أكاديمية الدار البيضاء

نيابة ابن مسيك

ثانوية أبي شعيب الدكالي

ملخصات مركزة في مادة:

الرياضيات

السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة العلوم التجريبية**
  - مسلك علوم الحياة و الأرض
  - مسلك العلوم الفيزيائية
  - مسلك العلوم الزراعية
- **شعبة العلوم و التكنولوجيات الصناعية**
  - مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية
  - مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

من إعداد: الأستاذ محمد الكيال

وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا

الفهرس

إشارة حدانية

إشارة و تعميل ثلاثية الحدود

ذ. محمد الكيال

↩ إشارة الحدانية: $ax+b$ $\qquad (a \neq 0)$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

↩ إشارة و تعميل ثلاثية الحدود: ax^2+bx+c $\qquad (a \neq 0)$

نضع : $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$

المميز		حل المعادلة: $\mathrm{P}(x)=0 \quad x \in \mathbb{R}$	إشارة $\mathrm{P}(x)$	تعميل $\mathrm{P}(x)$
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$S = \varnothing$	x: $-\infty$ … $+\infty$ $\mathrm{P}(x)$: إشارة a	غير ممكن بواسطة حدانيتين
	$\Delta = 0$	$S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ … $-\dfrac{b}{a}$ … $+\infty$ $\mathrm{P}(x)$: إشارة a … 0 … إشارة a	$\mathrm{P}(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$
	$\Delta > 0$	$S = \{x_1 ; x_2\}$ حيث: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $\mathrm{P}(x)$: إشارة a … 0 … عكس إشارة a … 0 … إشارة a (نفترض أن: $x_1 < x_2$)	$\mathrm{P}(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2+bx+c=0 \quad x \in \mathbb{R} \quad (a \neq 0)$

فإن: $\quad x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \quad$ و $\quad x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

متطابقات هامة

مجموعة تعريف دالة عددية

ذ. محمد الكيال

متطابقات هامة:

لكل عددين حقيقيين a و b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

لتكن P و Q حدوديتين

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = \mathrm{P}(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{\mathrm{P}(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \mathrm{P}(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \mathrm{P}(x) \geq 0$ و $Q(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)} \geq 0\right.$ و $\left.Q(x) \neq 0\right\}$

ذ. محمد الكيال

النهايات (تذكير)

نهايات الدوال $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذا كان n عددا زوجيا فإن:	إذا كان n عددا فرديا فإن:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة	نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

نهايات الدوال المثلثية:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\Longrightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$		$\sqrt{\ell}$
$+\infty$		$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

النهايات و الترتيب:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-\ell| \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)+f(x)]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [g(x)\times f(x)]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية خارج دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م	ش غ م

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال في نقطة:

تعريف:

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:

- f متصلة على اليمين في $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- f متصلة على اليسار في $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

f متصلة في $x_0 \Leftrightarrow$ f متصلة على اليمين و على اليسار في x_0

الاتصال على مجال:

تكون f دالة متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل عنصر من المجال $]a,b[$

تكون f دالة متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على اليمين في a و متصلة على اليسار في b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ و $f\times g$ و kf متصلة على المجال I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: gof متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	المجال $f(I)$	
	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x);\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-}f(x);\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty}f(x);\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty}f(x);\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right[$

مبرهنة القيم الوسيطية:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a)\times f(b)<0$
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

إذا كان: $f(a)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$	إذا كان: $f(b)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$
فإن: $a<\alpha<\dfrac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\dfrac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α	فإن: $\dfrac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\dfrac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها

الاشتقاق

↩ قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز : $f'(x_0)$

↩ معادل المماس لمنحنى دالة – الدالة التألفية المماسة لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

- معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 و هي تقريب للدالة f بجوار x_0

↩ قابلية الاشتقاق على اليمين – قابلية الاشتقاق على اليمين :

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في x_0 و يرمز له بالرمز : $f'_d(x_0)$

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت النهاية : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في x_0 و يرمز له بالرمز : $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

↩ الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

↩ جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k \in \mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

➥العمليات على الدوال المشتقة- مشتقة مركب دالتين - مشتقة دالة الجذر:

$(k \in \mathbb{R}) \quad (ku)' = k(u)'$	$(u-v)' = u' - v'$	$(u+v)' = u' + v'$
$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$		$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$		$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		$(u \circ v)' = [u' \circ v] \times v'$

➥الاشتقاق و تغيرات دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- ◈ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ تزايدية على المجال I
- ◈ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ تناقصية على المجال I
- ◈ $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ ثابتة على المجال I

➥الاشتقاق و التأويل الهندسي:

النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي للمنحنى (C_f) يقبل :
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق في x_0	مماسا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0; f(x_0))$ موجه نحو الأسفل

محور التماثل – مركز التماثل
نقطة الانعطاف

ذ. محمد الكيال

محور التماثل:

يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

إذا تحقق الشرطان التاليان :

- $(2a - x) \in D_f \qquad \forall x \in D_f$
- $f\left(2a - x\right) = f\left(x\right) \qquad \forall x \in D_f$

مركز التماثل:

تكون النقطة $I\left(a, b\right)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

إذا تحقق الشرطان التاليان :

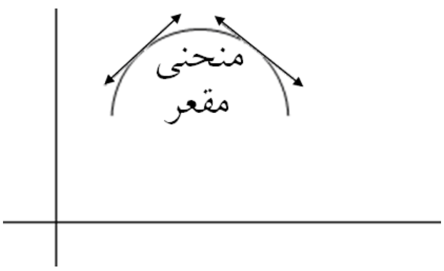
- $(2a - x) \in D_f \qquad \forall x \in D_f$
- $f\left(2a - x\right) + f\left(x\right) = 2b \qquad \forall x \in D_f$

التقعر – التحدب - نقطة الانعطاف:

يكون منحنى دالة مقعرا على مجال إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على هذا المجال

إذا كان : $f''\left(x\right) \le 0 \qquad \forall x \in I$

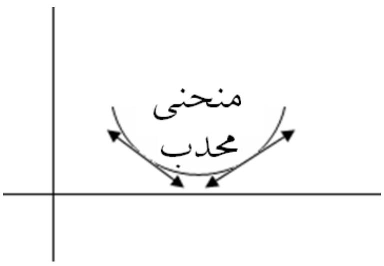
فإن : المنحنى $\left(C_f\right)$ يكون مقعرا على المجال I



يكون منحنى دالة محدبا على مجال إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على هذا المجال

إذا كان : $f''\left(x\right) \ge 0 \qquad \forall x \in I$

فإن : المنحنى $\left(C_f\right)$ يكون محدبا على المجال I



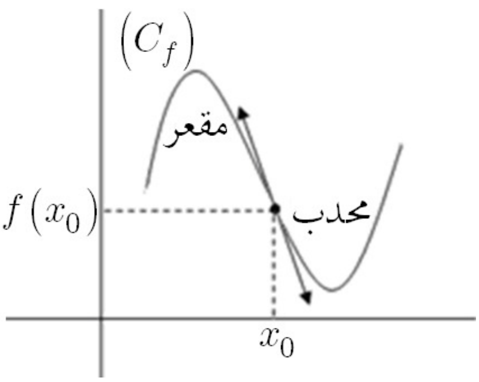
نقطة انعطاف منحنى دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها يتغير تقعر هذا المنحنى

إذا كانت f'' تنعدم في x_0 مع تغيير الإشارة

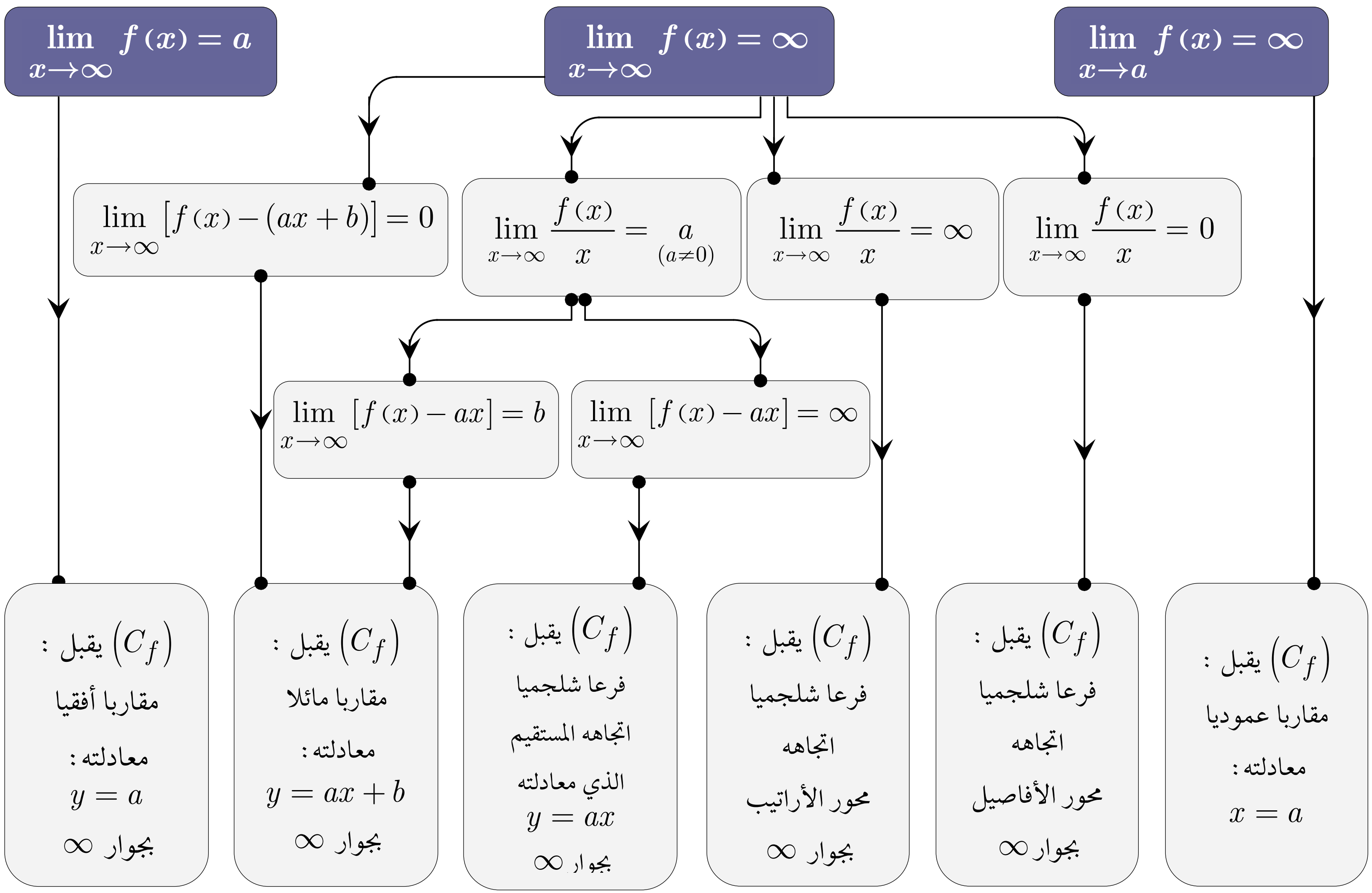
فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0

إذا كانت f' تنعدم في x_0 دون تغيير الإشارة

فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0



الفروع اللانهائية



د: محمد الكبال

خاصية:

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
فإن f تقبل دالة عكسية معرفة من المجال $f(I)$ نحو المجال I
و يرمز لها بالرمز : f^{-1}

نتائج:

- $\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases}$
- $\left(f^{-1}of\right)(x) = x \quad \forall x \in I$
- $\left(fof^{-1}\right)(y) = y \quad \forall y \in f(I)$

تحديد صيغة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
ليكن x عنصرا من المجال $f(I)$ و y عنصرا من المجال I
بالاستعانة بالتكافؤ التالي : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$
و بتحديد y بدلالة x نستنتج صيغة $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من $f(I)$

اتصال الدالة العكسية:

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
فإن الدالة العكسية f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$

اشتقاق الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
و ليكن x_0 عنصرا من المجال $f(I)$ و $y_0 = f(x_0)$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$
فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0
و لدينا : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عل المجال I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على المجال I
فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$
و لدينا : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} \quad \forall x \in f(I)$

↩ رتابة الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I

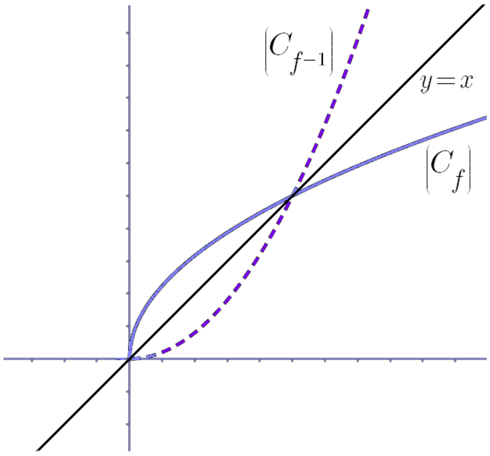
الدالة العكسية f^{-1} لها نفس منحى تغير الدالة f

↩ التمثيل المبياني للدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I

التمثيلان المبيانيان للدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ممنظم

متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم



↩ ملاحظات هامة:

المنحنى (C_f)	المنحنى $(C_{f^{-1}})$
$A(a,b)\in(C_f)$	$A'(b,a)\in(C_{f^{-1}})$
يقبل مقاربا عموديا معادلته : $x=a$	يقبل مقاربا أفقيا معادلته : $y=a$
يقبل مقاربا أفقيا معادلته : $y=b$	يقبل مقاربا عموديا معادلته : $x=b$
يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y=ax+b$	يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y=\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$ و يتم تحديد المعادلة انطلاقا من العلاقة : $x=ay+b$
يقبل مماسا (أو نصف مماس) عموديا	يقبل مماسا (أو نصف مماس) أفقيا
يقبل مماسا (أو نصف مماس) أفقيا	يقبل مماسا (أو نصف مماس) عموديا

دالة الجذر من الرتبة $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

القوى الجذرية

ذ. محمد الكيال

خاصية وتعريف:

الدالة : $x\mapsto x^n$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

ويرمز لها بالرمز: $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ }:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$$
$$x\mapsto\sqrt[n]{x}$$

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow x=y^n$$

حالات خاصة:

- $\sqrt{x}=\sqrt[2]{x}$
- العدد : $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب ل x

خاصيات:

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x^n}=x$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$$
$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$$
$$\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x>y$$

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}_+^2\qquad \forall(m;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$

$$\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\times y}$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$$
$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\qquad(y\neq 0)$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}$$

ملاحظة هامة:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}$$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$D_f=[0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_u$ و $u(x)\geq 0\}$

النهايات:

$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}$
$\ell\geq 0$		$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$		$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا :

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا :

$$\forall x \in I \qquad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$$

حل المعادلة: $x^n = a$ $\quad x \in \mathbb{R} \quad (a \in \mathbb{R})$

	عدد فردي n	عدد زوجي n
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{\lvert a \rvert}\}$	$S = \varnothing$

القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

ليكن $r = \frac{p}{q}$ عددا جذريا غير منعدم حيث : $p \in \mathbb{Z}^*$ و $q \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

ملاحظات:

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
- مجموعة تعريف دالة عددية f لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = [u(x)]^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*)$

  هي : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

لكل عنصرين x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل عنصرين r و r' من $\mathbb{Q}^*$

- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
- $(x \times y)^r = x^r \times y^r$
- $\frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'}$
- $\left(\frac{x^r}{x^{r'}}\right) = x^{r-r'}$

المتتاليات العددية

المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية:

	متتالية حسابية	متتالية هندسية
تعريف	$u_{n+1} = u_n + r$ r هو الأساس	$u_{n+1} = q \times u_n$ q هو الأساس
الحد العام	$u_n = u_p + (n-p)r$ $(p \leq n)$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ $(p \leq n)$
مجموع حدود متتابعة	$u_p + \ldots + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$	$u_p + \ldots + u_n = u_p \times \left(\dfrac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$ $(q \neq 1)$
a و b و c ثلاثة حدود متتابعة	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $u_n \leq M$ $\quad \forall n \in I \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة بالعدد M
- $u_n \geq m$ $\quad \forall n \in I \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة بالعدد m
- $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ محدودة

رتابة متتالية عددية:

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- $u_{n+1} \leq u_n$ $\quad \forall n \in I \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية
- $u_{n+1} \geq u_n$ $\quad \forall n \in I \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية
- $u_{n+1} = u_n$ $\quad \forall n \in I \Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة

↩ نهاية متتالية:

◈ نهاية المتتالية (n^{α}) حيث: $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$

◈ نهاية المتتالية الهندسية (q^{n}) حيث: $q \in \mathbb{R}$:

$q \le -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
المتتالية (q^{n}) ليس لها نهاية	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n} = +\infty$

↩ مصاديق التقارب:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

$$\left.\begin{array}{l} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - \ell| \le v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \ge v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

↩ متتالية من النوع $u_{n+1} = f(u_n)$:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f دالة متصلة على مجال I بحيث $f(I) \subset I$ و a عنصرا من I

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها ℓ حل للمعادلة : $f(x) = x$

الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

نقول أن F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

إذا تحقق الشرطان التاليان :

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

خاصيات:

كل دالة متصلة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن :

جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي :

$$x \mapsto F(x) + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I

وليكن x_0 عنصرا من I و y_0 عنصرا من $\mathbb{R}$

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I

تحقق الشرط البدئي : $F(x_0) = y_0$

الدوال الأصلية: لمجموع دالتين- لجدا ء دالة و عدد حقيقي:

خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I و k عددا حقيقيا

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على المجال I على التوالي فإن :

- $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I
- kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

↩ جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$F(x)$	
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$	
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	
x^r $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$	
$\sin x$	$-\cos x + k$	
$\cos x$	$\sin x + k$	
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$	
e^x	$e^x + k$	$(k \in \mathbb{R})$

↩ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية:

$f(x)$	$F(x)$	
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$	
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$	
$u'(x) \times [u(x)]^r$ $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$	
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$	
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$	
$\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	
$\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$	$(k \in \mathbb{R})$

تكامل دالة متصلة على قطعة:

تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I

و a و b عنصرين من المجال I

تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

خاصيات:

الخطانية:

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$

علاقة شال:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

التكامل و الترتيب:

إذا كان: $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$	إذا كان: $f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

القيمة المتوسطة للدالة على المجال هي العدد الحقيقي : $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

المكاملة بالأجزاء:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث الدالتين u' و v' متصلتين على المجال I

و a و b عنصرين من المجال I

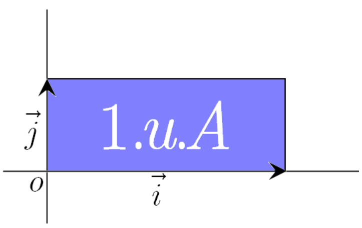
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

مساحة حيز

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة o و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

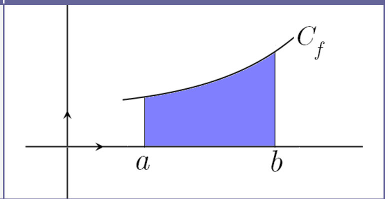
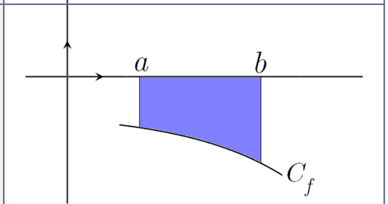
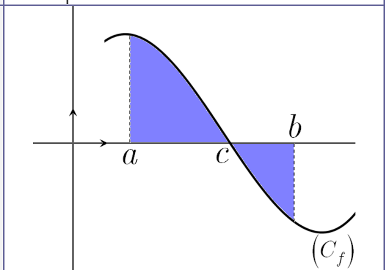
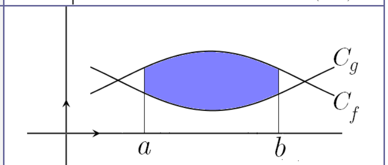
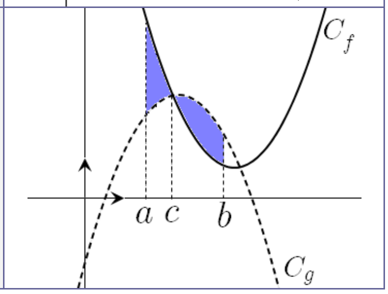
$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما :
$x=a$ و $x=b$
هي : $\left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right).u.A$

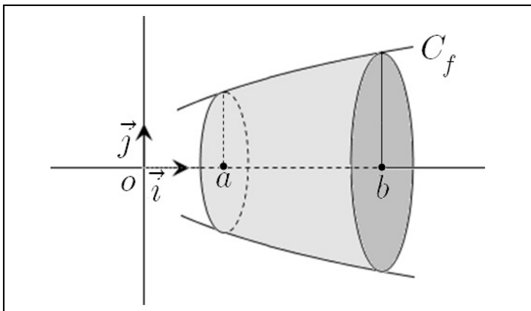
لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنين C_f و C_g ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما :
$x=a$ و $x=b$ هي :
هي : $\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\right).u.A$

حالات خاصة:

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز البنفسجي في الرسم هي :
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right).u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)\,dx\right).u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx\right).u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right).u.A$
	• (C_f) فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx\right).u.A$

حساب حجم:

حجم الجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a;b]$
هو : $V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx\right]u.v$
uv : وحدة الحجوم



الدالة اللوغاريتمية النبيرية

تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln(x^n) = n\ln|x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \neq 0\}$

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x^n \ln x) = 0$	
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

◈ **الاشتقاق:**

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ولدينا:

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

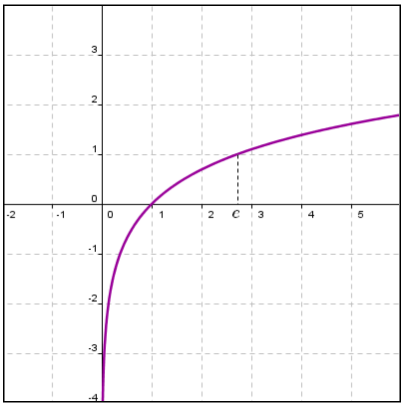
لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن : الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا : $(\ln[u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \qquad \forall x \in I$

◈ **التمثيل المبياني:**



◈ **إشارة ln :**

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	

↰ الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

◈ **تعريف:**

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: ℓog_a

حيث : $\ell og_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$

◈ **استنتاجات وخاصيات:**

$\ell og_a 1 = 0$

$\ell og_a a = 1$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$\ell og_a x = \ell og_a y \Leftrightarrow x = y$

$\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

$\ell og_a(xy) = \ell og_a x + \ell og_a y$

$\ell og_a(x^r) = r\ell og_a x \quad (r \in \mathbb{Q})$

$\ell og_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell og_a x$

$\ell og_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$

◈ **نهايات و متفاوتات:**

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x < \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

◈ **المشتقة:**

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

الدالة اللوغاريتمية النبيرية

تعريف:

الدالة الأسية النبيرية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية النبيرية
و يرمز لها بالرمز : $\exp$
نضع لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad \exp(x) = e^x$

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx}$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0,+\infty[\quad e^{\ln x} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n e^x) = 0$	
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

الاتصال:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$

لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

◈ **الاشتقاق:**

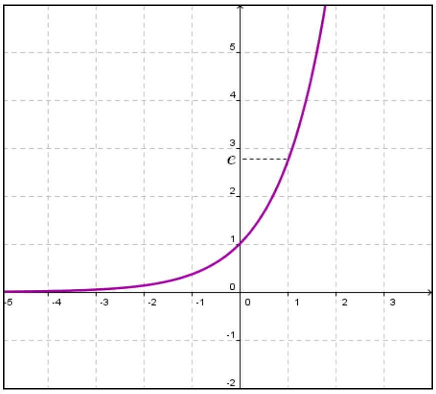
الدالة $x \mapsto e^{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $\left(e^{x}\right)' = e^{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن : الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني للدالة ln :



الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$

◈ **تعريف:**

الدالة العكسية للدالة ℓog_{a} تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز: $\exp_{a}$

نضع لكل x من $\mathbb{R}$: $\exp_{a}(x) = a^{x}$

◈ **استنتاجات وخاصيات:**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^{x} = e^{x \ln a}$ $\ell og_{a}\left(a^{x}\right) = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{2}$ $a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad \left(a^{x}\right)^{r} = a^{rx}$ $\dfrac{1}{a^{x}} = a^{-x}$ $\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\ell og_{a}(x)} = a$	
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{2} \quad a^{x} = a^{y} \Leftrightarrow x = y$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[$ $a^{x} = y \Leftrightarrow x = \ell og_{a}(y)$	

◈ **نهايات و متفاوتات:**

$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{x} > a^{y} \Leftrightarrow x > y$	$a^{x} < a^{y} \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \ln a$	

◈ **المشتقة :**

$$\left(a^{x}\right)' = (\ln a) \times a^{x}$$

الأعداد العقدية

ذ. محمد الكيال

مجموعة الأعداد العقدية هي : $\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1 \right\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\mathrm{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\mathrm{Im}(z)$

حالتان خاصتان:

- إذا كان : $\mathrm{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي
- إذا كان : $\mathrm{Re}(z) = 0$ و $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

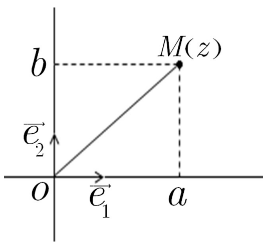
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ و } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

التمثيل المبياني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

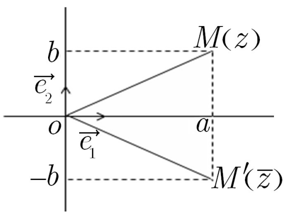
نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a, b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب : $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب : $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z = Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$

مرافق عدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

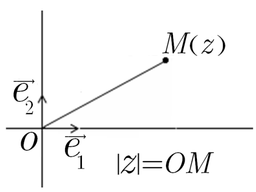
مرافق العدد z هو العدد العقدي : $\overline{z} = a - ib$



$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	$\overline{z} = z \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي
$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	$\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف
$\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$	$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$	$z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\left|z^n\right| = |z|^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right) \qquad \left|z \times z'\right| = |z| \times \left|z'\right|$$

$$|-z| = |z| \qquad |\overline{z}| = |z|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) \qquad \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$$

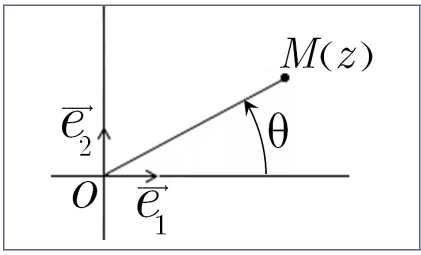
الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta\,[2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta\,[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$

- $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z\,[2\pi]$
- $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \arg z \quad [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') \quad [2\pi]$

- $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr';\theta + \theta']$
- $\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$
- $-[r,\theta] = [r,\pi + \theta]$
- $[r,\theta]^n = [r^n; n\theta]$
- $\frac{1}{[r';\theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$
- $\frac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r,\theta]$$

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

صيغة موافر:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

صيغتا أولير:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

حل المعادلة $z^2 = a$ $\;z \in \mathbb{C}$ حيث $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ $z\in\mathbb{C}$ حيث: a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

المعادلة:		مجموعة حلول المعادلة:
$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$	$\Delta>0$	$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
المسافة AB	$AB=\left\|z_B-z_A\right\|$
I منتصف القطعة $[A;B]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$	$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A و B و C نقط مستقيمية	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
A و B و C و D نقط متداورة	$\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\times\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\times\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$\left\|z-z_A\right\|=r$ $(r>0)$	• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$\left\|z-z_A\right\|=\left\|z-z_B\right\|$	• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

تمثيلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل	تمثيله العقدي هو:
الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$	$z'=z+b$ حيث b لحق المتجهة $\vec{u}$
التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k	$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω
الدوران r الذي مركزه Ω و زاويته θ	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω

المعادلة التفاضلية :	الحل العام للمعادلة التفاضلية :
$y' = ay + b$ $(a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

المعادلة التفاضلية :	معادلتها المميزة :	المعادلة المميزة تقبل :		الحل العام للمعادلة التفاضلية :
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = a^2 - 4b)$	$\Delta > 0$	حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	حلين عقديين مترافقين : $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

في سياق هذا الملخص ليكن الفضاء منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

الصيغة التحليلية ل: الجداء السلمي - منظم متجهة - الجداء المتجهي

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين من ϑ_3

- $\vec{u}.\vec{v} = aa'+bb'+cc'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

المسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة نقطة M عن مستوى (P) معادلته $ax+by+cz+d=0$ هي :

$$d\left(M,(\mathrm{P})\right) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

المسافة نقطة M عن مستقيم $\Delta\left(A,\vec{u}\right)$ هي :

$$d\left(A,(\Delta)\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

معادلة مستوى:

$\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية على المستوى (P) $\Leftrightarrow (\mathrm{P}) : ax+by+cz+d=0$

إذا كانت A و B و C نقط غير مستقيمة فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

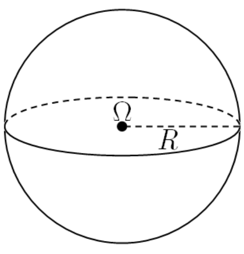
يمكن تحديد معادلة المستوى (ABC) بالاستعانة بالتكافؤ التالي :

$$M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

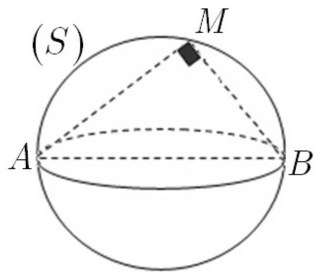
معادلة فلكة:

معادلة فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها R هي :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$



معادلة فلكة (S) أحد أقطارها $[AB]$ يمكن تحديدها بالاستعانة بالتكافؤ التالي : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

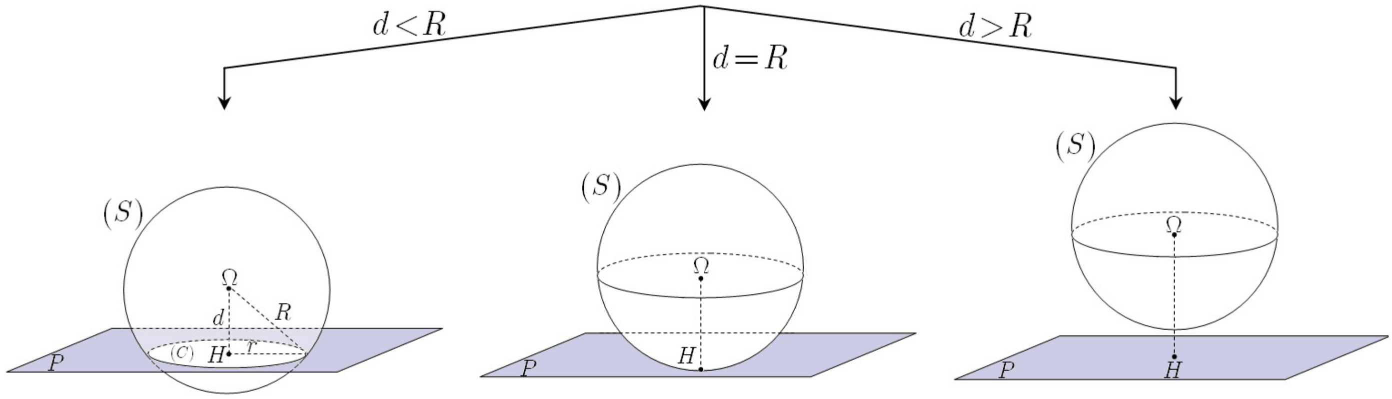


ملاحظة : الفلكة (S) مركزها Ω منتصف $[AB]$ و شعاعها $\dfrac{AB}{2}$

↩ تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستوى $(\mathrm{P}) : ax + by + cz + d = 0$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع : $d = \Omega H = d(\Omega;(\mathrm{P}))$



المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)
مركزها : H
وشعاعها : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

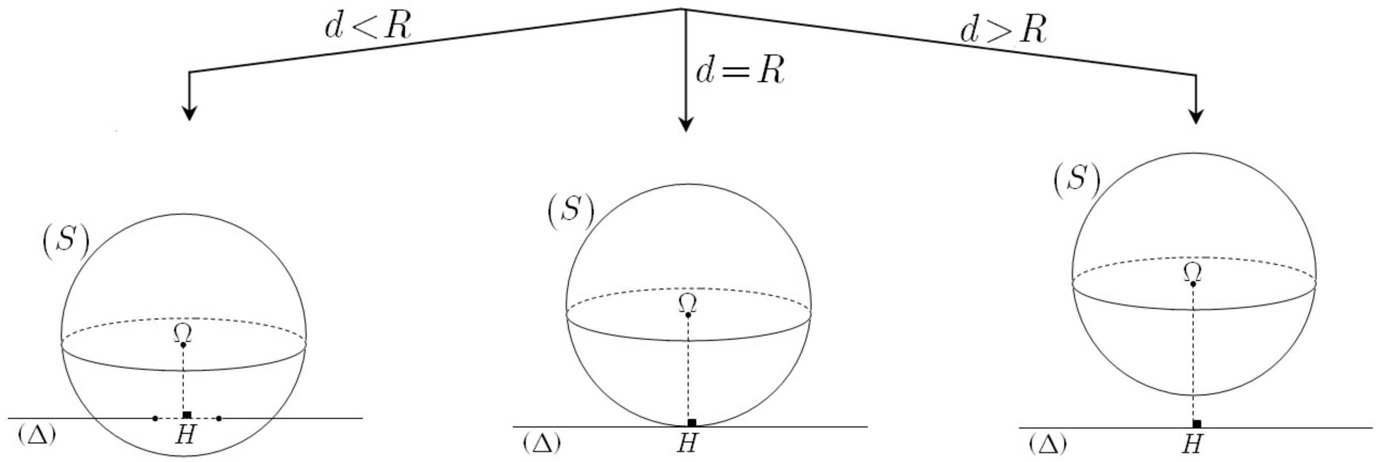
المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) و الفلكة (S) لا يتقاطعان

↩ تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستقيم (Δ):

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Δ)

نضع : $d = \Omega H = d(\Omega;(\Delta))$



المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين

المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستقيم (Δ) الفلكة (S) لا يتقاطعان

رئيسي مجموعة:

تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $CardE$

حالة خاصة: $Card\varnothing = 0$

خاصية:

A و B مجموعتان منتهيتان

$$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$$

متمم مجموعة:

تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E

متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\overline{A}$

حيث $\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

ملاحظات:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $card\overline{A} = cardE - cardA$

المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا $(p \in \mathbb{N}^*)$

إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

و كان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

....

و كان الاختيار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$

الترتيبات بتكرار - الترتيبات بدون بتكرار:

الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

❖ الترتيبات بدون بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{من العوامل } p}$$

حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

و عددها : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

↩ التاليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p $(p \leq n)$

يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر

و عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

↩ الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $0! = 1$	
$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
$C_n^{n-1} = n$; $C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$
$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	$C_n^p = C_n^{n-p}$

↩ بعض أنواع السحب:

نسحب p عنصر من بين n عنصر $(p \leq n)$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

نوع السحب :	عدد السحبات الممكنة هو :	الترتيب
آني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون إحلال	A_n^p	مهم

الاحتمالات

مصطلحات

المصطلح الاحتمالي :	معناه :
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانيات	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزء من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A \cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A \cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\overline{A}$ $\left(A \cap \overline{A} = \varnothing \text{ و } A \cup \overline{A} = \Omega\right)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A \cap B = \varnothing$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- عندما يستقر احتمال حد ث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو : p_i
  ونكتب : $P\left(\{\omega_i\}\right) = p_i$
- احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث
  أي إذا كان $A = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3;\dots;\omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو :
  $$p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots + p(\omega_n)$$

خاصيات:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- $p(\varnothing) = 0$ و $p(\Omega) = 1$
- $0 \le p(A) \le 1$ لكل حدث A من Ω
- احتمال اتحاد حدثين :
  لكل حدثين A و B من Ω
  $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ إذا كان A و B غير منسجمين
- احتمال الحدث المضاد :
  لكل حدث A من Ω : $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

فرضية تساوي الاحتمالات:

تعريف:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω

فإن احتمال كل حدث A من Ω هو : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega}$

الاحتمال الشرطي - استقلالية حدثين:

◈ **تعريف:**

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \neq 0$

احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد: $p_A(B) = p\left(B/_A\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

◈ **نتيجة:**

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث: $p(A) \times p(B) \neq 0$

لدينا: $p(A \cap B) = p(A) \times p\left(B/_A\right) = p(B) \times p\left(A/_B\right)$

◈ **تعريف:**

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

A و B حدثان مستقلان $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

◈ **خاصية:**

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيئا ل Ω

$(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ و $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega)$

لكل حدث A من Ω: $p(A) = p(\Omega_1) \times p\left(A/_{\Omega_1}\right) + p(\Omega_2) \times p\left(A/_{\Omega_2}\right)$

الاختبارات المتكررة:

ليكن A حدثا في تجربة عشوائية احتماله p

إذا أعيدت هذه التجربة n مرة فان احتمال تحقق الحدث A , k مرة بالضبط هو:

$$C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} \qquad (k \leq n)$$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين:

- تحديد $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X = x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1;2;...;n\}$

الأمل الرياضي - المغايرة - الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه معرف بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

◈ **تعاريف:**

الأمل الرياضي للمتغير X :	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + ... + x_n \times p_n$
المغايرة للمتغير X :	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
الانحراف الطرازي للمتغير X :	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية, نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

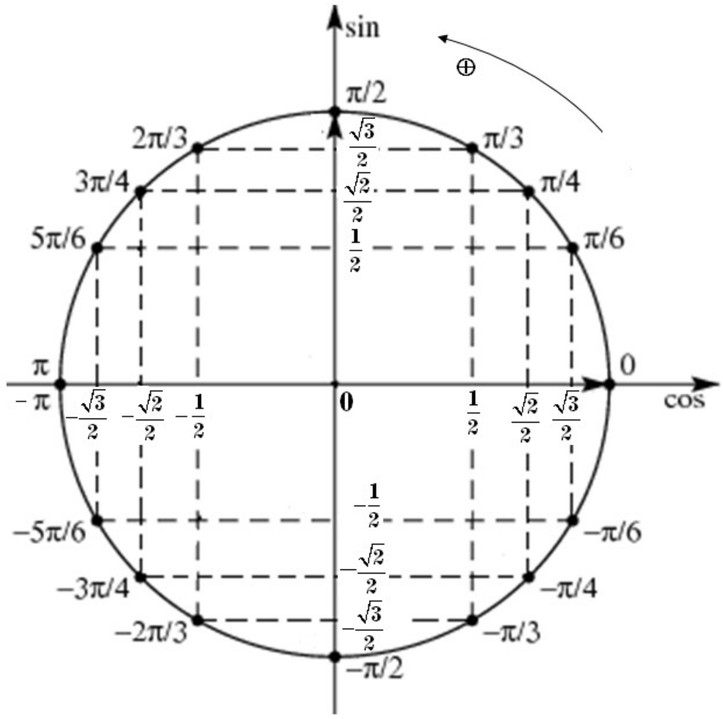
ولدينا $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \qquad \forall k \in \{0;1;2;...;n\}$

و $E(X) = n \times p$ و $V(X) = np(1-p)$

الحساب المثلثي (تذكير)

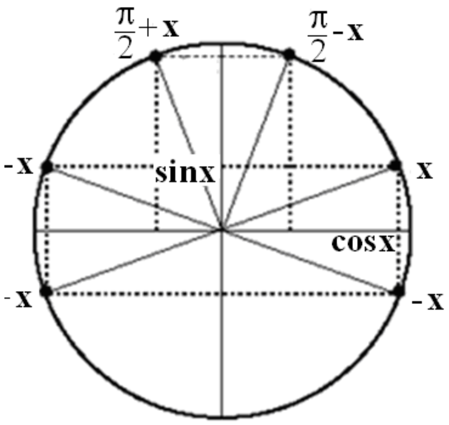
ذ. محمد الكيال

جدول القيم الاعتيادية و الدائرة المثلثية:



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

العلاقات بين النسب المثلثية:



	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

$\cos(x+2k\pi) = \cos x$ $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ $\tan(x+k\pi) = \tan x$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

معادلات مثلثية أساسية:

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ أو $x = -a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ أو $x = (\pi - a) + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

صيغ تحويل مجموع:

$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\times\sin b$	$\cos(a-b)=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b$
$\sin(a+b)=\sin a\times\cos b+\cos a\times\sin b$	$\sin(a-b)=\sin a\times\cos b-\cos a\times\sin b$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$	$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$

نتائج:

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$=2\cos^2 a-1$$
$$=1-2\sin^2 a$$
$$\sin 2a=2\sin a\times\cos a$$
$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

بوضع: $t=\tan\frac{a}{2}$

$$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan a=\frac{2t}{1-t^2}$$

تحويل جداء إلى مجموع :

$$\cos a\times\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$
$$\sin a\times\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$
$$\cos a\times\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

تحويل مجموع إلى جداء :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

تحويل: $a\cos x+b\sin x$ $\qquad (a,b)\neq(0,0)$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

حيث α عدد حقيقي يحقق:

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$