Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

ـ حساب نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال اللا جذرية .
ـ حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال الدوال الإعتيادية .

النهايات باستعمال التأطير

تمرين رقم 1 :

لنبين أن $\lim_{x\to 0} x^2+3x=0$.

نعتبر المجال المفتوح المنقط الذي مركزه 0 , $]-1,1[$.

لدينا : $|x^2+3x|=|x||x+3|$ و بما أن $-1<x<1$ فإن $2<x+3<4$ إذن $|x+3|<4$ ومنه $|x^2+3x|<4|x|$.

و بما أن $\lim_{x\to 0} 4|x|=0$ فإن $\lim_{x\to 0} x^2+3x=0$ حسب الخاصية 2 .

$$\lim_{x\to 0} x^2+3x=0$$

بين بالمثل أن $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3+x^2}=0$

تمرين رقم 2 :

لنبين أن $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ بحيث $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

لذالك سوف نطبق الخاصية 3 :

$$|f(x)-3|=\left|\frac{x+1}{x-1}-3\right|=\left|\frac{x+1-3x+3}{x-1}\right|=\left|\frac{-2x+4}{x-1}\right|=\left|\frac{-2(x-2)}{x-1}\right|=2\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

نعتبر المجال المنقط الذي مركزه 2 $\left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[$.

بما أن $x\in\left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[$ فإن $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$ ومنه $\frac{1}{2}<x-1<\frac{3}{2}$ و بالتالي $\frac{1}{2}<|x-1|$ إذن $\frac{1}{|x-1|}<2$ و منه $2\left|\frac{x-2}{x-1}\right|<|x-2|$ إذن $|f(x)-3|<|x-2|$

و نعلم أن $\lim_{x\to 2}|x-2|=0$ إذن $\lim_{x\to 2} f(x)=3$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=3$$

بين بالمثل أن $\lim_{x\to 1} x^2+4x-3=2$

تمرين رقم 3 :

لنبين أن : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2+5}=0$.

لدينا : $\left|\dfrac{4}{x^2+5}\right|=\dfrac{4}{x^2+5}<\dfrac{4}{x^2}$ لأن $x^2+5>x^2$.

و نعلم حسب الخاصية 2 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$ ومنه فإن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2+5}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2+5}=0$$

بين بالمثل أن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$

تمرين رقم 4 :

لنبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ بحيث $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+4}$

لدينا
$$|f(x)-2|=\left|\frac{2x^2-1}{x^2+4}-2\right|=\left|\frac{2x^2-1-2x^2-8}{x^2+4}\right|=\left|\frac{-9}{x^2+4}\right|=\frac{9}{x^2+4}$$

و لدينا $\dfrac{9}{x^2+4}<\dfrac{9}{x^2}$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{9}{x^2}=0$ إذن حسب التعريف $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+4}=2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+4}=2$$

بين بالمثل أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^2+2}=3$

تمرين رقم 5 :

لنبين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ بحيث $f(x)=\frac{x+1}{-x}$

بتطبيق التعريف سوف نبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(-x)=-1$

لدينا $\frac{1}{x}=\left|\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{-x+1+x}{x}\right|=\left|\frac{-x+1}{x}+1\right|=\left|f(-x)-(-1)\right|$ و بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(-x)=-1$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x}=-1$$

تمرين رقم 6 :

لنبين أن $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}=+\infty$.

لدينا : $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\geq\frac{1}{x^2}$ لأن $\sqrt{1+x^2}\geq1$ لكل عدد حقيقي

و لدينا $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}=+\infty$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}=+\infty$$

بين بالمثل أن $\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^4}=+\infty$

تمرين رقم 7 :

لنبين أن $\lim_{x\to1}\frac{3}{(x-1)^2}=+\infty$.

نضع $f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}$ و نستنتج أن $f(1+h)=\frac{3}{h^2}$

ومنه $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{h\to0} f(1+h)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}=+\infty$

$$\lim_{x\to1}\frac{3}{(x-1)^2}=+\infty$$

تمرين رقم 8 :

لنبين أن $\lim_{x\to+\infty} x^4+2x=+\infty$.

لدينا : $x^4+2x=x\left(x^3+2\right)$ و بما أن النهاية بجوار $+\infty$ نفترض أن $x>1$ و بالتالي $x^3+2>1$ و منه $x^4+2x=x\left(x^3+2\right)>x$

ونعلم أن $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} x^4+2x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^4+2x=+\infty$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

النهايات بطريقة التعويض

نهاية الدوال الحدودية :

1 ـ النهاية في عدد حقيقي هي صورته بالدالة :

$$\lim_{x\to 0} 3x^2-2x+4$$

$$\lim_{x\to 0} 3x^2-2x+4=3\times 0^2-2\times 0+4=4$$

$$\lim_{x\to -2} 4x^2+x-1$$

$$\lim_{x\to -2} 4x^2+x-1=4\times(-2)^2+(-2)-1=16-2-1=13$$

1 ـ النهاية في $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الذي لديه أكبرأس :

$$\lim_{x\to +\infty} 2x^2-x-5$$

$$\lim_{x\to +\infty} 2x^2-x-5=\lim_{x\to +\infty} 2x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} 3x^5-2x^2-5x$$

$$\lim_{x\to -\infty} 3x^5-2x^2-5x=\lim_{x\to -\infty} 3x^5=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} -2x^4+3x-2$$

$$\lim_{x\to +\infty} -2x^4+3x-2=\lim_{x\to +\infty} -2x^4=-\infty$$

نهاية الدوال الجذرية :

1 ـ لتحديد نهاية دالة جذرية في عدد حقيقي نعوض المجهول بـــ العدد :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x-3}{x^2}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x-3}{x^2}=\frac{2(-1)-3}{(-1)^2}=\frac{-5}{1}=-5$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2x+3}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2x+3}{(x-2)^2}=\frac{-4+3}{0^2}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x+1}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

2 ـ التعويض يمكن أن يعطينا شكل غير محدد :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$ **شكل غير محدد**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

3 ـ النهاية في $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج الحدين الأكبرأس :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-2x}{2x^2+5}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-2x}{2x^2+5}=\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2}=\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5-2x^2}{2x^2+5x}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x^2}{2x^2+5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{2}=-\infty$$

نهاية الدوال اللا جذرية :

1 ـ لتحديد نهاية دالة لا جذرية في عدد حقيقي نعوض المجهول بـــ العدد :

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\frac{\sqrt{3}}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

شكل غير محدد $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

2 ـ النهاية في $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة لاجذرية :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-2x$$

التعويض $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-2x=+\infty-\infty$ شكل غير محدد

طريقة التعميل $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2\right)$

لأن $\sqrt{x^2+2}=x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$

و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2=\sqrt{1+0^+}-2=1-2=-1$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2\right)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-2x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$

التعويض $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

التعميل $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=\sqrt{1+0^+}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$$

التعويض $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty-\infty$ شكل غير محدد

التعميل $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)=+\infty\times0$ شكل غير محدد

المرافق
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

نهاية الدوال المثلثية :

نعتمد كثيرا على النهايات التالية :

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{5x}\times\frac{5x}{\sin 5x}=1\times\frac{1}{5}\times1=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}4\times\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}=4\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^4}{\cos x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^4}{\cos x^2-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2\left(x^2\right)^2}{1-\cos x^2}=-2\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2\right)^2}{1-\cos x^2}=-2\times2=-4$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to0}2\times\frac{\sin 2x}{2x}=2\times\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\times1=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1^2=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{4x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3x}{4x}\times\frac{4x}{\sin 4x}=1\times\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}4\times\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

نقوم بتغيير المتغير x . و نضع $t=\frac{\pi}{2}-x$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5}{x}+x^2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5}{x}+x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5}{x}+\lim_{x\to-\infty}x^2=0+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x}{|x-1|-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x}{|x-1|-1}=\frac{0}{0}$$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x}{|x-1|-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x}{x-1-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to1^+}x=1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x}{|x-1|-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x}{-x+1-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x}{-x}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-2)}{-x}=\lim_{x\to1^+}-(x-2)=1$$

إذن : $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x}{|x-1|-1}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=+\infty-\infty$$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-(x-1)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$$ شكل غير محدد

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+1-4}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3x-3}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\lim_{x\to1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)=\lim_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{t\to0}\frac{-t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{-\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\lim_{t\to0}-\frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\frac{-2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}=-1$$

تمارين إضافية :

حدد النهايات التالية :

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$\lim_{x\to 3} 5x^2+7x-2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x} \qquad \lim_{x\to -\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 2x} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{-x+1}$$

$$\lim_{x\to -\infty} -x^2+5x+4 \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x-1}{x^2-4x+5}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4+x+1}{1-x^5} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x+2}$$

النهايات بالتأطير

تمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

1 – بين أن $|f(x)|\le \dfrac{1}{2}|x|$ **لكل** $x\in\mathbb{R}^*$.

2 – ما ذا نستنتج ؟

الحل :

1 – ليكن $x\in\mathbb{R}^*$. لدينا :

$$|f(x)|=\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right|=\left|\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|=\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

و بما ان لكل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $\sqrt{1+x^2}\ge 1$ إذن $\sqrt{1+x^2}+1\ge 2$ ومنه $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\le\dfrac{1}{2}$.

و بالتالي $\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1}\le\dfrac{1}{2}|x|$ ومنه $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$.

2 – بما أن $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}|x|$ و $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ فإن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

تمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$.

1 – بين أن $f(x)\le\dfrac{1}{2x}$ **لكل** $x\in\mathbb{R}^{*+}$.

2 – ثم استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

الحل :

1 – ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$. لدينا :

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

و بما أن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ فإن $1+x^2>x^2$ ومنه $\sqrt{1+x^2}>x$ إذن $\sqrt{1+x^2}+x>2x$ و بالتالي $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}<\dfrac{1}{2x}$.

إذن $f(x)<\dfrac{1}{2x}$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr.

2 – بما ان $0<f(x)<\dfrac{1}{2x}$ لكل $x\in\mathbb{R}^{*+}$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$.

أجب بنفس الطريقة على :

تمرين رقم 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\frac{-2x^2+x-6}{x^2+3}$.

1 – بين أن $\left|f(x)+2\right|\leq\frac{1}{x}$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$.

2 – ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

تمرين رقم 4 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=x\sin x+2x$.

1 – بين أن $f(x)>x$ لكل $x\in\mathbb{R}^{*+}$

2 – ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

التمرين 1 :

أحسب النهايات التالية :

(i : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-2x}$; (vii : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-1}$

(ii : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{2x^2-2x}$; (viii : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^5-5x+6}$

(iii : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{3x^2-6x}$; (ix : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(iv : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$; (x : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

(v : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}$; (xi : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x}$

(vi : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{4x^2+5}-3}$; (xii : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

التمرين 2 :

أحسب النهايات التالية :

(i : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-1}{|x-2|}$; (vii : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

(ii : $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1-2x}{(x+3)^2}$; (viii : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+2x}{x^2-x}$

(iii : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{4-2x}{x^2-4x+4}$; (ix : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x$

(iv : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3-4x}$; (x : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x$

(v : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$; (xi : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1+2\sqrt{1-x}}{(x-1)\left(1-\sqrt{1-x}\right)}$

(vi : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x^2}{x^2-1}$; (xii : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+|x|}}$

التمرين 3 :

أحسب النهايات التالية :

(i : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-x)}{x-1}$; (v : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

(ii : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$; (vi : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$

(iii : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\tan(x^2-3x)}{x-3}$; (vii : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sin x}$

(iv : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos 3x}$; (viii : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$

التمرين 4 :

أحسب النهايتين التاليتين :

(i : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$; (ii : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}$

التمرين 5 :

أحسب النهايات التالية :

(i : $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$; (vii : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\cos x}{x+1}}{x}$

(ii : $\lim\limits_{x\to +\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; (viii : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(iii : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$; (ix : $\lim\limits_{x\to 0}\tan\left(\sqrt{x^2+\dfrac{\pi^2}{4}}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(iv : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$; (x : $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\pi\dfrac{\sin x}{x}\right)$

(v : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; (xi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$

(vi : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{(2x-\pi)^2}$; (xii : $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

التمرين 6 :

أحسب النهايات التالية :

(i : $\lim\limits_{x\to -\infty}x^3-2x^2$; (vii : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+1}{(x+3)^2}$

(ii : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2+x+1}{x+2}$; (viii : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+2}}{x}$

(iii : $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}$; (ix : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{x+1}-x$

(iv : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}$; (x : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{2x}$

(v : $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1$; (xi : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(vi : $\lim\limits_{x\to +\infty}x+\sin x$; (xii : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

التمرين 7 :

أحسب النهايتين التاليتين :

(i : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$; (ii : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

التمرين 8 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I=\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$$

1. أ- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

ب- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

2. أ- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ؛