تصحيح الامتحان الوطني للرياضيات 2013 الدورة العادية

ذ: الحسن

الصفحة 1/2

التمرين الأول:

1) أ- لدينا $\vec{OA}(-1,1,0)$ و $\vec{OB}(1,0,1)$ إذن:

$$\vec{OA}\wedge\vec{OB} = \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{k} = 1\times\vec{i} - (-1)\vec{j} - 1\times\vec{k} = \boxed{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}$$

لدينا المستوى (OAB) متجهتها المنظمية $\vec{OA}\wedge\vec{OB}(1,1,-1)$ إذن المعادلة الديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على الشكل $x+y-z+d=0$ وبما أن $O(0,0,0)\in(OAB)$ إذن: $0+0-0+d=0$ أي $d=0$

مع بالتالي $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

ب- لدينا:

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

بما أن $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}<R=3$

إذن: المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها r حيث $\boxed{r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}}$

2) أ- لدينا (Δ) مستقيم مار من Ω و العمودي على (OAB) إذن متجهته الموجهة هي $\vec{u}(1,1,-1)$

ومنه التمثيل البارامتري لـ (Δ) هو:

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+1\times t=1+t\\ y=1+1\times t=1+t\\ z=-1-1\times t=-1-t\end{cases}\quad t\in IR$$

ب- لتكن H مركز الدائرة (Γ) إذن إحداثياتها تحقق:

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-1-t\end{cases}\ (1)\quad \text{و}\quad x+y-z=0\ (2)$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$(1+t)+(1+t)-(-1-t)=0 \Leftrightarrow 3+3t=0 \Leftrightarrow \boxed{t=-1}$$

نعوض القيمة $t=-1$ في (1) نجد:

$$\begin{cases}x=1-1=0\\ y=1-1=0\\ z=-1+1=0\end{cases}$$

وبالتالي $\boxed{H(0,0,0)}$

التمرين الثاني:

1) أ- لدينا:

$$(1+i)(-3+6i)=-3+6i-3i-6=\boxed{-9+3i}$$

و

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i}=\frac{-9+3i}{-3+6i}=\frac{(1+i)\cancel{(-3+6i)}}{\cancel{-3+6i}}=\boxed{1+i}$$

ب- لدينا:

$$\frac{AC}{AB}=\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\Rightarrow \boxed{AC=AB\times\sqrt{2}}$$

و

$$(\overline{\vec{AB},\vec{AC}})\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]\equiv\arg(1+i)[2\pi]\equiv\boxed{\frac{\pi}{4}}[2\pi]$$

لأن:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\Rightarrow \arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

2) أ- لدينا:

$$d-b=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-b)\Rightarrow d=b+i(a-b)=4+8i+i(7+2i-4-8i)$$

$$\Rightarrow d=4+8i+7i-2-4i+8=\boxed{10+11i}$$

ب- لدينا:

$$\frac{d-c}{b-c}=\frac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i}=\frac{12+6i}{6+3i}=\frac{6\cancel{(2+i)}}{3\cancel{(2+i)}}=\frac{6}{3}=\boxed{2}$$

بما أن $\frac{d-c}{b-c}=\boxed{2\in IR}$ فإن النقط B و C و D مستقيمية.

التمرين الثالث:

1) لدينا السحب عبارة عن تأليفة لأربع عناصر من بين 10 عناصر إذن:

$$\boxed{card\,\Omega=C_{10}^{4}}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=\frac{5040}{24}=210$$

والحدث A "الحصول على كرتين خضراوين وكرتين حمراوين" أي: 2V و 2R إذن:

$$\boxed{card\,A=C_5^2\times C_3^2}=10\times3=30$$

ومنه:

$$P(A)=\frac{card\,A}{card\,\Omega}=\frac{30}{210}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

والحدث B "لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة" أي 4 كرات من بين 8 كرات (خضراء و حمراء) إذن:

$$\boxed{card\,B=C_8^4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=\frac{1680}{24}=70$$

ومنه:

$$P(B)=\frac{card\,B}{card\,\Omega}=\frac{70}{210}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

2) أ- بما أن عدد الكرات البيضاء هو 2 و المتغير العشوائي X يربط كل سحبة لعدد الكرات المسحوبة فإن القيم التي يأخذها المتغير X هي 0 و 1 و 2

$X(\Omega)=\{0,1,2\}$

ب- لدينا:

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\frac{2\times56}{210}=\frac{112}{210}=\boxed{\frac{8}{15}}$$

و حسب السؤال 1)

$$P(X=0)=P(B)=\boxed{\frac{1}{3}}$$

و

$$P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\frac{1\times28}{210}=\boxed{\frac{2}{15}}$$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X:

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$\sum P(X=k)=\frac{1}{3}+\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{15}{15}=1$$

ذ: الحسن

التمرين الرابع

1) لدينا: لكل $n\in\mathbb{N}^*$ $5-u_{n+1} = 5-\frac{25}{10-u_n} = \frac{5(10-u_n-5)}{5+(5-u_n)} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ إذن: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*: 5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}}$

من أجل $n=1$ لدينا: $5-u_1 = 5-0>0$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=1$.

نفترض أن العبارة صحيحة من أجل n أي $5-u_n>0$ ونبين أن العبارة صحيحة من أجل $n+1$ أي $5-u_{n+1}>0$

وحسب الافتراض لدينا $5-u_n>0$ إذن $5(5-u_n)>0$ و $5+(5-u_n)>0$ إذن: $5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}>0$

أي $5-u_{n+1}>0$ وبالتالي: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*: 5-u_n>0}$

2) أ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

- $v_{n+1} = \frac{5}{5-u_{n+1}} = \frac{5}{\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}} = \frac{5+(5-u_n)}{5-u_n} = \boxed{\frac{10-u_n}{5-u_n}}$
- $v_{n+1}-v_n = \frac{10-u_n}{5-u_n}-\frac{5}{5-u_n} = \cancel{\frac{5-u_n}{5-u_n}} = \boxed{1}$

ب- لدينا: (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول

إذن: $v_1=\frac{5}{5-u_1}=\frac{5}{5}=1$ و $v_n = v_1+(n-1)\times r = 1+(n-1) = \boxed{n}$ ومنه $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*: v_n=n}$

- لدينا $v_n=\frac{5}{5-u_n}$ إذن $5-u_n=\frac{5}{v_n}=\frac{5}{n}$ أي $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=5-\frac{5}{n}}$

ج- بما أن $\lim_{+\infty}\frac{5}{n}=0$ إذن: $\lim_{+\infty}u_n=\lim_{+\infty}\left(5-\frac{5}{n}\right)=5$ ومنه $\boxed{\lim_{+\infty} u_n=5}$

التمرين الخامس:

1) أ- لدينا:
- $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\underbrace{(x-2)^2}_{\to+\infty}\underbrace{e^x}_{\to+\infty}=\boxed{+\infty}$

ب- لدينا:
- $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\underbrace{(x-2)^2}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty}=\boxed{+\infty}$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرع شلجمي اتجاهه محور الأراتيب.

2) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا،
- $f(x)=(x-2)^2e^x=(x^2-4x+4)e^x = x^2e^x-4xe^x+4e^x$

إذن: $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x}$

ب- لدينا: $\lim_{-\infty}e^x=0$ و $\lim_{-\infty}-4xe^x=0$ و $\lim_{-\infty}x^2e^x=0$ إذن
- $\boxed{\lim_{-\infty}f(x)=0}$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$.

3) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:
- $f'(x)=((x-2)^2e^x)'=((x-2)^2)'e^x+(x-2)^2(e^x)'$
$=2(x-2)e^x+(x-2)^2e^x=(x-2)e^x(2+(x-2))=\boxed{x(x-2)e^x}$

ب- لنحل المعادلة $f'(x)=0$ لدينا: $f'(x)=0 \iff x(x-2)e^x=0\iff x=0$ أو $x=2$

وبما أن $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		+	0	−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

إذن f دالة تزايدية على المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$

و f دالة تناقصية على المجال $[0,2]$.

ج- جدول التغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

4) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا،

$f''(x)=(x(x-2)e^x)'=(x^2-2x)'e^x+(x^2-2x)(e^x)'$
$=(2x-2+x^2-2x)e^x=(x^2-2)e^x$ ومنه،
- $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}: f''(x)=(x^2-2)e^x}$

لنحل المعادلة $f''(x)=0$ لدينا، $f''(x)=0\iff (x^2-2)e^x=0\iff x^2-2=0\iff x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

جدول إشارة f''.

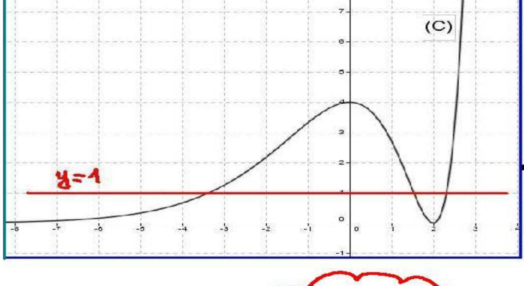
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

إذن، المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولهما $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.

ب- إنشاء المنحنى (C). (أنظر الشكل جانبه)

5) أ- لدينا: $H'(x)=((x-1)e^x)'=(x-1)'e^x+(x-1)e^x = e^x+(x-1)e^x=\boxed{xe^x}$
$=h(x)$

إذن: H دالة أصلية لـ h.



- $\int_0^1 xe^x\,dx = [(x-1)e^x]_0^1 = 0-(-1)=\boxed{1}$

ب- نضع $\begin{cases}u(x)=x^2\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}u'(x)=2x\\ v(x)=e^x\end{cases}$

إذن:
- $\int_0^1 x^2e^x\,dx=[x^2e^x]_0^1-2\int_0^1 xe^x\,dx$
$=(e-0)-2\times1=\boxed{e-2}$

ج-
$A=\left(\int_0^1|f(x)-0|\,dx\right)\times 1\,cm^2$
$=\left(\int_0^1(x^2e^x-4xe^x+4e^x)\,dx\right)cm^2$
$=\left(\int_0^1x^2e^x\,dx-4\int_0^1xe^x\,dx+4\int_0^1e^x\,dx\right)cm^2$
$=(e-2-4\times1+4(e-1))\,cm^2$
$=(5e-10)\,cm^2=\boxed{5(e-2)\,cm^2}$

مع تحيات الحسن Math Hor

6) لدينا: $x^2=e^{-x}+4x-4\iff x^2-4x+4=e^{-x}\iff (x-2)^2e^x=1\iff f(x)=1$

إذن عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم ذو المعادلة $y=1$ وعددها $\boxed{3}$.