند اللحظة $t=0,4s$ علما أن خطوة الحساب هي $\Delta t=0,1s$.

تمرين 17

على ارتفاع كبير جدا من سطح الارض، حيث درجة الحرارة تناهز $\theta \simeq -50°C$ تتكون حبات البرد وسط ركام مكثف من السحب. تنفصل حبة البرد عندما لم تعد مرتبطة بالسحاب، فتسقط رأسيا وقد تصل سرعتها أحيانا إلى $v \simeq 45\,m.s^{-1}$ عند وصولها إلى سطح الارض.
نعتبر حبة برد كتلتها $m = 15\,g$ وتوجد على علو $h = 1,5.10^{3}\,m$ من سطح الارض.
عند أصل التواريخ $t=0$، تنطلق حبة البرد بدون سرعة بدئية $(v_0 = 0)$ من نقطة O أصل المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث المحور (Oz) عموديا موجه نحو الاسفل.



I: دراسة السقوط الحر لحبة البرد.

1: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد تعبير وقيمة التسارع a_G لمركز قصور حبة البرد.

2: أثبت أن تعبير سرعة حبة البرد عند لحظة t هو $v = \sqrt{2gz}$، حيث z يمثل أنسوب مركز قصور حبة البرد عند اللحظة t.

3: أحسب قيمة السرعة عندما تصل حبة البرد إلى سطح الارض.

4: علل عدم موافقة قيمة السرعة المحصل عليها مع القيمة المذكورة سلفا $v \simeq 45\,m.s^{-1}$.

II: دراسة السقوط الحقيقي لحبة البرد:
في الواقع تخضع حبة البرد إلى قوة الاحتكاك $\vec{f}$، تتناسب شدتها مع مربع السرعة وفق العلاقة $f = \lambda v^2$ مع λ ثابتة قيمتها: $\lambda = 2,34.10^{-4}\,(S.I)$. نهمل دافعة أرخميدس.

1: أثبت باستعمال القانون الثاني لنيوتن أن المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة حبة البرد تكتب على الشكل:

$$\frac{dv}{dt} = 9,80 - A.v^2$$

2: ما هي وحدة الثابتة A وما هي قيمتها.

3: استنتج قيمة السرعة الحدية v_ℓ والتسارع البدئي a_0 والثابتة الزمنية المميزة لهذه الحركة.

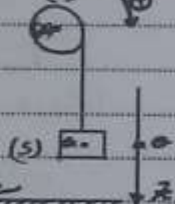
4: نسمح طريقة أولير بتحديد سرعة حبة البرد بدلالة الزمن حسابيا.
أتمم الجدول أسفله. علما أن قيمة خطوة الحساب هي $\Delta t = 0,5\,s$

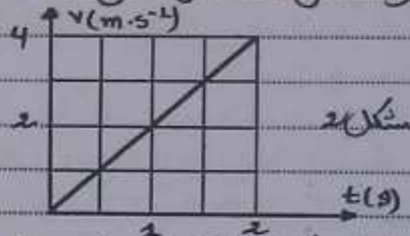
$t(s)$ التاريخ	$t_0 = 0$	$t_1 = 0,5$	$t_2 = 1$	$t_3 = 1,5$
$v_i(m.s^{-1})$ السرعة	0	v_1	v_2	$13,8$
$a_i(m.s^{-2})$ التسارع	$9,8$	a_1	$8,36$	a_3

تمرين 218

نعتبر اسطوانة متجانسة (C) شعاعها $r = 10cm$ ، وعزم عطالتها $J_\Delta = 10^{-3}\,kg.m^2$ قابلة للدوران باحتكاك حول محور (Δ) ثابت وأفقي يمر بمركزها. نلف حول الاسطوانة خيطا غير قابل للامتداد وكتلته مهملة، ويحمل في طرفه الآخر جسما صلبا (S) كتلته $m = 100\,g$ ، يوجد مركز عطالته G عند أصل المعلم $(o, \vec{k})$ حيث المحور (oz) رأسي وموجه نحو الأسفل. أنظر الشكل 1. نأخذ $g = 10\,m.s^{-2}$

الشكل 1





الشكل 2

في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ $t = 0$ نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية. مكنت الدراسة التجريبية لحركة (S) من تخطيط المنحنى الممثل في الشكل 2، الذي يمثل تغيرات سرعة G مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن t.

1- باعتمادك على الشكل 2، عين مبيانيا قيمة a تسارع G مركز عطالة الجسم (S)، واستنتج طبيعة حركة الجسم (S).

2- تحقق أن شدة القوة $\vec{T}$ التي يطبقها الخيط على الجسم (S) خلال حركته هي $T = 0{,}8\,N$.

3- بتطبيق العلاقة الأساسية الديناميك على الاسطوانة، احسب عزم مزدوجة الاحتكاك M_f الذي نعتبره ثابتا.

4- يصل الجسم (S) إلى الأرض عند اللحظة $t_1 = 2s$ وعندها ينفلت الخيط وينعدم تأثيره على الاسطوانة التي تستمر في الدوران إلى أن تتوقف عند اللحظة t_2.

أ: احسب المسافة d التي قطعها الجسم (S) بين اللحظتين t_0 و t_1.

ب: عين قيمة v_1 سرعة الجسم (S) عند اللحظة t_1، ثم استنتج السرعة الزاوية $\dot{\theta}_1$ للاسطوانة عند نفس اللحظة.

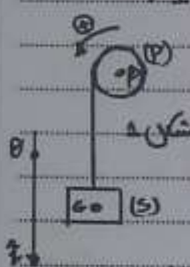
ج: احسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للاسطوانة خلال المرحلة الجديدة، وذلك بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك. واستنتج طبيعة حركتها.

د: بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الاسطوانة أحسب n عدد الدورات التي أنجزتها الاسطوانة بين اللحظتين t_1 و t_2

تمرين 219

نعتبر بكرة (P) متجانسة شعاعها $r=10cm$ وعزم قصورها $J_\Delta=10^{-2}\,kg.m^2$ قابلة للدوران باحتكاك حول محور (Δ) ثابتا وأفقي يمر من مركزها. نلف حول الاسطوانة خيطا غير قابل للامتداد وكتلته مهملة، ويحمل في طرفه الآخر جسما صلبا (S) كتلته $m=200g$.

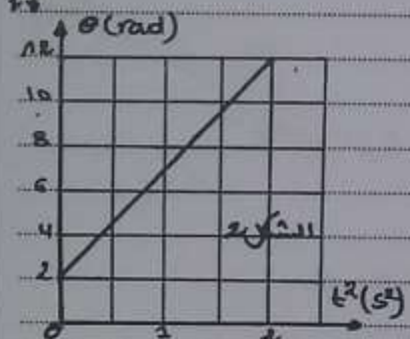
نعلم موضع G مركز قصور الجسم (S) بالأنسوب z في المعلم $(O,\vec{k})$ حيث المحور Oz عموديا وموجه نحو الأسفل. أنظر الشكل 1.



الشكل 1

في اللحظة $t=0$، نحرر المجموعة {البكرة، الجسم (S)} بدون سرعة بدئية.

مكنت الدراسة التجريبية لحركة البكرة (P) من تخطيط المنحنى الممثل في الشكل 2، الذي يمثل تغيرات الأفصول الزاوي θ لحركة البكرة (P) بدلالة t^2 مربع الزمن. أنظر الشكل 2.



الشكل 2

1: بين مبيانيا، المعادلة الزمنية $\theta=f(t)$ لحركة البكرة.

2: تحقق أن قيمة التسارع الزاوي للبكرة هي $\ddot{\theta}=10\,rad.s^{-2}$ واستنتج طبيعة حركة البكرة.

3: استنتج المعادلة الزمنية $z=h(t)$ لحركة G مركز قصور الجسم (S).

4: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S)، أحسب T شدة توتر الخيط.

5: بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على البكرة، أوجد تعبير وقيمة M_f عزم مزدوجة قوى الاحتكاكات الذي نعتبره ثابتا خلال دوران البكرة.

6: عند اللحظة $t_1=2s$، ينقطع الخيط فتواصل البكرة دورانها إلى أن تتوقف عند اللحظة t_2.

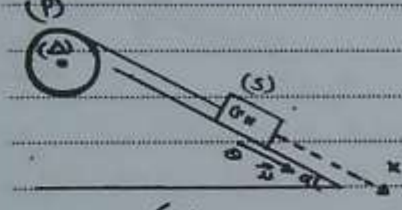
أ: أحسب السرعة الزاوية للبكرة عند اللحظة t_1.

ب: بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على البكرة (P) أوجد تعبير وقيمة التسارع الزاوي الجديد للبكرة. ما طبيعة حركتها.

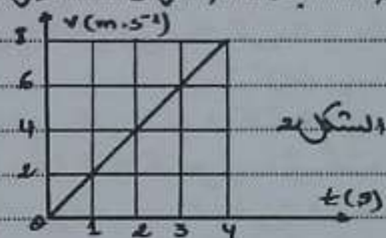
ج: بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة (P) أوجد عدد الدورات n التي أنجزتها البكرة بين اللحظتين t_1 و t_2.

تمرين 20

نعتبر بكرة متجانسة (P) شعاعها $r = 5\,cm$ قابلة للدوران حول محور (Δ) ثابت وأفقي يمر من مركزها وعزم قصورها بالنسبة لهذا المحور هو J_Δ (نعتبر الاحتكاكات مهملة بين البكرة والمحور (Δ)).
نلف على مجرى البكرة خيطا غير مدود وكتلته مهملة، ولا ينزلق على مجرى البكرة، نربط بطرفه الحر جسم صلب (S) كتلته $m = 0,2\,kg$ قابل للانزلاق، بدون احتكاك، فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي أنظر الشكل 1.
نحرر الجسم (S) بدون سرعة بدئية حيث يكون مركز قصوره G منطبقا مع أصل المعلم $(O, \vec{i})$.
مكنت الدراسة التجريبية لحركة الجسم (S) من تخطيط منحنى تغيرات السرعة v بدلالة الزمن. أنظر الشكل 2.



الشكل 1



الشكل 2

1. باعتمادك على المنحنى الممثل في الشكل 2 حدد:
أ. تعبير السرعة v بدلالة الزمن
ب. طبيعة حركة الجسم (S).
ج. قيمة تسارع مركز قصور الجسم (S) والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للبكرة (P).

2. توجد نقطة B على مسار الجسم (S) حيث $OB = 50\,cm$.
أ: بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم (S) بين أن $V_B = \sqrt{2}\,m.s^{-1}$
ب: حدد اللحظة t_B حيث يصل الجسم إلى الموضع B.

3. باعتمادك على القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) أوجد تعبير T توتر الخيط بدلالة m و g و α و a.

4. بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على البكرة (P) بين أن تعبير J_Δ يكتب على الشكل التالي: $J_\Delta = mr^2\left(\frac{g\sin(\alpha)}{a} - 1\right)$
ثم أحسب قيمته. نعطي $g = 10\,m.s^{-2}$.

5. عند اللحظة t_B ينفلت الخيط من البكرة التي تتوقف، نتيجة تأثير مزدوجة الاحتكاك M_c، بعد إنجازها $n = 10$ دورات.
أحسب M_c.

تمرين 221

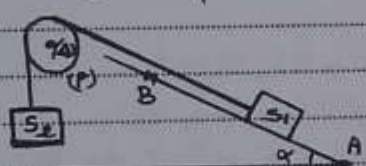
نعتبر المجموعة الممثلة في الشكل أسفله والمكونة من :

S_1 : جسم صلب كتلته $m=200g$ يمكنه الانزلاق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ على المستوى الافقي .

P : بكرة متجانسة شعاعها $r=5cm$ ، قابلة للدوران بدون احتكاك حول محورها الثابت (Δ) وعزم قصورها بالنسبة لـ (Δ) هو J_Δ .

S_2 : جسم صلب كتلته $m_2=m_1$ مرتبط بالجسم (S_1) بواسطة خيط غير قابل للامتداد وكتلته مهملة ولا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة .

في اللحظة $t=0$ نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية فينطلق الجسم (S_1) من النقطة A نحو الاعلى بحركة مستقيمية متسارعة بانتظام تسارعها $a=2,4m.s^{-2}$. نعطي $g=10m.s^{-2}$.



1 : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أحسب شدة القوة المقرونة بتأثير الخيط على الجسم (S_1)

2 : في اللحظة t_1 يصل الجسم (S_1) الى النقطة B بسرعة $V_B=1,2m.s^{-1}$.
بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم (S_1) بين اللحظتين $t=0$ و t_1 أحسب قيمة المسافة AB .

3 : أ : أوجد تعبير السرعة بدلالة الزمن .
ب : أحسب t_1 لحظة وصول الجسم (S_1) الى الموضع B .

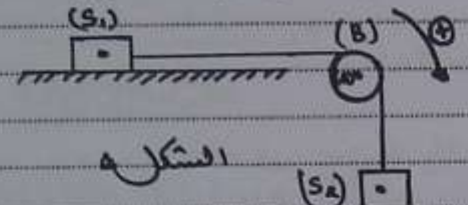
4 : أ : بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك على البكرة وقانون الثاني لنيوتن على الجسمين (S_1) و (S_2) أوجد تعبير J_Δ .
ب : أحسب قيمته .

5 : في اللحظة t_1 ينفلت الخيط من البكرة فتنجز n دورة قبل توقفها وذلك تحت تأثير احتكاكات عزمها ثابت M_c .
أ : بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أحسب M_c عزم مزدوجة الاحتكاكات علما أن $n=6,5tr$.
ب : بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك على البكرة أحسب التسارع الزاوي الجديد لحركة البكرة . ما طبيعة حركتها .

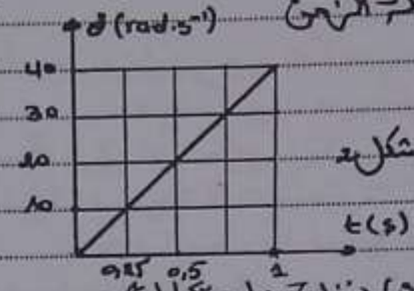
تمرين 222

نعتبر جسما صلبا (S_1) كتلته $m_1=1kg$ قابل للانزلاق على سكة أفقية .
الجسم (S_1) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير قابل للامتداد وكتلته مهملة يمر في مجرى بكرة متجانسة (B) شعاعها $r=4cm$ ، قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها . الشكل 1 .

خلال الحركة لا ينزلق الخيط على مجرى البكرة (B).
نسمي J_Δ عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور (Δ).
نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية عند لحظة نعتبرها مبدأ للتواريخ.
يمثل المنحنى الممثل في الشكل 2 تغيرات السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للبكرة (B) بدلالة الزمن



الشكل 1



الشكل 2

الجسم (S_1) ينزلق باحتكاك.

1: أوجد بيانيا معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$ بدلالة الزمن.

2: استنتج معللا جوابك طبيعة حركة البكرة (B) والجسم (S_1).

3: أوجد تعبير n عدد الدورات التي أنجزتها البكرة بدلالة t و $\ddot{\theta}$، ثم أحسب n عند التاريخ $t_1 = 1,25\,s$.

4: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S_1) أوجد تعبير T_1 توتر الخيط بدلالة m_1 و g و a_1 و k معامل الاحتكاك.

5: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S_2) أوجد تعبير T_2 بدلالة m_2 و g و a_2.

6: بين أن $a_1 = a_2$ معللا جوابك.

7: بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك على البكرة بين أن

$$a = \frac{(m_2 - m_1 k)\,g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

8: أحسب J_Δ. نعطي $k = 0,16$ و $m_2 = 500\,g$.

9: عند اللحظة t_1 نكبح البكرة بواسطة عزم مزدوجة مقاومة M_f ثابتة، فتتوقف البكرة بعد انجازها n_2 دورة.

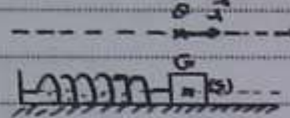
أ: أحسب $\dot{\theta}$ السرعة الزاوية للبكرة في اللحظة t_1.

ب: علما أن $n = 12,6$ دورة، أوجد تعبير وقيمة M_f عزم المزدوجة المقاومة للكبح بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية.

ج: بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك والقانون الثاني لنيوتن على الجسمين (S_1) و (S_2) أحسب التسارع الزاوي الجديد للبكرة (B). ما طبيعة حركتها.

تمرين 23:

نعتبر نابضا أفقيا ذا لفات غير متصلة وكتلته مهملة وثابتة صلابته $k=40N.m^{-1}$. نثبت أحد طرفيه بحامل، وطرفه الثاني بجسم صلب (S) كتلته $m=0,1kg$، وقابل للانزلاق بدون احتكاك على مستوٍ أفقي. أنظر الشكل 1.



نزيح الجسم (S) عن موضع توازنه بمسافة $d=3cm$ ثم نحرره بدون سرعة ابتدائية.

نختار أصل التواريخ عندما يكون الجسم (S) في الموضع $x(t)=X_m$.

1- أثبت بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S)، المعادلة التفاضلية التي يحققها الفاصلة x.

2- يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي:

$$x(t)=X_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

أ- أوجد تعبير T_0 بدلالة m و k. ثم أحسب قيمته.

ب- أوجد التعبير العددي للمعادلة الزمنية $x(t)$.

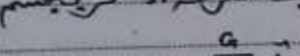
3- أ- أوجد التعبير العددي لتغير السرعة $v(t)$ بدلالة الزمن.

ب- أوجد القيمة العظمى للسرعة v_{max}.

4- أوجد تعبير $\ddot{x}_{max}$ بدلالة d و T_0. ثم أحسب قيمته.

تمرين 24:

نعتبر نواسا مرنا أفقيا مكونا من نابض ذي لفات غير متصلة، وكتلته مهملة وصلابته $k=50N.m^{-1}$ ونثبت أحد طرفيه بحامل ونربط طرفه الآخر بجسم (S) كتلته $m=100g$.



نزيح الجسم (S) عن موضع توازنه بالمسافة $x_{max}=4cm$، ثم نحرره بدون سرعة ابتدائية.

نعتبر اللحظة التي يمر فيها الجسم (S) من موضع توازنه لأول مرة أصلا للتواريخ. نهمل جميع الاحتكاكات.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، حدد طبيعة حركة الجسم (S).

2- نكتب المعادلة الزمنية لهذه الحركة كما يلي: $x(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$

أ- أعط أسماء ووحدات الثوابت φ و ω_0 و X_m.

ب- أكتب التعبير العددي للمعادلة الزمنية.

3- نعتبر موضع توازن الجسم (S) مرجعا لطاقة الوضع المرنة.

أ- أحسب قيمة طاقة الوضع المرنة في الموضع $x(t)=X_m$.

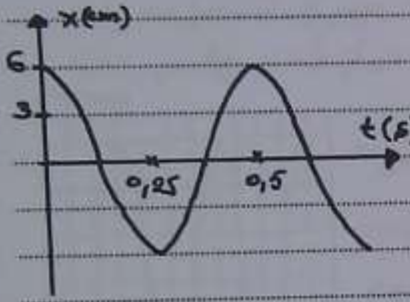
ب- بين أن الطاقة الميكانيكية يعبر عنها ب: $E_m=\frac{1}{2}kX_m^2$.

ج- أحسب الطاقة الحركية في اللحظة $t=\frac{T_0}{2}$ ثم استنتج قيمة طاقة الوضع في هذه اللحظة.

تمرين 25 :

نعتبر جسما صلبا (S) كتلته $m=100g$ مشدود بنابض صلابته k في حركة مؤقتة منعدمة حوالية أفقية. نهمل جميع الاحتكاكات، ونعتبر أصل المعلم O منطبقا مع مركز قصور الجسم (S) عندما تكون المجموعة في حالة توازن.

1 : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها فاصلة مركز قصور الجسم (S).



2 : يعطي المنحنى جانبه تغيرات فاصلة مركز قصور الجسم بدلالة الزمن.

أ : ما طبيعة الحركة.

ب : حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل $x(t)=X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$.

أوجد قيم X_m و T_0 و φ.

ج : بين أن $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ثم استنتج قيمة k.

3 : باعتبار موضع توازن الجسم (S) الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة، أوجد تعبير E_p.

4 : بين أن $E_m=\frac{1}{2}kX_m^2$، ثم أحسب قيمتها.

5 : بين أن $E_c=\frac{1}{2}k(X_m^2-x^2)$ ثم أحسب E_c عند اللحظة $t=\frac{T_0}{4}$.

6 : في أي موضع تكون سرعة الجسم قصوية. أحسب قيمتها.

تمرين 26 :

نعتبر نواسا مرنا رأسيا يتكون من نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته $k=40N.m^{-1}$ مثبت بحامل، وجسم صلب (S) كتلته $m=100g$ ومركز قصوره G مثبت بالطرف الحر للنابض أنظر الشكل.

1 : عندما يكون الجسم (S) في موضع التوازن حدد تعبير Δl إطالة النابض بدلالة m و g و k، أحسب Δl.

2 : نزيح الجسم عن موضع توازنه عموديا في المنحى الموجب بمسافة $Z_m=4cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية.

نختار أصل التواريخ عندما يمر الجسم في موضع توازنه للثاني مرة.

أ : أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها Z أفصول G.

ب : يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل : $z(t)=Z_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

أوجد التعبير العددي للدالة $z(t)$ بدلالة الزمن.

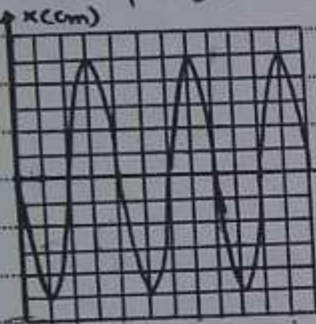
ج : بين أن سرعة الجسم (S) عند مروره من موضع توازنها هي : $|v|=Z_m\sqrt{\frac{k}{m}}$.

3 : أحسب التسارع a عندما يكون $|z|=Z_m$.

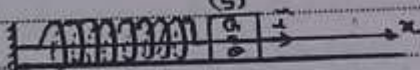
تمرين [illegible]:

يتكون نواس مرن أفقي من نابض ذي لفات غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته $k = 20\ N.m^{-1}$. ثبت في أحد طرفيه جسم صلب (S) كتلته m قابل للانزلاق فوق مستوى أفقي. (الشكل 1)، نثبت قلما صغيرا كتلته مهملة على الجسم (S) ونزيح هذا الأخير عن موضع توازنه الذي نعتبره أصل معلم الفضاء $(O, \vec{i})$، وبعد تحريره نلاحظ أنه ينجز تذبذبات جيبية. نسجل حركة طرف القلم فنحصل على تغيرات x أفصول مركز قصور الجسم (S) بدلالة الزمن كما يبين الشكل 2.

نهمل جميع الاحتكاكات.



الشكل 2



الشكل 1

الحساسية الرأسية للمنحنى الممثل في الشكل 2: 1cm/div

الكسح الأفقي 0,2 s/div

I: الدراسة التحريكية للمجموعة المتذبذبة:

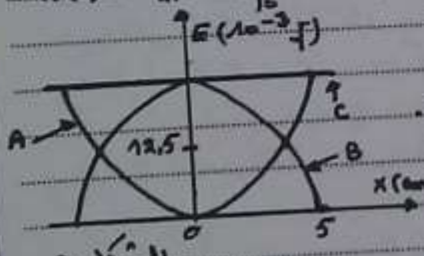
1: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفصول x.

2: حدد انطلاقا من المبيان أعلاه، قيمة كل من الدور الخاص T_0 والوسع القصوي x_m للمتذبذب الميكانيكي.

3: يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل: $x(t) = x_m \cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi)$

بين أن $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

استنتج قيمة m كتلة الجسم (S).



الشكل 3

II: الدراسة الطاقية للمجموعة المتذبذبة.

يمثل الشكل 3 جانبه مخطط كل من الطاقة الحركية E_c وطاقة الوضع المرنة E_{pe} والطاقة الميكانيكية E_m للمجموعة المتذبذبة.

نعتبر طاقة الوضع المرنة للمجموعة منعدمة عند موضع توازن الجسم (S) و $E_{pp}=0$ خلال حركة الجسم (S).

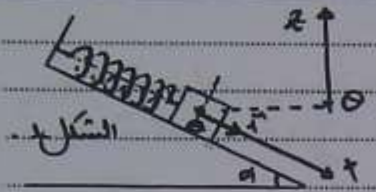
1: حدد معللا جوابك المنحنى الموافق لكل طاقة.

2: بين أن $E_m = \frac{1}{2} K x_m^2$، ثم تأكد من قيمة العلاقة المتقدمة من خلال استغلال المنحنى الخاص بمخطط الطاقة.

3: أوجد أفصول الجسم (S) عندما تكون $E_c = E_{pe}$ ثم أحسب E_c و E_{pe} في هذا الموضع.

4: بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب.

تمرين 28:

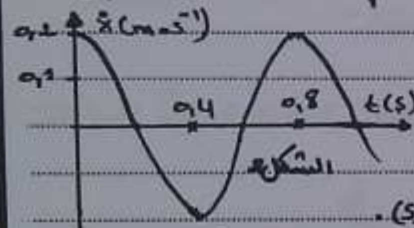


الشكل 1.

نعتبر جسما صلبا (S) كتلته $m = 0,2\,kg$ يمكنه الانزلاق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي.

نثبت طرفا نابض (R) لفاته غير متصلة وصلابته k وكتلته مهملة بالجسم (S) بعد أن نثبت طرفه الآخر بحامل أنظر الشكل 1.

1: أوجد تعبير الإطالة $\Delta \ell$ للنابض بدلالة m و g و α و k عندما يكون الجسم (S) في حالة توازن.



2: نزيح الجسم (S) عن موضع توازنه ثم نحرره بدون سرعة بدئية. نعلم موضع مركز قصور الجسم (S) في كل لحظة بأفصوله x في معلم $(O,\vec{i})$ يطابق أصله موضع G عند توازن الجسم (S).

يمثل الشكل 2 منحنى تغيرات السرعة $\ddot{x}$ لحركة الجسم (S) بدلالة الزمن.

أ: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن. أوجد المعادلة التفاضلية لحركة الجسم (S). ما طبيعة حركة الجسم (S).

ب: حدد مبيانيا الدور الخاص والنبض الخاص لهذه الحركة ثم استنتج قيمة صلابة النابض.

ج: أوجد التعبير العددي للمعادلة الزمنية لحركة الجسم (S).

3: نعتبر طاقة الوضع المرنة للمجموعة منعدمة عندما يكون النابض غير مشوه، ونتخذ مرجعا لطاقة الوضع الثقالية لنفس المجموعة المستوى الأفقي المار من O أصل المعلم (O,z) حيث G متطابق مع O أصل المعلم (O,x) أي عندما يكون الجسم (S) في موضع توازنه.

أ: بين أن تعبير طاقة الوضع المرنة للمجموعة تكتب على الشكل $E_{pe} = ax^2 + bx + c$ مع تحديد a و b و c.

ب: أوجد تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة x و m و g و α.

ج: استنتج تعبير الطاقة الميكانيكية E_m للمجموعة بدلالة x و $\dot{x}$

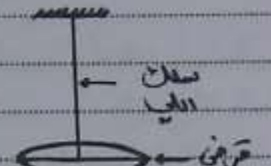
د: أحسب $\frac{dE_m}{dt}$ ثم استنتج أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ.

هـ: أوجد قيمة E_p و E_c عندما يكون $x = \frac{x_m}{2}$

و: أحسب سرعة الجسم (S) عندما تكون $E_c = E_p$.

تمرين 29:

يتكون النواس الالي الممثل في الشكل 1 من قرص D عزم تصوره بالنسبة للمحور (Δ) الذي يمر من مركزه تصوره هو $J_\Delta = 2,5.10^{-3}\ kg.m^2$ وسلك فتل ثابتة ليه c.



ندير القرص بزاوية θ_m انطلاقا من موضع توازنه المستقر ثم نحرره بدون سرعة بدئية في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ.

1: بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك حدد المعادلة التفاضلية لحركة القرص.

2: علما أن $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{c}}$ بين أن $\theta(t) = \theta_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ حل للمعادلة التفاضلية.

3: بين أن $\dot{\theta}_{max} = \theta_m \omega_0$ وأن $\dot{\theta}_{min} = -\theta_m \omega_0$.

4: علما أن $T_0 = 1s$ أحسب c ثابتة الي.

5: أكتب تعبير الطاقة الميكانيكية بدلالة c و θ_m ثم بين أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ. نعتبر الحالة المرجعية لطاقة الوضع الي عندما يكون القرص في موضع توازنه.

6: أ: أحسب طاقة الوضع الي في اللحظة $t_1 = \frac{T_0}{4}$ علما أن $\theta_m = \frac{\pi}{10}\ rad$.

ب: بين أن: $E_c = \frac{1}{2}c(\theta_m^2 - \theta^2)$ ثم أحسب قيمتها عند اللحظة t_1.

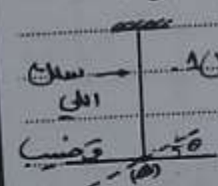
تمرين 30:

يمثل الشكل 1 نواس لي مكون من سلك لي رأسي ثابتة ليه c وقضيب متجانس عزم تصوره بالنسبة لمحور الدوران (Δ) هو $J_\Delta = 1,6.10^{-3}\ kg.m^2$.

ندير القضيب أفقيا حول المحور (Δ) في المنحى الموجب بالزاوية θ_m، ثم نحرره بدون سرعة بدئية. نختار أصل التواريخ عندما يمر القضيب من موضع توازنه لأول مرة.

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $\pi^2 = 10$.

ونختار موضع توازن القضيب مرجعا لطاقة الوضع الي E_{pt}.



الشكل 1

1: حدد تعبير الطاقة الميكانيكية E_m للمجموعة {سلك الي - القضيب} بدلالة J_Δ و c و θ و $\dot{\theta}$.

2: انطلاقا من الدراسة الطاقية، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب.

3: يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل: $\theta(t) = \theta_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

الشكل 2

أ: أوجد تعبير الدور الخاص T_0 بدلالة J_Δ و C.

ب: أوجد تعبير $\dot{\theta}(t)$ ثم حدد تعبير $\dot{\theta}_{max}$ و $\dot{\theta}_{min}$.

4: يمثل المبيان الممثل في الشكل 2 مخططي الطاقتين E_m و E_{pt}

أ: حدد مبيانيا كل من θ_m و E_m و C.

ب: استنتج قيمة T_0 ثم أحسب $\dot{\theta}_0$ عند اللحظة $t=0$

5: حدد التعبير العددي للتسارع الزاوي بدلالة الزمن.

6: بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على القضيب في حالة دورانه، بين اللحظتين $t=0$ و t، أوجد تعبير مربع السرعة الزاوية $\dot{\theta}^2$ عند اللحظة t بدلالة J_Δ و C و θ و θ_m و $\dot{\theta}_0$.

تمرين 31:

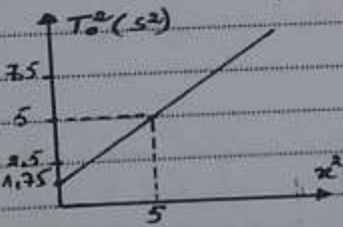
يتكون نواس اللي من سلك فولاذي رأسي كتلته مهملة وثابتة ليه C وساق متجانسة عزم قصورها بالنسبة للمحور (Δ) منطبق مع السلك هو: J_0.

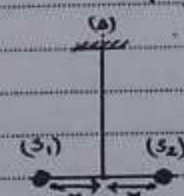
نثبت على الساق وعلى نفس المسافة x من المحور (Δ) جسمين نقطيين (S_1) و (S_2) لهما نفس الكتلة $m = 100\,g$.

نعطي عزم القصور J_Δ للمجموعة (S) المكونة من الساق (S_1) و (S_2) بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta = J_0 + 2mx^2$.

ندير المجموعة (S) أفقيا حول المحور (Δ) في المنحى الموجب بزاوية $\theta_m = \frac{\pi}{5}\,rad$ ونحررها بدون سرعة بدئية في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ.

نهمل جميع الاحتكاكات، ونعتبر موضع توازن الساق حيث السلك غير ملتو مرجعا لطاقة الوضع اللي، والمستوى الأفقي الذي يضم الساق مرجعا لطاقة الوضع الثقالية.





1: أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S).

2: أوجد تعبير T_0 بدلالة m و J_0 و C و x علما أن $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

3: يمثل المنحنى الممثل في الشكل 2 تغيرات T_0^2 بدلالة x^2.

أ: أوجد ثابتة اللي C وعزم القصور J_0.

ب: أوجد التعبير العددي للأفصول الزاوي $\theta(t)$ بدلالة الزمن.

4: أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية بدلالة C و θ_m. ثم أحسب قيمتها.

5: أحسب E_c عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{10}\,rad$.

تمرين 32 :

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10\,N.kg^{-1}$ و $\pi^2=10$.

يتكون نواس وازن من ساق متجانسة كتلتها $m=200\,g$

وطولها $\ell=50\,cm$ ومركز عطالتها G ، قابلة للدوران

حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر من طرفها O .

نعلم موضع الساق بالزاوية θ التي تكونها مع الخط

الرأسي المار من O (أنظر الشكل) .

نزيح الساق عن موضع توازنها المستقر بزاوية θ_m حيث

$\theta_m=\frac{\pi}{20}\,rad$ ثم نحررها بدون سرعة بدئية . نختار أصل التواريخ لحظة

مرور العارضة من موضع توازنها لأول مرة .

1 : بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك ، أوجد المعادلة التفاضلية للحركة .

2 : أوجد تعبير T_0 بدلالة m و g و ℓ و J_Δ علما أن $\theta(t)=\theta_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

حل للمعادلة التفاضلية .

3 : علما أن $T_0=0{,}4\,s$ أحسب J_Δ عزم قصور الساق بالنسبة لـ (Δ)

4 : نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية عندما تكون العارضة في

موضع توازنها .

أ : أحسب $\frac{dE_m}{dt}$ ثم استنتج أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ

ب : بين أن $E_m=\frac{1}{4}mg\ell\theta_m^2$ ثم أحسب قيمتها .

ج : بين أن :

$E_c=\frac{1}{4}mg\ell(\theta_m^2-\theta^2)$ ثم أحسب قيمتها في اللحظة $t_1=0{,}1\,s$

د : استنتج قيمة E_p في اللحظة t_1 .

هـ : حدد الأفصول الزاوي للعارضة عندما تكون $E_c-2E_p=0$.

تمرين 33 :

يتكون النواس الوازن من :

- عارضة متجانسة كتلتها $m_1=100\,g$ مقطعها ثابت وطولها $\ell=40\,cm$

يمكنها الدوران حول محور ثابت وأفقي (Δ) مثبت بطرفها O .

- جسم صلب (S) كتلته $m_2=m_1$ مثبت بالطرف الآخر للعارضة (يمكن

اعتبار هذا الجسم (S) نقطيا) . نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ : $g=10\,m.s^{-2}$.

عزم قصور المجموعة { الساق + الجسم (S) } بالنسبة للمحور (Δ) هو :

$J_\Delta=1{,}5.10^{-2}\,Kg\,m^2$. و G مركز قصور المجموعة .

نزيح المجموعة عن موضع توازنها المستقر بزاوية $\theta_m=10°$ ثم نحررها

بدون سرعة بدئية في لحظة نختارها أصلا للتواريخ .

1 : بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك أوجد المعادلة التفاضلية

لحركة المجموعة { العارضة + الجسم (S) } وما طبيعة حركتها .

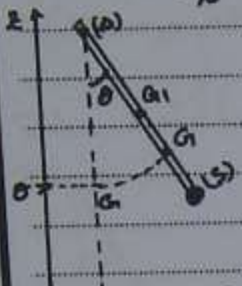
2: بيّن أن $OG=\frac{3}{4}l$ ثم أحسب قيمتها.

3: يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل: $\theta=\theta_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

أ: أوجد تعبير T_0 . ثم أحسب قيمتها.

ب: أوجد التعبير العددي للمعادلة الزمنية.

ج: أوجد قيمة $\dot{\theta}_{max}$ للعارضة.



4: طاقة الوضع الثقالية تنعدم عند $\theta=0$.

أ: أوجد تعبير E_p بدلالة الزمن.

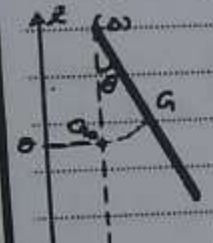
ب: أوجد تعبير E_c بدلالة θ و θ_m و ω_0 .

ج: بيّن أن المتذبذب توافقي ثم أحسب E_m .

تمرين 34:

نعتبر عارضة متجانسة AB طولها $l=1m$ وكتلتها m قابلة للدوران حول محور ثابت وأفقي (Δ) يمر من طرفها A. أنظر الشكل 1.

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10(S.I)$ ونرمز بـ J_Δ لعزم قصور العارضة بالنسبة للمحور (Δ).

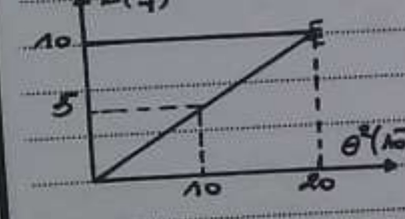


نزيح العارضة عن موضع توازنها المستقر بزاوية صغيرة θ_m ثم نحررها بدون سرعة بدئية في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ، فتنجز تذبذبات جيبية وسعتها θ_m.

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية عندما تمر العارضة من موضع توازنها.

يمثل المنحنى الممثل في الشكل ② تغيرات طاقة الوضع E_p بدلالة θ^2.

1: أوجد تعبير E_p بدلالة m و g و l و θ.



2: باستغلال منحنى الشكل 2 حدد E_p بدلالة θ^2. ثم استنتج قيمة m كتلة العارضة.

3: حدد مبيانيا الطاقة الميكانيكية E_m .

4: بيّن أن $E_c=\frac{1}{4}mgl(\theta_m^2-\theta^2)$ ثم مثل على المنحنى الممثل في الشكل 2 منحنى خاص بالطاقة الحركية E_c.

5: علما أن المجموعة محافظة، حدد المعادلة التفاضلية لحركة العارضة.

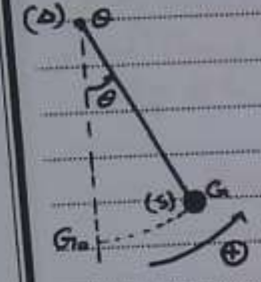
6: يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل: $\theta=\theta_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ أوجد التعبير العددي للمعادلة الزمنية.

7: أحسب $\dot{\theta}$ في اللحظة $t=\frac{T_0}{2}$.

تمرين 35:

تستعمل النواسات الميكانيكية في مجالات صناعية مختلفة وبعض الأجهزة الرياضية واللعب وغيرها. ومن بين هذه النواسات، الأرجوحة التي نعتبرها كنواس.

يتأرجح طفل بواسطة أرجوحة مكونة من عارضة يستقلها كمقعد، معلقة بواسطة حبلين مشدودين إلى حامل ثابت.



نمذج المجموعة { الطفل + الأرجوحة } بنواس بسيط يتكون من حبل، غير مدود وكتلته مهملة وطوله ℓ، وجسم صلب (S) كتلته m.

النواس قابل للدوران حول محور أفقي (Δ) ثابت ومتعامد مع المستوى الرأسي، حيث عزم قصور النواس بالنسبة للمحور (Δ) يعبر عنه ب: $J_\Delta = m\ell^2$

نعطي: شدة الثقالة: $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$، طول الحبل $\ell = 3m$، كتلة الجسم (S): $m = 18\,Kg$.

نأخذ في حالة التذبذبات الصغيرة: $\sin\theta \simeq \theta$ و $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

نهمل أبعاد الجسم (S) بالنسبة لطول الحبل، ونهمل جميع الاحتكاكات.

I: الدراسة التحريكية للنواس:

نزيح النواس عن موضع توازنه المستقر بزاوية $\theta_m = \frac{\pi}{20}\,rad$ في المنحى الموجب ونحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$.

1: بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك في حالة الدوران حول محور ثابت، بين أن المعادلة التفاضلية لحركة النواس في معلم تكتب على الشكل التالي: $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

2: أحسب الدور الخاص T_0 للنواس.

3: أكتب المعادلة الزمنية لحركة النواس.

4: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في أساس فريني، أوجد تعبير الشدة T لتوتر الحبل عند لحظة t بدلالة m و g و θ و ℓ و v السرعة الخطية للنواس. أحسب قيمة T عند اللحظة $t = \frac{T_0}{4}$.

II: الدراسة الطاقية:

نزود، عند لحظة $t = 0$ النواس السابق الذي يوجد في حالة سكون في موضع توازنه المستقر بطاقة حركية قيمتها $E_c = 264{,}6\,J$ فيدور في المنحى الموجب.

1: نختار المستوى الأفقي المار من G_0 مرجعا لطاقة الوضع الثقالية. أوجد تعبير E_p بدلالة m و g و ℓ و θ عند لحظة t.

2: باعتماد الدراسة الطاقية، حدد القيمة القصوية θ_{max} للأفصول الزاوي.

تمارين في الأقمار الاصطناعية والكواكب

تمرين 36:

يشكل القمر (lune) قمراً طبيعياً بالنسبة للأرض، شعاعه R، مسار حركته حول الأرض شبه دائري في المرجع المركزي الأرضي شعاع هذا المسار هو r. ينجز القمر دورة كاملة حول الأرض خلال: $27j\ 8h$.

1: بين أن g شدة مجال الثقالة هي $g = g_0 \frac{R^2}{r^2}$.

2: بين أن تعبير متجهة التسارع هو: $\vec{a} = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{n}$.

3: بين أن حركة القمر دائرية منتظمة.

4: حدد تعبير السرعة v للقمر بدلالة g_0 و R و r.

5: بين أن الدور المداري للقمر يعبر عنه ب: $T = 2\pi \frac{1}{R} \sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$

6: استنتج قيمة r.

نعطي: $R = 6380km$ و $g_0 = 9,8\,m.s^{-2}$

تمرين 37:

ينجز قمر اصطناعي وفي المرجع المركزي الأرضي حركة دائرية شعاعها $r = 20000\ km$ ودورها $T = 7h\,49min$ حول مركز الأرض،

كتلتها M_T و G ترمز لثابتة التجاذب الكوني.

نعطي: $1jours = 24h$ و $\frac{M_T}{M_S} = 3.10^{-6}$ حيث M_S هي كتلة الشمس و M_T كتلة الأرض.

1: بين أن حركة القمر الاصطناعي حول الأرض دائرية منتظمة.

2: بين أن $T^2 = k.r^3$، حيث k ثابتة يتم تحديدها. ماذا تمثل هذه العلاقة؟

3: في المرجع المركزي الشمسي، ينجز كوكب نبتون حول مركز الشمس حركة دائرية منتظمة شعاعها r_N ودورها: $T_N = 60200\,Jours$

أ: ذكر بقوانين كيبلير الأول والثاني.

ب: أوجد تعبير r_N بدلالة r و T و T_N و M_S كتلة الشمس.

أحسب r_N.

تمرين 38:

تمكن كل من دراسة حركة الأرض حول الشمس، ودراسة حركة الأقمار الاصطناعية حول الأرض، من مقارنة M كتلة الشمس ب m كتلة الأرض.

نهمل تأثير جاذبية الكواكب على كل من الأرض (T) والقمر الاصطناعي (S).

نعطي: الدور المداري لحركة الأرض حول الشمس: $T_T = 365\ jours$
شعاع المدار الدائري لحركة مركز الأرض حول الشمس: $r_T = 1,5 . 10^8\ km$.
دور دوران الأرض حول محورها القطبي: $T_0 = 1\ jours$
نعتبر قمرا اصطناعيا (S) ساكنا بالنسبة للأرض، كتلته m_0 ومساره في المرجع المركزي الأرضي دائري شعاعه $r_0 = 4,2 . 10^4\ km$.

1: أذكر الشروط التي يجب أن تتوفر لكي يكون قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض.

2: ذكر بالقانون الثالث لكبلر.

3: بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر الاصطناعي (S) في المعلم المركزي الأرضي، أثبت أن تعبير متجهة تسارع مركز قصور القمر (S) هو: $\vec{a} = \frac{G . m}{r_0^2} . \vec{n}$.

مع G ثابتة التجاذب الكوني. و $\vec{n}$ المتجهة الواحدية لمعلم فرينيي.

4: بين أن حركة القمر الاصطناعي (S) في المعلم المركزي الأرضي دائرية ومنتظمة.

5: استنتج بدلالة G و m و r_0، تعبير الدور المداري T للقمر الاصطناعي (S) حول الأرض.

6: يعبر عن ثابتة كبلر بالعلاقة $k = \frac{T^2}{r_0^3}$. أوجد تعبير T بدلالة G و m.

7: حدد تعبير النسبة $\frac{M}{m}$ بدلالة r_T و r_0 و T_T و T_0، واحسب قيمة هذه النسبة.

تمرين 9

يدور قمر اصطناعي (S)، كتلته m حول الأرض على ارتفاع h من سطحها وينتمي مساره إلى مستوى خط الاستواء، ونعتبره ساكنا بالنسبة للأرض، ثم ندرس حركته في المعلم المركزي الأرضي الذي نعتبره غاليليا.

نفترض أن للأرض تماثل كروي، وأن القمر الاصطناعي (S) نقطة مادية لا تخضع إلا لقوة التجاذب الأرضي $\vec{F}$.

1: أعط تعبير شدة القوة F بدلالة m و h و M كتلة الأرض و R شعاعها و G ثابتة التجاذب الكوني.

2: أوجد تعبير الارتفاع h بدلالة G و M و R و T دور الأرض حول نفسها. أحسب قيمة h.

نعطي: $R = 6400\ km$ و $M = 6 . 10^{24}\ kg$ و $G = 6,67 . 10^{-11}\ (S.I)$

3: أثبت العلاقة: $\omega^2 r^3 = c$ بحيث ω السرعة الزاوية للقمر الاصطناعي (S) و $r = R + h$.

4: أوجد تعبير c بدلالة R و g_0. (g_0 شدة الثقالة على سطح الأرض).

5: أوجد بدلالة m و g_0 و R و r تعبير الطاقة الحركية للقمر الاصطناعي (S).

تمرين 4:

يوجد قمر الاتصالات Hotbird 4 الذي كتلته $m = 2885\ kg$ فوق القارة الأوروبية في مدار ساكن بالنسبة للأرض. لقد أطلق هذا القمر سنة 1998 من طرف المركبة الفضائية الأوروبية Ariane IV.

نرمز لمركز قصور هذا القمر الاصطناعي بالحرف S وندرس حركته في المعلم المركزي الأرضي.

نرمز لـ r بالمسافة الفاصلة بين مركز قصور القمر الاصطناعي ومركز الأرض. و R شعاع الكرة الأرضية و g_0 شدة الثقالة فوق سطح الأرض.

نعطي: $R = 6{,}38.10^3\ km$ و $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$.

1: بين أن قوة التجاذب الكوني يعبر عنها بالعلاقة: $F = m g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$.

2: بين أن $v^2 = g_0 . \frac{R^2}{r}$ وذلك بتطبيق القانون الثاني لنيوتن.

3: استنتج أن

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 . R^2}$$

4: أحسب شعاع مسار القمر الاصطناعي (S) وسرعته الخطية والزاوية.

5: أحسب شدة قوة التجاذب الكوني المطبقة على القمر عند تواجده فوق سطح الأرض. ثم عند وجوده في مساره الحقيقي.

تمارين في التحولات التلقائية في الأعمدة

تمرين 1:

لإنجاز عمود متوضع في المختبر على صفيحة من الزنك وصفيحة من الفضة ومحلول كبريتات الزنك $(Zn^{2+} ; SO_4^{2-})$ تركيزه $c = 10^{-2} mol.L^{-1}$، ومحلول نترات الفضة $(Ag^{+} ; NO_3^{-})$ له نفس التركيز c، وقنطرة أيونية بها الأيونات $(K^{+} ; NO_3^{-})$.

بعد إنجاز العمود نركب بين الصفيحتين على التوالي موصل أومي وأمبيرمتر حيث أن المربط com للأمبيرمتر مرتبط بصفيحة الزنك.

يشتغل هذا العمود لمدة 20min مولدا تيارا شدته $I = 80 mA$.

نعطي: $M(Zn) = 65,4 g.mol^{-1}$ ؛ $M(Ag) = 107,9 g.mol^{-1}$ ؛ $1F = 9,65.10^{4} C.mol^{-1}$

1: أعط تبيانة التركيب التجريبي مبينا القطب الموجب والسالب ومنحى التيار ومنحى الالكترونات ومنحى الأيونات.

2: أعط نصفي معادلتي التفاعل عند كل الكترود والمعادلة الحصيلة.

3: أعط التبيانة الاصطلاحية لهذا العمود.

4: أنشئ الجدول الوصفي لهذا التفاعل.

5: أحسب كمية الكهرباء الممنوحة خلال مدة الاشتغال.

6: أحسب قيمة تقدم التفاعل x بعد تمام مدة الاشتغال.

7: حدد تغير كتلة الصفيحتين عند نهاية مدة الاشتغال.

تمرين 2:

نكون العمود حديد / قصدير، حيث كل نصف عمود يحتوي على حجم $V = 100 mL$ من المحلول الأيوني تركيزه $c = 5.10^{-2} mol.L^{-1}$.

نضع في كل إناء الكترود له كتلة $m = 10g$. ثم نصل الالكترودين بواسطة أمبيرمتر فيمر تيار شدته $I = 30 mA$ لمدة $\Delta t = 20h$.

المزدوجتين المتفاعلتين Sn^{2+}/Sn و Fe^{2+}/Fe.

نغلق الدارة بواسطة قنطرة أيونية فيلاحظ توضع فلز القصدير وتناقص كتلة فلز الحديد.

1: أكتب المعادلة الالكترونية التي تحدث بجوار كل الكترود.

2: استنتج المعادلة الحصيلة ثم أنشئ الجدول الوصفي لتقدم التفاعل.

3: أحسب كمية الكهرباء الممنوحة خلال هذه المدة.

4: حدد قطبية العمود.

5: أحسب تغير كتلة كل الكترود في حالة التقدم $x = x_{max}$.

تمرين 3:

نعتبر عمود زنك / حديد للمزدوجات Zn^{2+}/Zn و Fe^{2+}/Fe.
يمر في الدارة المكونة من هذا العمود وموصل أومي وأمبير متر تيار كهربائي I شدته موجبة عندما نربط المربط Com للأمبير متر بالكترود الزنك.

1: مثل بتبيانة الدارة ومثل منحى حركة الالكترونات وحدد قطبية كل الكترود.

2: أكتب أنصاف المعادلات بالنسبة لكل نصف عمود، ثم أكتب معادلة اشتغال العمود.

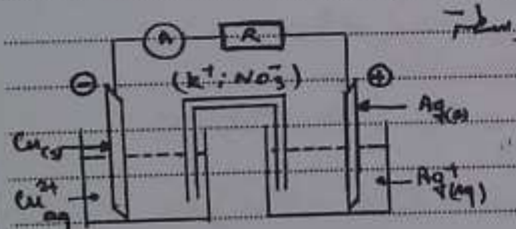
3: يشتغل العمود خلال ساعة، فتزداد كتلة الالكترود الحديد ب $m=56mg$. حدد تقدم التفاعل x خلال ساعة واستنتج كتلة الزنك المستهلكة.

4: نعتبر أن شدة التيار ثابتة خلال مدة التجربة.
أوجد تعبير I بدلالة x و F و Δt. أحسب قيمة I؟

نعطي: $M(Fe)=56g.mol^{-1}$ و $M(Zn)=65g.mol^{-1}$ و $F=9,65.10^{4}C.mol^{-1}$

تمرين 4:

تستعمل الطاقة الكهربائية التي تمنحها الأعمدة لتشغيل عدة أجهزة كهربائية، يهدف هذا التمرين إلى دراسة مثال من هذه الأعمدة، العمود الكهركيميائي فضة / نحاس الممثل بالتبيانة في الشكل أسفله.



منذ اللحظة $t=0$ نصل الكترودي العمود بواسطة أمبير متر (A) وموصل أومي مقاومته R، فيمر في الدارة تيار كهربائي شدته $I=12mA$ لمدة زمنية $\Delta t=10h$.

1: أعط التبيانة الاصطلاحية لهذا العمود.

2: أكتب معادلة التفاعل الذي يحدث بجوار كل الكترود، واستنتج المعادلة الحصيلة لهذا العمود.

3: أحسب كمية مادة الالكترونات $n(e^-)$ المتبادلة تلقائيا بين النوعين المتفاعلين $Cu_{(s)}$ و $Ag^+_{(aq)}$.

4: أنشئ الجدول الوصفي للتحول الحاصل في نصف عمود النحاس، وأوجد العلاقة بين $n(e^-)$ وتقدم التفاعل.

5: أحسب بالوحدة mg، كتلة فلز النحاس التي اختفت عند الأنود.

نعطي: $1F=96500C.mol^{-1}$ و $M(Cu)=63,5g.mol^{-1}$

تمرين 25

يشتغل عمود النحاس - الفضة وفق معادلة التفاعل التالي:

$$Cu_{(s)} + 2Ag^{+}_{(aq)} \longrightarrow Cu^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}$$

يمثل المحلول الابتدائي لنترات الفضة المستعمل ذي تركيز $C = 0,16\,mol.L^{-1}$ والحجم $V = 0,25\,L$، المتفاعل المحد لهذا التفاعل الذي يمكن اعتباره كليا.

1. أحسب كمية المادة الابتدائية لأيونات الفضة.
2. ارسم تبيانة ممثلة لهذا العمود مبرزا عليها قطبية العمود وكذلك منحى انتقال حملة الشحنة في الدارة.
3. أكتب التبيانة الاصطلاحية للعمود.
4. ماهي كمية الكهرباء القصوية التي يمكن أن يمنحها العمود.
5. ماهي المدة الزمنية لاشتغال العمود كي يعطي تيارا شدته $I = 50\,mA$
6. أنجز جدول التقدم لهذا التفاعل.
7. أحسب عند نهاية اشتغال العمود:
   - أ. كتلة الفضة المتكونة.
   - ب. كتلة النحاس المستهلكة

نعطي: $M(Ag) = 107,9\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(Cu) = 63,6\,g.mol^{-1}$ ؛ $1F = 9,65.10^{4}\,C.mol^{-1}$

تمرين 26

نريد انجاز عمود كهربائي زنك - حديد، حيث نتوفر على:

- صفيحة من الحديد كتلتها m_1 و صفيحة من الزنك كتلتها m_2.
- كأس 1 يحتوي على محلول كبريتات الحديد II $(Fe^{2+} ; SO_4^{2-})$ حجمه $V_1 = 100\,mL$ و تركيزه $C_1 = 0,20\,mol.L^{-1}$.
- كأس 2 يحتوي على محلول كبريتات الزنك $(Zn^{2+} ; SO_4^{2-})$ حجمه $V_2 = 100\,mL$ وتركيزه $C_2 = 0,10\,mol.L^{-1}$.
- قنطرة ملحية من نترات البوتاسيوم.

نعطي: ثابتة التوازن للتفاعل بين فلز الزنك والأيونات Fe^{2+} هي $K = 6,5.10^{10}$ والكتلة المولية: $M(Fe) = 56\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(Zn) = 64,5\,g.mol^{-1}$ ؛ $1F = 96500\,C.mol^{-1}$.

المزدوجات المتدخلة في اشتغال العمود هي: Zn^{2+}/Zn و Fe^{2+}/Fe

عند اغلاق العمود بواسطة قنطرة ملحية يلاحظ تناقص تركيز الأيونات Fe^{2+}.

1. أكتب أنصاف المعادلات التي تحدث بجوار كل الكترود واستنتج المعادلة الحصيلة لاشتغال العمود.
2. أحسب خارج التفاعل البدئي $Q_{r,i}$ واستنتج منحى تطور المجموعة.

3: ارسم مخطط العمود ممثلا عليه قطبيته، ثم اكتب البيانات الاصطلاحية للعمود.

4: يزود العمود دارة مكونة من موصل أومي وأمبير متر على التوالي بتيار شدته ثابتة $I = 965\,mA$ انطلاقا من اللحظة $t=0$.

أ: ضع جدولا وصفيا للتفاعل.

ب: أوجد تعبير التفاعل Q_r عند لحظة t بدلالة x و C_1 و V_1 و C_2 و V_2.

ج: أحسب بعد مرور 5 دقائق من اشتغال العمود:

- تغير كتلة كل الكترود.
- تركيز كل من الايونات Fe^{2+} و Zn^{2+}.
- خارج التفاعل Q_r.

تمرين 7:

نحقق عمودا من صفيحة من الالومنيوم كتلتها $m = 25\,g$ مغمورة في $100\,mL$ من محلول كلورور الالومنيوم تركيزه $C_1 = 0{,}20\,mol.L^{-1}$ ومن صفيحة من الزنك كتلتها $m = 15\,g$ مغمورة في $100\,mL$ من محلول كبريتات الزنك تركيزه $C_2 = 0{,}60\,mol.L^{-1}$.

نعتبر المعادلة التالية: $3\,Zn^{2+}_{(aq)} + 2\,Al_{(s)} \rightleftharpoons 3\,Zn_{(s)} + 2\,Al^{3+}_{(aq)}$

نعطي: ثابت التوازن $K = 3.10^{91}$.

$M(Al) = 27\,g.mol^{-1}$ و $M(Zn) = 65{,}4\,g.mol^{-1}$

1: أحسب خارج التفاعل لهذه المجموعة في الحالة البدئية.

2: في أي منحى تتطور المجموعة.

3: حدد قطبية كل الكترود ثم أعط التمثيل الاصطلاحي لهذا العمود.

4: أكتب معادلات التفاعل التي تحدث بجوار كل الكترود.

5: أنشئ الجدول الوصفي لتطور المجموعة، ثم أحسب التقدم الأقصى.

6: ماهي كمية الكهرباء القصوية التي يعطيها هذا العمود؟

7: حدد المدة الزمنية القصوى لاشتغال العمود، علما أنه يمنح تيارا شدته ثابتة $I = 120\,mA$.

8: أحسب كمية المادة النهائية للايونين Zn^{2+} و Al^{3+}.

9: أحسب تغير الكتلة لكل الكترود.

تمرين 8:

نحقق العمود ذو الرمز الاصطلاحي التالي:

$$\ominus\ Pb / Pb^{2+} \,//\, Ag^{+} / Ag\ \oplus$$

نعطي: $C = [Ag^{+}] = [Pb^{2+}] = 0{,}5\,mol.L^{-1}$

$F = 96500\,C.mol^{-1}$

وحجم كل محلول $V = 50\,mL$.

1: حدد معادلتي نصفي التفاعل في كل مقصورة، ثم استنتج معادلة التفاعل الحاصلة في العمود.

2: أنجز الجدول الوصفي لتقدم التفاعل محددا المتفاعل المحد.

3: علما أن ثابتة التوازن المقرونة بتفاعل العمود هي: $K = 6,8.10^{28}$.

حدد ما إذا كان التفاعل تاما أم محدودا؟ واستنتج نسبة التقدم النهائي للتفاعل.

4: أحسب كمية الكهرباء التي تجتاز الدارة بين لحظة اشتغال العمود، ولحظة توقفه.

5: ما المدة الزمنية التي يمكن للعمود أن يزود خلالها دارة كهربائية بتيار شدته $I = 250\,mA$.

6: أحسب تركيز الأيونات الفلزية عندما يتوقف العمود عن الاشتغال.

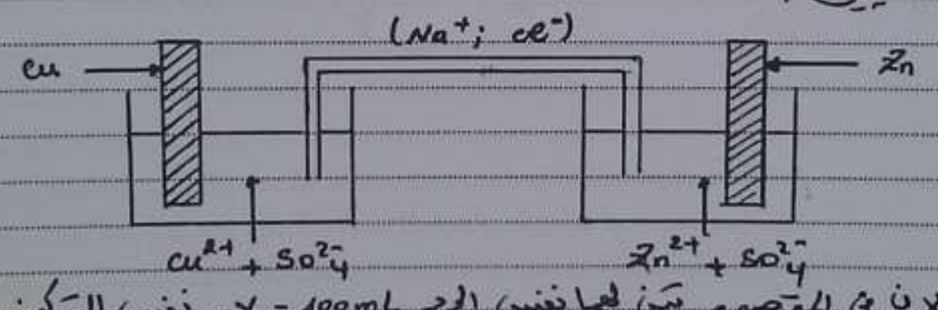
7: ما هو التحول الذي يقع في كل إلكترود.

8: أحسب الكتلة المتوضعة على الكاثود عند نهاية اشتغال العمود.

نعطي: $M(Ag) = 108\,g.mol^{-1}$.

تمرين 29

تعطي الوثيقة الممثلة في الشكل أسفله رسما مبسطا توضيحيا لمكونات عمود دانيال:



المحلولان في المقصورتين لهما نفس الحجم $V_1 = 100\,mL$ ونفس التركيز $C_1 = 0,1\,mol.L^{-1}$.

الجزء الأول:

نصل بواسطة سلك كهربائي صفيحة النحاس بالمربط A لجهاز الفولطمتر، وصفيحة الزنك بالمربط Com لنفس جهاز الفولطمتر، حيث يشير هذا الأخير إلى التوتر $U = 1,1\,V$.

1: حدد معللا جوابك قطبية هذا العمود، ثم أعط التبيانة الاصطلاحية لهذا العمود.

2: ما هو دور القنطرة الملحية في هذا العمود.

تمارين في التحولات القسرية

تمرين 1:

يؤدي التحليل الكهربائي لمحلول حمض الكلور هيدريك إلى تكون الغازين: ثنائي الكلور Cl_2 وثنائي الهيدروجين H_2.

علما أن الثنائيتين المتدخلتين في التفاعل هما: H^+/H_2 ، Cl_2/Cl^-.

1. أكتب معادلة الأكسدة ومعادلة الإرجاع، واستنتج معادلة التفاعل القسري.
2. اعط إسم الالكترود الذي يتكون عنده كل غاز.
3. ارسم تبيانة التركيب التجريبي باستعمال الكترودين من الجرافيت.
4. أحسب كمية مادة الغازين الناتجين، علما أن التجربة تستغرق ساعة عبر خلالها تيار شدته ثابتة $I = 1A$
5. استنتج حجم هذين الغازين في ظروف التجربة.

نعطي: $1F = 96500\ C.mol^{-1}$ والحجم المولي الغازي: $V_m = 24\ l.mol^{-1}$

تمرين 2:

ننجز التحليل الكهربائي لمحلول نترات الفضة $(Ag^+_{aq} + NO^-_{3\,aq})$ بين الكترودين من الجرافيت.

عندما نربط الالكترودين بمولد يلاحظ تصاعد غاز ثنائي الاوكسجين، وتوضع فلز الفضة.

1. أكتب معادلتي التفاعلين عند كل الكترود.
2. استنتج المعادلة الحصيلة للتحليل الكهربائي.
3. تستغرق العملية المدة: $\Delta t = 14min15s$ حيث تكون شدة التيار ثابتة $I = 0,8A$.
   - أ: أحسب كتلة الفضة المتوضعة.
   - ب: أوجد حجم غاز ثنائي الاوكسجين المتصاعد.

نعطي: $M(Ag) = 108\ g.mol^{-1}$ و $1F = 96500\ (S.I)$ و $V_m = 24\ l.mol^{-1}$

تمرين 3:

انتاج ثنائي الهيدروجين قصد استعماله في المجال الطاقي قد يكون له مستقبل سواء في أعمدة الوقود (مولد كهركيميائي يحول مباشرة الطاقة الكيميائية للاحتراق إلى طاقة كهربائية) أو لمحركات الاحتراق الداخلي.

يمكن تحضير ثنائي الهيدروجين عن طريق التحليل الكهربائي للماء الخالص.

يطبق مولد مرتبط بالكترودي المحلل الكهربائي توترا مستمرا $U = 2V$

فيمر تيار كهربائي شدته كبيرة جداً .

معادلة التحليل الكهربائي الحاصل هي : $2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons 2H_{2(g)} + O_{2(g)}$

I : 1 : هل التفاعل الحاصل في المحلل الكهربائي تلقائي؟ علل جوابك.

2 : الثنائيتان مؤكسد - مختزل المتدخلتان في التحليل الكهربائي هما $O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$ و $H^+_{(aq)}/H_{2(g)}$

أكتب معادلة التفاعل على مستوى الالكترود الذي يتكون عنده غاز ثنائي الهيدروجين

3 : ما الالكترود الذي يتصاعد عنده ثنائي الهيدروجين . الكاثود أم الانود ؟ علل جوابك .

4 : ما قطب المولد المرتبط بهذا الالكترود .

II : يبدأ التحليل الكهربائي في اللحظة $t=0$.

1 : نعتبر معادلة التفاعل الذي يحدث على مستوى الالكترود الموافق لتكون ثنائي الهيدروجين ، أوجد تعبير القيمة المطلقة لكمية الكهرباء عند اللحظة t بدلالة x .

2 : بين أن شدة التيار I الذي يمر بالمحلل الكهربائي لانتاج كمية مادة ثنائي الهيدروجين $n(H_2)$ خلال المدة Δt يعبر عنها بالعلاقة : $I = \frac{2F.n(H_2)}{\Delta t}$. مع F ثابتة فرادي .

3 : أحسب شدة التيار المار في المحلل لانتاج $5m^3$ من غاز ثنائي الهيدروجين خلال كل ساعة .

نعطي : الحجم المولي في ظروف التجربة : $V_m = 25\ l.mol^{-1}$; $1F = 96500\ C.mol^{-1}$

تمرين 24 :

لطلاء قطعة معدنية من الحديد دائرية الشكل قطرها $d=4cm$ بطبقة رقيقة من فلز القصدير سمكها $e=100\mu m$ من الجهتين ، ننجز بالعدة التجريبية التالية :

- الكترودين احدهما من القصدير والآخر مكون من قطعة الحديد .

- محلول يحتوي على أيونات القصدير Sn^{2+} .

- محلل كهربائي مكون من مولد و أمبيرميتر و كابل على شكل U

المزدوجة المشاركة في التفاعل هي Sn^{2+}/Sn .

1 : ارسم معللا جوابك التركيب المستعمل مبرزا منحى التيار الكهربائي

2 : أكتب نصفي معادلة الأكسدة و الاختزال واستنتج المعادلة الحصيلة .

3 : أحسب كمية مادة القصدير اللازمة لهذه العملية .

4 : أحسب كمية مادة الالكترونات المتبادلة .

5 : ما هي المدة الزمنية اللازمة لهذه العملية إذا علمت أن شدة التيار المستعمل هي $I=1A$.

6: ما قيمة الطاقة اللازمة لهذه العملية علماً أن المولد يزود الدارة بتوتر قيمته $U=3V$.

نعطي: الكتلة الحجمية لعنصر القصدير: $\rho(Sn)=7,28\, g.cm^{-3}$.

$M(Sn)=118,69\, g.mol^{-1}$ و $F=9,65.10^{4}\, C.mol^{-1}$.

تمرين 25:

نريد تغليف قطعة من الحديد طولها $l=8cm$ وعرضها $2cm$ وذلك بطبقة رقيقة من فلز الزنك باستعمال تقنية التحليل الكهربائي.

لهذا الغرض نستعمل محلول كبريتات الزنك $(Zn^{2+};SO_4^{2-})$ وأمبيرمتر ومولد وحوض التحليل ثم قطعة الزنك.

1: ارسم مخطط التركيب التجريبي محدداً عليه منحى التيار.

2: اكتب نصفي معادلة الأكسدة والاختزال ثم استنتج حصيلة التحليل الكهربائي.

3: تدوم عملية التحليل الكهربائي $15min$ بشدة التيار الكهربائي $I=0,4A$. أحسب كمية الكهرباء المتبادلة.

4: استنتج كمية مادة الالكترونات المتبادلة.

5: احسب الكتلة النظرية لفلز الزنك المتوضع.

6: احسب سمك فلز الزنك المتوضع.

7: ما الهدف من عملية التغليف.

نعطي: الكتلة الحجمية لفلز الزنك $\rho(Zn)=7,1\, g.cm^{-3}$

$M(Zn)=65,4\, g.mol^{-1}$ و $F=96500\, C.mol^{-1}$.

تمارين في كيفية التحكم في تطور مجموعة كيميائية

تمرين 1:

ننجز تسخينا بالارتداد لخليط من $0,4\,mol$ حمض الميثانويك و $0,4\,mol$ لبروبان-2-أول، نضيف للخليط قطرات من حمض الكبريتيك المركز.
نوقف التفاعل بعد مرور مدة زمنية ونحدد بالمعايرة حمض-قاعدة، كمية مادة حمض الميثانويك المتبقي فنجد $n=0,18\,mol$.

1: أكتب معادلة التفاعل المنمذج لهذا التحول. ما مميزاته؟

2: أنجز الجدول الوصفي للتحول الكيميائي المدروس.

3: ما قيمة التقدم $x_{éq}$ عند التوازن؟

4: أعط تعبير ثابتة التوازن K بدلالة $x_{éq}$. ثم أحسب قيمتها.

5: أحسب مردود هذه الأسترة.

تمرين 2:

نعتبر استر A صيغته العامة $C_nH_{2n}O_2$، حيث النسبة المئوية للأوكسجين تمثل $31,4\%$.

نعطي الكتل المولية ب $g.mol^{-1}$: $M(H)=1$; $M(C)=12$; $M(O)=16$

1: حدد الصيغة الإجمالية للاستر A.

2: أكتب مختلف الصيغ نصف المنشورة للاستر A، وأعط أسماءها.

3: تؤدي حلمأة أحد متماكبات الاستر A إلى الحصول على مركب B وبروبان-1-أول.

أ: أكتب معادلة التفاعل الكيميائي للحلمأة المذكورة.

ب: ما اسم الاستر A المتفاعل وصيغة المركب العضوي B وما اسمه؟

تمرين 3:

نعتبر المركبات العضوية A و B و C و D ذات الصيغ نصف المنشورة:

A: CH_3-CH_2-OH

B: $CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_3$

C: $H-C(=O)-OH$

D: $CH_3-C(=O)-O-C(=O)-CH_3$

1: أعط أسماء المركبات A و B و C و D، وحدد المجموعة التي ينتمي إليها كل مركب.

2: أكتب بالصيغ نصف المنشورة، معادلة التفاعل بين المركبين A و C.
ما هي مميزات هذا التفاعل.

3: أكتب بالصيغ نصف المنشورة معادلة التفاعل بين A و D. ما هي مميزاته.

تمرين 14

يؤدي تفاعل حمض البوتانويك مع الميثانول إلى تكون مركب عضوي E والماء.

1: أعط الصيغ نصف المنشورة لكل من حمض البوتانويك والميثانول.

2: ماذا يسمى هذا التفاعل؟ ما هي مميزاته؟

3: اكتب معادلة التفاعل، ثم أعط اسم المركب E.

4: اقترح طريقتين مختلفتين لتحسين مردود هذا التفاعل.

5: للحصول على تفاعل كلي وسريع نستبدل حمض البوتانويك بأندريد البوتانويك. أكتب معادلة تفاعله مع الميثانول.

تمرين 15

ننجز تسخينا بالارتداد لخليط من $n_1 = 1\,mol$ لحمض الإيثانويك و $n_2 = 4\,mol$ للإيثانول وذلك لتحضير استر نرمز له ب E.

عند توازن المجموعة الكيميائية نحصل على كتلة $m_{éq} = 81,8\,g$ من الاستر E.

معطى: $M(H) = 1\,g.mol^{-1}$ و $M(C) = 12\,g.mol^{-1}$ و $M(O) = 16\,g.mol^{-1}$

1: أعط الصيغ نصف المنشورة للحمض والكحول المتفاعلين.

2: أكتب معادلة التفاعل الحاصل، ما اسمه وما مميزاته؟

3: أحسب $n(E)$ كمية مادة الاستر الناتج.

4: أنجز الجدول الوصفي لتقدم التفاعل الكيميائي الحاصل.

5: أحسب $x_{éq}$ ثم استنتج قيمة ثابتة التوازن K.

6: أحسب قيمة مردود التفاعل المدروس.

تمرين 16

يتفاعل كحول A مع حمض كربوكسيلي B، فينتج عن هذا التفاعل استر E، صيغته الإجمالية $C_4H_8O_2$.

1: أعط جميع الصيغ نصف المنشورة وأسماء الاسترات المتماكبة للاستر E حيث تتوفر على سلاسل غير متفرعة.

2: ليكن n عدد ذرات السلسلة الكربونية للكحول A وكتلته المولية هي $M(A) = 46\,g.mol^{-1}$

بين أن $n = 2$ ثم استنتج الصيغة الإجمالية للكحول A.

3: استنتج الصيغة الإجمالية للاستر E الناتج والحمض الكربوكسيلي B.

4: أكتب معادلة التفاعل الحاصل. ما هي مميزات التفاعل؟

5: نمزج في حوجلة 1 mol من الكحول A و 1 mol من الحمض الكربوكسيلي (B) ونضيف إليه قطرات من حمض الكبريتيك، وننجز عملية التسخين بالارتداد. نحصل على التوازن الكيميائي في حين ما تكون كمية مادة الاستر E الناتجة هي $n(E) = 0,67\,mol$.

أ: أنجز الجدول الوصفي لتقدم التفاعل.

ب: بيّن أنّ قيمة ثابتة التوازن المعرفة بهذا التفاعل هي: $K \simeq 4$.
ج: أحسب $m(E)$ كتلة الأستر الناتج.
د: أحسب r مردود هذا التفاعل.
ه: نضيف إلى الخليط السابق بعد توازنه $n = 0,5\,mol$ من الحمض الكربوكسيلي A فيبدأ التفاعل من جديد.
أ: أحسب x'_f التقدم النهائي الجديد عند توازن المجموعة.
ب: أحسب r' مردود هذا التحول. ثم قارنه مع قيمة r السابقة.
معطى: $M(H) = 1\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(C) = 12\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(O) = 16\,g.mol^{-1}$

تمرين: 37

تعزى نكهة الإجاص إلى وجود مستخرج طبيعي من فاكهة الإجاص أو إلى وجود المركب الاصطناعي ذو الصيغة نصف المنشورة أسفله وهو مذيب سائل عديم اللون وكثير الاستعمال في الكيمياء الصناعية.

$$CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_2-CH_3$$

I: قامت مجموعة من التلاميذ خلال حصة الأشغال التطبيقية بتحضير هذا الأستر مستعملة تركيب التسخين بالارتداد لخليط مكون من $1,3\,mol$ من حمض الإيثانويك و بروبان-1-أول وبعض قطرات حمض الكبريتيك المركز، فحصلت على الكتلة $m = 88,842g$ من الأستر.
1: أعط إسم هذا الأستر المحصل عليه.
2: أعط معادلة تفاعل هذه الأسترة، وذلك باستعمال الصيغ نصف المنشورة
3: علماً أن الخليط تناسبي، حدد التقدم النهائي للتفاعل باستعمال الجدول الوصفي لتقدم التفاعل.
4: أحسب ثابتة التوازن K المعرفة بتفاعل الأسترة.
5: أحسب r مردود هذا التفاعل.
6: أعط ثلاث اقتراحات لتحسين مردود هذا التفاعل.
7: نعوض في التفاعل السابق حمض الإيثانويك بأندريد الإيثانويك.
أعط باستعمال الصيغ نصف المنشورة معادلة التفاعل الحاصل، ما الفرق بين هذا التفاعل، والتفاعل السابق؟
II: يتفاعل الأستر المدروس سابقا مع محلول الصودا $(Na^+ + OH^-)$.
1: حدد اسم هذا التفاعل، وما هي مميزاته.
2: أكتب معادلة هذا التفاعل باستعمال الصيغ نصف المنشورة، محددا بذلك أسماء النواتج.

تمرين 18:

نسخن بالارتداد خليطا يتكون من حمض الميثانويك كمية مادته الابتدائية $n_i(Ac)=0,24\,mol$، ومن البروبان-1-أول كمية مادته الابتدائية $n_i(Al)=0,24\,mol$، وبعض قطرات حمض الكبريتيك.

عند توازن المجموعة الكيميائية نحصل على استر A كمية مادته $n_{eq}(A)=0,16\,mol$

1: اكتب مستعملا الصيغ نصف المنشورة، معادلة تفاعل الاسترة. واعط اسم الاستر الناتج A.

2: انجز الجدول الوصفي لتقدم التفاعل ثم احسب x_{eq}.

3: احسب r مردود التفاعل و K ثابتة التوازن المقرونة بهذا التفاعل:

4: عندما تصل المجموعة الكيميائية حالة التوازن، نضيف كمية المادة $0,24\,mol$ من البروبان-1-أول إلى الخليط.

أ: احسب خارج التفاعل البدئي $Q_{r,i}$ للتفاعل الجديد، واستنتج منحى تطور المجموعة.

ب: حدد عند التوازن الجديد قيمة x'_{eq}.

ج: اثبت أن المردود الجديد لانتاج الاستر هو $r' \approx 85\%$. ماذا تستنتج

تمرين 19:

يتفاعل خليط متساوي المولات لأندريد الايثانويك و 2-ميثيل بروبان-1-أول

1: اكتب معادلة التحول الكيميائي مبرزا مميزاتها.

2: عين m_2 كتلة الكحول اللازمة لتفاعل $m_1=2,55g$ من أندريد الايثانويك

3: انجز الجدول الوصفي للتفاعل الحاصل.

4: عين كتلة الاستر (E) المتكونة.

نعطي: $M(H)=1\,g\,mol^{-1}$ و $M(C)=12\,g\,mol^{-1}$ و $M(O)=16\,g.mol^{-1}$

تمرين 20:

تحتوي الزيوت الغذائية على الزيتين، وهي ثلاثي غليسريد صيغته:

$CH_2 - O - CO - C_{17}H_{33}$

$CH - O - CO - C_{17}H_{33}$

$CH_2 - O - CO - C_{17}H_{33}$

1: ما المجموعة المميزة لجزيئة الزيتين.

2: اكتب معادلة تصبن الزيتين بمحلول الصودا، وأعط مميزات هذا التفاعل وأسماء النواتج.

3: لتحضير الصابون نتبع على الخطوات التالية:

- ندخل $V_1=10\,mL$ من زيت عباد الشمس و $V_2=30\,mL$ من محلول الصودا بتركيز $c=8\,mol.L^{-1}$ في حوجلة، ونضيف قطعا من حجر خفاف،

ثم نسخن بالارتداد لمدة 30 min.
نبرد الخليط ونضيف إليه 100 mL من الماء المالح المشبع، فيتكون راسب الصابون الذي يطفو نحصل عليه بعد الترشيح.
أ: 1. ارسم التركيب التجريبي للتسخين بالارتداد.
ب: ما كتلة الصابون المحصل عليه إذا كان مردود التفاعل هو $r = 95\%$؟
وذلك باستعمال الجدول الوصفي.
ج: ما دور التسخين أثناء تحضير الصابون.
4: نرمز للصابون بالرمز: $R-COO^-Na^+$
أ: 1. بين المجموعتين المحبة للماء (الهيدروفيلية) والمحبة للدسم (الهيدروفوبية) لأيون الكربوكسيلات
ب: يتميز أيون الكربوكسيلات بكونه يحتوي على منطقتين مختلفتين وهما مختلفتان بالنسبة للماء وبالنسبة للأجسام الدهنية.
ماذا يحدث عند إذابة الصابون في الماء الخالص؟
ج: إذا كان الماء يحتوي على أجسام دهنية، فسر بإيجاز الخاصية المنظفة للصابون.
نعطي: $M(\text{الزيت}) = 884\ g.mol^{-1}$ و $M(Na) = 23\ g.mol^{-1}$
الكتلة الحجمية لزيت عباد الشمس $\rho = 0,92\ g.cm^{-3}$.

تمرين 421:

I: نحصل على بنزوات الميثيل ذات الصيغة $C_6H_5-COO-CH_3$ بتفاعل حمض البنزويك وكحول A بحضور حمض الكبريتيك كحفاز.
نحصل على ثابتة التوازن المعروفة بهذا التفاعل حيث $K = 4$
1: أ: أعط اسم الكحول A والصيغة نصف المنشورة لحمض البنزويك؟
ب: أكتب معادلة التفاعل باستعمال الصيغ الإجمالية للمركبات.
3: ما اسم التفاعل وما مميزاته.
II: ننجز تفاعل أسترة انطلاقا من خليط متساوي المولات من المتفاعلين $0,4\ mol$ من الكحول A و $0,4\ mol$ من حمض البنزويك.
2: أ: أنشئ جدول التقدم الموافق لهذا التحول.
ب: أحسب $x_{éq}$.
3: حدد التركيب النهائي للخليط ثم أحسب مردود التفاعل.
4: اقترح طريقة لتحسين مردود التفاعل.
5: نضيف عند توازن المجموعة الكيميائية $0,4\ mol$ من الكحول A.
فيبدأ التفاعل من جديد.
أ: أحسب $x_{éq}$ الجديد عند توازن المجموعة.
ب: أحسب مردود التفاعل من جديد.

ج: أحسب كتلة الاستر الناتج.

III. يتفاعل هذا الاستر الناتج خلال التجربة السابقة مع محلول مركز لهيدروكسيد الصوديوم $(Na^+; OH^-)$ فنحصل على كحول ومركب (B).

1: أكتب معادلة التفاعل، وأعط أسماء النواتج.

2: أحسب مردود التفاعل علما أننا انطلقنا من 0,5 mol من الاستر وحصلنا على 72,45 g من المركب B.

نعطي: $M(Na)=23\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(H)=1\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(C)=12\,g.mol^{-1}$ ؛ $M(O)=16\,g.mol^{-1}$.

تمرين 12:

ننجز التسخين بالارتداد لخليط يتكون من 0,5 mol لحمض الايثانويك و 0,5 mol للبروبان - 2 - أول.

نضيف للخليط قطرات من حمض الكبريتيك المركز. بعد مدة نوقف التفاعل ونحدد كمية مادة الحمض المتبقية بواسطة معايرة حمضية قاعدية فنحصل على القيمة $n_a = 0,13\,mol$.

1: أكتب الصيغتين نصف المنشورتين لحمض الايثانويك والبروبان-2-أول. حدد المجموعة الوظيفية التي ينتميان اليها.

2: أكتب معادلة التفاعل الحاصل بين الحمض والبروبان-2-أول. ثم حدد خصائصه.

3: ما اسم المركب الناتج وكذا المجموعة الوظيفية التي ينتمي اليها.

4: أنشئ جدول تطور التحول المدروس، وحدد قيمة التقدم عند التوازن.

5: أعط تعبير خارج التفاعل عند التوازن بدلالة $x_{éq}$ واحسب قيمته.

6: أحسب مردود التفاعل. كيف يمكن تحسينه؟

7: ننجز الحلمأة القاعدية للمركب العضوي الناتج بكمية وافرة من هيدروكسيد الصوديوم فنحصل على مركبين ناتجين. أكتب معادلة التفاعل وحدد أسماء النواتج.

السعيد العمري

سلسلة

التفوق

في

الرياضيات - الفيزياء - الكيمياء

شعبة العلوم الفيزيائية