الرياضيات

تمارين وحلول

سلسلة ديما ديما

السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة العلوم الرياضية (أ و ب)

التحليل

- ملخصات مركزة للدروس
- نماذج مختارة من امتحانات البكالوريا
- مسائل توليفية
- مواضيع للدراسة

تأليف

عبد السلام حقاني

محمد غزايلي

الفهـــرس

النهايات

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f): 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f): x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f): x>B \Rightarrow f(x)>A$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \iff (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f): x>B \Rightarrow f(x)<-A$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty} f(-X)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \iff (\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f): 0<x-x_0<\alpha \Rightarrow f(x)>A$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \iff (\forall A>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f): 0<x_0-x<\alpha \Rightarrow f(x)>A$$

النهاية والترتيب

لتكن f و g و h و u دوال عددية معرفة على مجال منقط I مركزه x_0 ولدينا

- $$\begin{cases}(\forall x\in I)\ \ |f(x)-\ell|\le u(x)\\ \lim_{x\to x_0} u(x)=x_0\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

- $$\begin{cases}(\forall x\in I)\ \ f(x)\le g(x)\\ \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\ ,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell'\end{cases} \Longrightarrow \ell\le\ell'$$

- $$\begin{cases}(\forall x\in I)\ \ g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=\ell\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

- $$\begin{cases}(\forall x\in I)\ \ f(x)\le g(x)\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

- $$\begin{cases}(\forall x\in I)\ \ f(x)\le g(x)\\ \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$$

اتصال دالة في نقطة

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0.

f متصلة في النقطة x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f متصلة على اليمين في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f متصلة على اليسار في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

f متصلة في النقطة x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة على اليمين وعلى اليسار في x_0

التمديد بالاتصال

f دالة تقبل تمديداً بالاتصال في نقطة x_0 إذا توفر لدينا الشرطين:

(1) $x_0 \notin D_f$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

والتمديد بالاتصال للدالة f في x_0 هي الدالة $\tilde{f}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & ; x \in D_f \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$

اتصال مركب دالتين

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$.

إذا كانت f متصلة في النقطة x_0 و g متصلة في النقطة $y_0 = f(x_0)$ فإن الدالة gof متصلة في النقطة x_0.

إذا كانت f متصلة على المجال I و g متصلة على المجال J فإن الدالة gof متصلة على المجال I.

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ g \text{ متصلة في } x_0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (gof)(x) = g(\ell)$$

الأشكال الغير المحددة

"$\infty - \infty$" ، "$\infty \times 0$" ، "$\frac{\infty}{\infty}$" ، "$\frac{0}{0}$"

صورة مجال بدالة متصلة

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ فإن:

$$f([a;b]) = [m;M]$$

$M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$: القيمة القصوية للدالة f على $[a;b]$

$m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$: القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

- إذا كانت f دالة متصلة وتزايدية على مجال $[a;b]$ فإن:

$$f([a;b]) = [f(a); f(b)]$$

- إذا كانت f دالة متصلة وتناقصية على مجال $[a;b]$ فإن:

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)]$$

- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.
- إذا كانت f دالة متصلة وتزايدية على مجال $[a;b[$

فإن: $f([a;b[) = [f(a); \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$

- إذا كانت f دالة متصلة وتناقصية على مجال $[a;b[$

فإن: $f([a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x); f(a)]$

مبرهنة القيم الوسيطية

- مبرهنة القيم الوسطية (الصيغة 1):

$$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ \lambda \in f([a;b]) \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha \in [a;b] : \lambda = f(\alpha)$$

- مبرهنة القيم الوسطية (الصيغة 2):

$$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f(a)f(b) \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha \in [a;b] : f(\alpha) = 0$$

- $\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{cases} \Longrightarrow$ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $]a;b[$

- $\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f \text{ رتيبة قطعا على } [a;b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{cases} \Longrightarrow$ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$

الدوال الاعتيادية المتصلة

- كل دالة حدودية فهي متصلة على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها.
- الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ متصلتان على $\mathbb{R}$.

- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $[0;+\infty[$.
- الدالة $x \mapsto |x|$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة العكسية

- إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I فإ f تقابل من I نحو $J=f(I)$.
- إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I فإن:

1) الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} متصلة ورتيبة قطعاً على J ولها نفس منحى تغير الدالة f

2) المنحنيان (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

3) لدينا : $\begin{cases} x=f(y) \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases}$

4) $(\forall x\in I) \quad (f^{-1}\circ f)(x)=x$

5) $(\forall x\in J) \quad (f\circ f^{-1})(x)=x$

دالة الجذر من الرتبة n

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

الدالة: $x\mapsto x^n$ متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$ فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ وتقبل دالة عكسية نرمز لها بـ $\sqrt[n]{}$ معرفة من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

1) $\begin{cases} y=\sqrt[n]{x} \\ x\in\mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^n \\ y\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x^n}=(\sqrt[n]{x})^n=x$

$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{+2}) \quad \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x=y$

$\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x<y$

3) $(\forall(n;p)\in\mathbb{N}^{*2}) \quad (\sqrt[n]{x})^p=\sqrt[n]{x^p} \;,\; \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[np]{x}$

$(y>0) \quad \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \;,\; \sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$

4) الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$.

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

خاصية

1) إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ متصلة على المجال I .

2) إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و $\ell \geq 0$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

3) إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا

- ليكن a من $\mathbb{R}_+^*$ و r من $\mathbb{Q}$ بحيث : $r = \frac{p}{q}$ و $(p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

لدينا : $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

- ليكن a و b من $\mathbb{R}_+^*$ و r و r' من $\mathbb{Q}$ لدينا :

1) $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$; $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

2) $a^r \times b^r = (ab)^r$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$; $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

4) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[1]{x} = x$

5) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

دالة قوس الظل

الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة وتزايدية قطعاً على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

فهي تقابل من $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ نحو $\mathbb{R}$ وتقبل دالة عكسية يرمزلها ب:

Arctan وتسمى دالة قوس الظل معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

1) $$\begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\end{cases} \iff \begin{cases} y = \text{Arctan}\, x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) $$\text{Arctan}(\tan x) = x \quad \left(\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\right)$$

$$\tan(\text{Arctan}\, x) = x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

3) $$\text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, y \iff x = y \quad ((x;y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$\text{Arctan}\, x < \text{Arctan}\, y \iff x < y$$

4) الدالة Arctan متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}\, x}{x} = 1$$

متتالية مكبورة - مصغورة - محدودة

- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية مكبورة $\Leftrightarrow$ $(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in I): u_n \leq M$
- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية مصغورة $\Leftrightarrow$ $(\exists m\in\mathbb{R})(\forall n\in I): u_n \geqslant m$
- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية محدودة $\Leftrightarrow$ $(\exists m;M)\in\mathbb{R}^2)(\forall n\in I): m\leq u_n\leq M$

رتابة متتالية

ليكن n_0 عنصراً من $\mathbb{N}$. نضع : $I=\{n\in\mathbb{N} / n\geqslant n_0\}$

- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I): u_{n+1}-u_n\geqslant 0$
- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I): u_{n+1}-u_n\leqslant 0$
- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I): u_{n+1}-u_n=0$
- $(u_n)_{n\in I}$ متتالية رتيبة $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية أو $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية

متتالية حسابية

- $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث :

$$(\forall n\geqslant n_0) \qquad u_{n+1}-u_n=r$$

العدد r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

- $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall n\geqslant n_0) \qquad 2u_{n+1}=u_n+u_{n+1}$$

- إذا كانت $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن :

$$\begin{pmatrix} n\geqslant n_0 \\ p\geqslant n_0 \end{pmatrix} \qquad u_n=u_p+(n-p)r$$

- إذا كانت $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ متتالية حسابية فإن :

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_p)$$

متتالية هندسية

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
$(\forall n\geq n_0) \quad u_{n+1}=q\,u_n$
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان :
$(\forall n\geq n_0) \quad u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+1}$
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن :
$\begin{pmatrix}\forall n\geq n_0\\ \forall p\geq n_0\end{pmatrix} \quad u_n = u_p \times q^{(n-p)}$
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية فإن :
$u_p+u_{p+1}+\dots+u_n = u_p\times\frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$

نهاية متتالية عددية

ليكن l عدداً حقيقياً.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)\ |u_n-l|<\varepsilon$
$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)\ u_n\in]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)\ u_n>A$
$\iff (\forall A>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)\ u_n\in]A;+\infty[$

- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة إذا كان : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\in\mathbb{R}$
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية متباعدة إذا كان : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\infty$ أو $(u_n)_{n\geq n_0}$ لا تقبل نهاية .

مصاديق تقارب متتالية

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0):\ |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad (1)$$

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0):\ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad (2)$$

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0):\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \qquad (3)$$

$$\begin{cases} (\forall n \geq n_0):\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \qquad (4)$$

نهاية المتتالية (a^n)

ليكن a عدداً حقيقياً.

- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن المتتالية (a^n) لا تقبل نهاية.

- كل متتالية تزايدية ومكبورة فهي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية ومصغورة فهي متقاربة.

متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

إذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة :

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

والعدد الأول u_0 بحيث f دالة عددية متصلة على مجال I

مع $f(I)\subset I$.

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها هي حل

المعادلة : $f(x)=x$ $(x\in I)$.

متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة نهايتها l و f دالة متصلة في l فإن المتتالية $(v_n)=(f(u_n))$ متقاربة نهايتها $f(l)$.

المتتاليات المتحادية

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين بحيث :

(1) (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية .

(2) $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية . ونقول إن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متحاديتان

قابلية اشتقاق دالة في نقطة

- لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I مركزه x_0 .

f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي l

بحيث : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بـ : $f'(x_0)$.

- f قابلة للاشتقاق في x_0 $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين} \\ \text{وعلى اليسار و } f'_d(x_0)=f'_g(x_0) \end{array} \right.$

- f متصلة في x_0 $\Longrightarrow$ f قابلة للاشتقاق في x_0 .

التأويل الهندسي لقابلية اشتقاق في نقطة

معادلة المماس لـ (C_f) عند M_0 هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ (C_f) يقبل نقطة مزواة M_0 .	$f'(x_0)=0$ (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة M_0	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ (C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة M_0

مشتقة دالة مركبة - مشتقة الدالة العكسية

- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g دالة قابلة على مجال J بحيث : $f(I) \subset J$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I ولكل x من I : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times g'(x)$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتيبة تماماً على مجال I بحيث لكل x من I : $f'(x) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$ ولكل x من J : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

جدول مشتقات الدوال الاعتيادية

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax^n	nax^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\text{Arctan}\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$\frac{1}{v(x)}$	$-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$
$(u(x))^n$	$n(u(x))^{n-1}\times u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\text{Arctan}(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$(v\circ u)(x)$	$v'(u(x))\times u'(x)$
$u^{-1}(x)$	$\frac{1}{u'(u^{-1}(x))}$

مبرهنة رول

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a;b[$ و $f(a)=f(b)$ فإنه يوجد c من $]a;b[$ بحيث : $f'(c)=0$

مبرهنة التزايدات المنتهية

إذا كانت f دالة متصلة على $[a;b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a;b[$ فإنه يوجد c من $]a;b[$ بحيث :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

أي $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

دالة أصلية

لتكن f و F دالتين معرفتين على مجال I .

F دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا كانت تحقق مايلي :

(1) F قابلة للاشتقاق على المجال I .

(2) لكل x من I : $F'(x) = f(x)$.

خاصيات

- إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على مجال I فإن :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي :

$$P_f = \{ F + k \mid k \in \mathbb{R} \}$$

- لتكن f دالة تقبل دالة أصلية على مجال I و $(x_0; y_0) \in I \times \mathbb{R}$

توجد دالة أصلية وحيدة H للدالة f على المجال I بحيث :

$$H(x_0) = y_0$$

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين لدالتين f و g على مجال I على التوالي و λ عدداً حقيقياً فإن :

* $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .
* λF دالة أصلية للدالة $\lambda . f$ على I .

- كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

جدول الدوال الأصلية الاعتيادية

$f(x)$	$F(x)$
0	a
a	ax
$ax^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\, x$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$1+\tan^2(ax+b)=\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$(u(x))^n \times u'(x) \quad n \neq -1$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$\frac{1}{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\mathrm{Arctan}(u(x))$
$v'(u(x)) \times u'(x)$	$v(u(x))$

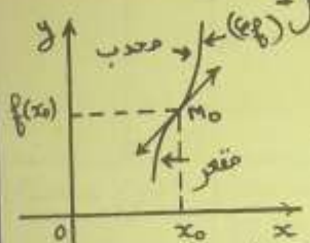
تغيرات دالة عددية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

- f تزايدية على المجال I $\Longleftrightarrow$ $(\forall x\in I): f'(x)\geq 0$
- f تناقصية على المجال I $\Longleftrightarrow$ $(\forall x\in I): f'(x)\leq 0$
- f ثابتة على المجال I $\Longleftrightarrow$ $(\forall x\in I): f'(x)=0$

تقعر ونقط انعطاف دالة عددية

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I



- إذا كان $\forall x\in I \quad f''(x)\geq 0$

فإن $(\mathcal{C}_f)$ محدب أي أن $(\mathcal{C}_f)$ متجه نحو الأعلى.

- إذا كان $\forall x\in I \quad f''(x)\leq 0$

فإن $(\mathcal{C}_f)$ مقعر أي أن $(\mathcal{C}_f)$ متجه نحو الأسفل.

- إذا كانت الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في x_0.

فإن النقطة $I(x_0,f(x_0))$ نقطة إنعطاف المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

- إذا كان الدالة f' تنعدم بدون تغيير الإشارة في x_0

فإن النقطة $I(x_0,f(x_0))$ نقطة إنعطاف المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

الفروع اللانهائية

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\longrightarrow$ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي معادلته: $x=x_0$

(2) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=b$ $\longrightarrow$ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب أفقي معادلته: $y=b$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x)-(ax+b)]=0$ $\longrightarrow$ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب مائل معادلته: $y=ax+b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$	$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \infty$

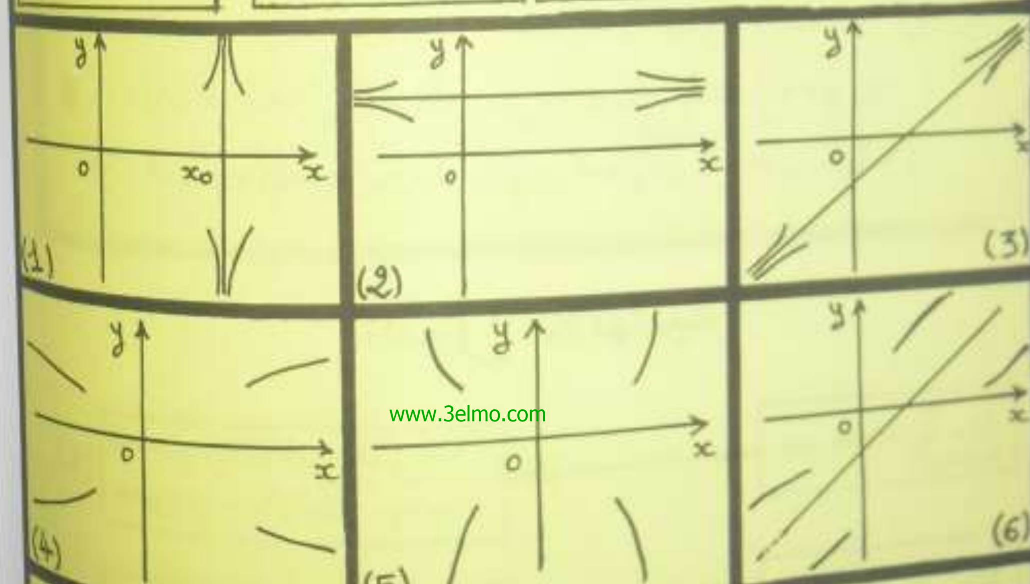
$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right) = b \qquad \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right) = \infty$$

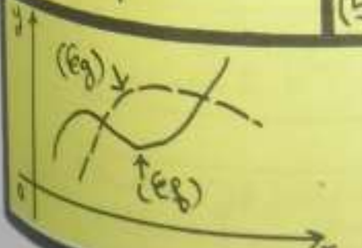
(4) المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل محور الفواصل كاتجاه مقارب

(3) المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقارب مائل معادلته: $y = ax + b$

(6) المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته: $y = ax$ كاتجاه مقارب

(5) المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل محور التراتيب كاتجاه مقارب





لدراسة وضع المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ ندرس إشارة الفرق
$$\Delta(x) = f(x) - g(x)$$

دالة اللوغاريتم النيبيري

الدالة الأصلية للدالة $t \longmapsto \frac{1}{t}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في النقطة $x_0=1$ ؛ تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري ويرمز لها بـ : $\ln$ (أو $\log$).

$$f(x)=\ln x \iff (x>0 \text{ و } f'(x)=\frac{1}{x} \text{ و } f(1)=0)$$

خاصيات الدالة اللوغاريتم النيبيري

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$ و r من $\mathbb{Q}$ لدينا:

1) الدالة $\ln$ متصلة وتزايدية قطعًا على $\mathbb{R}_+^*$.

2) $\ln x=\ln y \iff x=y$

$\ln x<\ln y \iff x<y$

3) $\ln(xy)=\ln x+\ln y$

$\ln(x^r)=r\ln x$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

النهايات الهامة

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=0$

$(\alpha\in\mathbb{R}_+^*)$

الدوال اللوغاريتمية للأساس a

ليكن a عدداً حقيقياً موجب قطعاً بحيث : $a \neq 1$.
الدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ؛ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a ويرمز لها بـ : $\log_a$. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^r) = r\log_a x$ $\qquad$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

اللوغاريتم العشري

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها $a = 10$ ؛ نسمي دالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها بـ : $\log$

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\left(m = \frac{1}{\ln 10} \simeq 0,434\right)$ $\qquad \log 10 = 1$

44 اختزل التعابير التالية :

$$A = \log_a\left(\log_a(a)^{a^{2008}}\right)$$

$$B = \frac{\left(\log_a\left(a^{(\log_a b)}\right)\right)^3}{\log_b\left(a^{(\log_a b)^4}\right)}$$

حيث a و b [illegible]

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 ; \ln 2\}$

النهايات الهامة

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{n} e^{x} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

الحالات التالية:

$f(x) = \frac{2}{e}$ ...

$f(x) = \frac{}{e}$ ...

$x \in D_f$

15 حدد النهايات التالية :

$\lim x^3 e^{2x}$

الدالة الأسية للأساس a

الدالة $\log_a$ مستمرة و رتيبة تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ فهي تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$ ودالتها العكسية تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بـ : $\exp_a$.

$$\begin{cases} y = \exp_a(x) = a^{x} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \log_a y \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad a^{x} = e^{x \ln a}$$

لكل x و y من $\mathbb{R}$ ولكل a من $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ لدينا :

$$a^{x} \times a^{y} = a^{x+y} \qquad (a^{x})^{y} = a^{xy}$$

$$\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y} \qquad \frac{1}{a^{x}} = a^{-x}$$

المعادلات

$\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة

لنحل المعادلة

نضع $3^{x} > 0$

$x = -3$ أو 2

بما أن $x > 0$

أي

جدول الدوال الأصلية الاعتيادية

$f(x)$	$F(x)$
0	c
a	ax
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\, x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$(u(x))^n \times u'(x)$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\mathrm{Arctan}(u(x))$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$

حساب التكامل

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I ولتكن a و b عنصرين من I.

العدد $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b يرمز له بـ : $\int_a^b f(x)\,dx$ ويقرأ " تكامل من a إلى b لـ $f(x)\,dx$ " ونكتب : $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b$.

خاصيات التكامل

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و λ عدداً حقيقياً.

لكل a و b و c من I لدينا :

- الدالة $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f على I والتي تنعدم في a .
- $\int_a^a f(x)\,dx$ و $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ (علاقة شال)
- $\int_a^b (\lambda f(x))\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$
- $(a\leq b \text{ و } f\geq 0) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- $(a\leq b,\ f\leq g) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- $(a\leq b)\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

القيمة المتوسطة

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ ($a<b$).

- العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$.
- يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ بحيث :

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

المكاملة بتغير المتغير

لتكن v دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث v' دالة متصلة على المجال $[a;b]$ ولتكن u دالة متصلة على المجال $J=v([a;b])$ لدينا :

$$\int_a^b u(v(x))\,v'(x)\,dx=\int_{v(a)}^{v(b)} u(t)\,dt$$

ملاحظة : * إذا كان $t=v(x)$ فإن $dt=v'(x)\,dx$

* إذا كان $x=a$ فإن $t=v(a)$

* إذا كان $x=b$ فإن $t=v(b)$

المكاملة بالأجزاء

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث u' و v' متصلتين على المجال I. ليكن a و b عنصرين من I :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

حساب التكامل

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على I ولتكن a و b عنصرين من I.

العدد $F(b) - F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b

يرمز له ب: $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ "تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$" ونكتب: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

خاصيات التكامل

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و λ عدداً حقيقياً.

لكل a و b و c من I لدينا:

- الدالة $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f على I والتي تنعدم في a.
- $\int_a^a f(x)dx$ و $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)
- $\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

- $(a \leq b$ و $f \geq 0) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $(a \leq b, f \leq g) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $(a \leq b)$ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

القيمة المتوسطة

لتكن f دالة متصلة على مجال [a;b] ($a<b$).

• العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال [a;b].

• يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال [a;b] بحيث:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

المكاملة بتغير المتغير

لتكن v دالة قابلة للاشتقاق على مجال [a;b] بحيث v' دالة متصلة على المجال [a;b] ولتكن u دالة متصلة على المجال $J=v([a;b])$ لدينا:

$$\int_a^b u(v(x))v'(x)dx=\int_{v(a)}^{v(b)} u(t)dt$$

ملاحظة: * إذا كان $t=v(x)$ فإن $dt=v'(x)dx$

* إذا كان $x=a$ فإن $t=v(a)$

* إذا كان $x=b$ فإن $t=v(b)$

المكاملة بالأجزاء

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث u' و v' متصلتين على المجال I. ليكن a و b عنصرين من I

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

حساب المساحة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

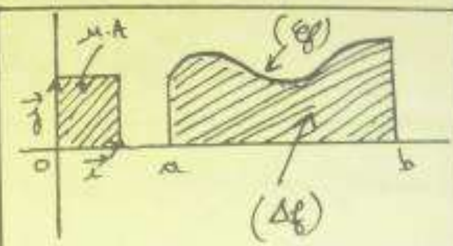
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ $(a<b)$

ليكن (Δf) الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f)

ومحور الفواصل والمستقيمان اللذان معادلتاهما:

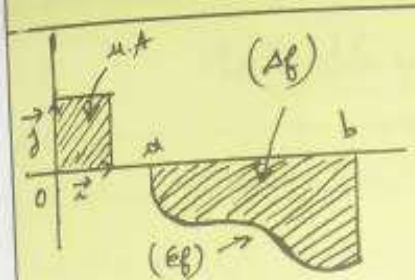
$x=a$ و $x=b$. مساحة (Δf) هي:

$\mathcal{A}(\Delta f)=\int_a^b |f(x)|\,dx$ وحدة قياس المساحة



f دالة موجبة على $[a;b]$

$$\mathcal{A}(\Delta f)=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) u.A$$



f دالة سالبة على $[a;b]$

$$\mathcal{A}(\Delta f)=\left(-\int_a^b f(x)\,dx\right) u.A$$

إذا كان $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=3cm$ فإن $u.A=6\,cm^2$

نهاية متتالية والتكامل

لتكن f دالة عددية معرفة على $[a;b]$ $(a<b)$.

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $s_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$

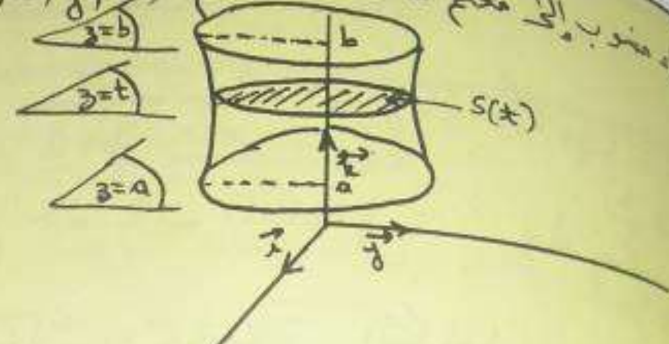
$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على المجال $[a;b]$ فإن المتتاليتين $(s_n)_{n\geq 1}$ و $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين ولهما نفس النهاية $\int_a^b f(x)\,dx$

أي $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx$

حساب الحجوم

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.



ليكن S مجسماً محصوراً بين مستويين معرفين على التوالي بالمعادلتين: $z=a$ و $z=b$.

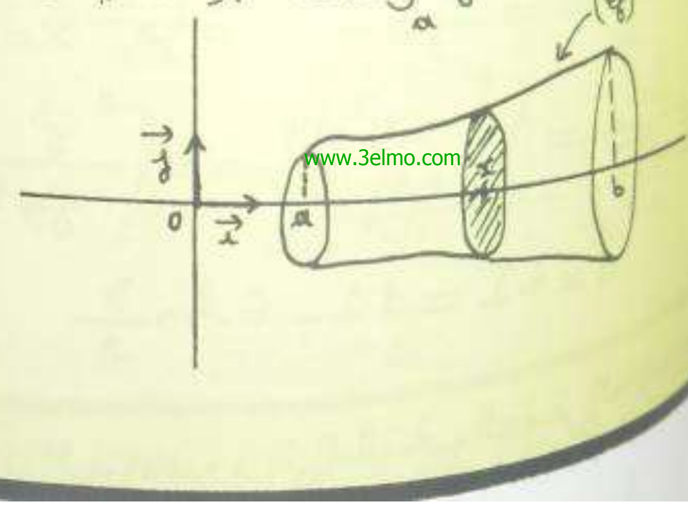
إذا كان التطبيق $t \mapsto S(t)$ متصلاً على المجال $[a;b]$ حيث $S(t)$ هي مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من المجسم S بحيث: $z=t$ فإن حجم المجسم S هو:

$V=\int_a^b S(t)\,dt$ بوحدة قياس الحجم.

حجم مجسم دوراني حول محور الأفاصيل

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$؛ حجم مجسم الدوران المولد عند دوران المنحنى (C_f) حول محور الأفاصيل (دورة كاملة) هو:

$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ بوحدة قياس الحجم



حلول المعادلة التفاضلية : $y' = ay$

حلول المعادلة التفاضلية : $y' = ay$
حيث a عدد حقيقي ، هي الدوال العددية y المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $y(x) = \lambda e^{ax}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

حلول المعادلة التفاضلية : $ay'' + by' + cy = 0$

نعتبر المعادلة التفاضلية : $ay'' + by' + cy = 0$ (E)
حيث a و b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.
المعادلة : $ar^2 + br + c = 0$ (1) نسمي المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E).

1) إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 وحلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال العددية y المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$

حيث $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

2) إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلاً حقيقياً وحيداً $r = -\frac{b}{2a}$ وحلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال العددية y المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$$

حيث $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

3) إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$
حيث : $p = \mathcal{R}e(r_1)$, $q = \mathcal{I}m(r_2)$
وحلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال y المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$$

حلول المعادلة التفاضلية : $ay'' + by' + cy = f(x)$

ليكن g حل للمعادلة التفاضلية : $(E)\ ay''+by'+cy=f(x)$
الدالة g تسمى حلا خاصا للمعادلة (E)
نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E')\ ay''+by'+cy=0$
حلول المعادلة (E) = حلول المعادلة (E') + الحل الخاص g.

البحث عن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (E)

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E')\ ay''+by'+cy=0$

1) إذا كانت f دالة حدودية درجتها n فإن الحل الخاص g هو
* دالة حدودية درجتها n إذا كان $c \neq 0$.
* دالة حدودية درجتها $n+1$ إذا كان $c=0$ و $b \neq 0$.
* دالة حدودية درجتها $n+2$ إذا كان $c=0$ و $b=0$, $a \neq 0$

2) إذا كانت $f(x)=M\cos wx+N\sin wx$ هناك حالتان :
* إذا كانت الدالتين $x \mapsto \cos wx$ و $x \mapsto \sin wx$ ليستا حلولا للمعادلة التفاضلية (E') فإن الحل الخاص g للمعادلة (E) يكتب على الشكل : $g(x)=A\cos wx+B\sin wx$
* إذا كانت الدالتين $x \mapsto \cos wx$ و $x \mapsto \sin wx$ حلولا المعادلة التفاضلية (E') فإن الحل الخاص g للمعادلة (E) يكتب على الشكل : $g(x)=(A\cos wx+B\sin wx)x$

3) إذا كانت $f(x)=e^{mx}\times P(x)$ حيث P دالة حدودية درجتها n فإن المعادلة (E) تقبل حلا خاصا g يكتب على الشكل : $g(x)=e^{mx}\times Q(x)$ حيث Q دالة حدودية هناك ثلاث حالات :
* إذا كان m ليس حلا للمعادلة المميزة $ar^2+br+c=0$ فإن $d^\circ Q=n$
* إذا كان m حل للمعادلة المميزة $ar^2+br+c=0$ فإن $d^\circ Q=n+2$
* إذا كانت المعادلة المميزة $ar^2+br+c=0$ مختلفين و m أحد هذه الحلول فإن $d^\circ Q=n+1$